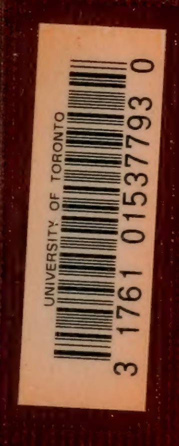


A. Kraemer

Anleitung zur Zins-, Zinseszins- und Rentenrechnung

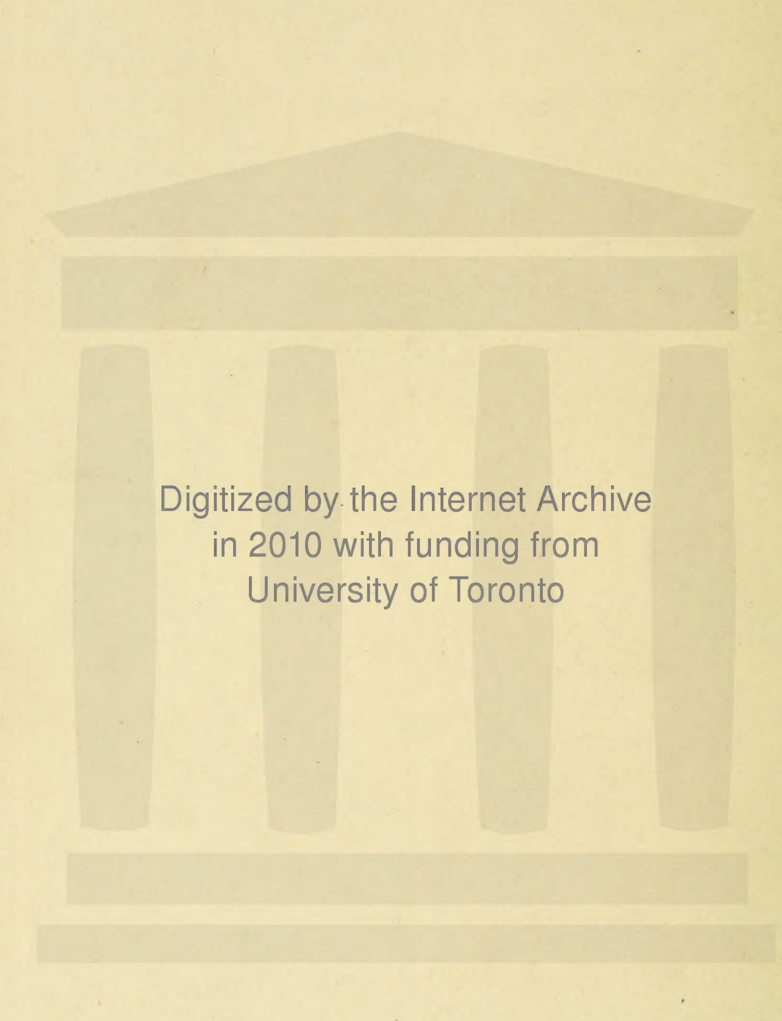
Verlagsbuchhandlung Paul Parey in Berlin





EIGENTUM
VON:





Anleitung

zur

Zins-, Zinseszins- und Rentenrechnung.

Mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse

der Landwirtschaft

für den Gebrauch an Lehranstalten und zum Selbstunterrichte

bearbeitet

von

Dr. Adolf Kraemer,
Professor in Zürich.



Mit 300 gelösten praktischen Aufgaben.

BERLIN.
VERLAGSBUCHHANDLUNG PAUL PAREY.
Verlag für Landwirtschaft, Gartenbau und Forstwesen.
SW., Hedemannstrasse 10.
1910.

Vorwort.

Durch Wahrnehmungen in meiner über Jahrzehnte reichenden Beschäftigung mit Fragen des landwirtschaftlichen Betriebslebens bin ich zur Überzeugung gelangt, daß die in ununterbrochener Steigerung begriffenen Anforderungen, welche die wirtschaftliche Entwicklung auch an das Gewerbe des Landbau's stellt, dessen Vertretern das Bedürfnis nahe legen müsse, die Zinseszins- und Rentenrechnung ihrer beruflichen Aufgabe mehr als seither geschehen, dienstbar zu machen. Diesem Standpunkte huldigend, habe ich denn auch inzwischen schon gelegentlich in meinen literarischen Arbeiten, so in einem Beitrage zu dem „Handbuch der gesamten Landwirtschaft" von Th. von der Goltz (1890) auf die Bedeutung dieser Rechnungsarten durch Vorführung einiger, dem inneren Betriebe angehörender Beispiele hingewiesen. Bestärkt wurde ich übrigens in meiner Auffassung noch durch die Tatsache, daß schon seit einer Reihe von Jahren mehrere Schriften und Abhandlungen landwirtschaftlichen Inhaltes erschienen, welche für die Wichtigkeit einer nachdrücklichen Pflege jenes Gebietes ein treffendes Zeugnis ablegen. Zu denselben zählen zunächst die freilich mehr allgemein und dabei in engerem Rahmen gehaltenen Ausführungen von F. C. Schubert im 7. Kapitel seines Buches „Landwirtschaftliches Rechenwesen" (Thaer-Bibliothek. 1891), sodann aber einige auf die praktische Anwendung gegebener Leitsätze unmittelbar abzielende Arbeiten, als da sind: „Die Belastung der Grundrente durch das Gebäudekapital in der Landwirtschaft", von C. von Seelhorst, 1890, „Aufforstung landwirtschaftlich benutzten Bodens", von A. Thaer (Landw. Jahrbücher. 1890), „Wert und Rentabilitätsberechnung der Obstkulturen" von Christ und E. Junge, 1905. — Auch die Behandlung verschiedener, dem nämlichen Rechnungsgebiete angehörender Aufgaben, welche sich auf den doch sehr beachtenswerten Kapital-Außenverkehr des Landwirts beziehen, tauchte, allerdings nur vereinzelt, in Fachzeitschriften auf.

In Würdigung dieser Sachlage und im Rückblicke auf meine Beobachtungen in einer inzwischen abgeschlossenen vieljährigen Lehrtätigkeit habe ich geglaubt, die Zeit und Kraft, welche mir in der Stille des späten Lebensabendes noch zur Verfügung steht, der Herstellung eines systematisch geordneten Leitfadens widmen zu sollen, dessen Benutzung den Landwirt in den Stand setzt, Aufgaben der Zinseszins- und Rentenrechnung, welche in seinen Tätigkeitskreis eingreifen, auf korrektem Wege zu lösen.

Indem ich mich nunmehr mit dieser Arbeit an meine Berufsgenossen wende, scheint es mir nicht unangebracht, einige Bemerkungen vorauszusenden, welche meinen Schritt und die mit ihm befolgte Methode rechtfertigen dürften.

Die Literatur über die Zinseszins- und Rentenrechnung ist in den Ländern deutscher Sprache zu einer ansehnlichen Reichhaltigkeit gediehen. Gleichwohl kann man beobachten, daß die meisten der vorliegenden Werke den privatwirtschaftlichen Anforderungen der eigentlich produktiven Erwerbsstände nicht teilnahmsvoll gegenüberstehen. Weitaus vorherrschend verfolgen sie Bahnen, in welchen das Interesse für die Aufklärung über Fragen und Aufgaben der Finanzverwaltung der Staaten und ihrer Unterverbände, der im Kapitalverkehr tätigen korporativen Unternehmungen, der Versicherungsanstalten und des Großhandels in den Vordergrund tritt. Immerhin bleibt erwähnenswert, daß man schon in früheren Jahrzehnten vielfach auch das Verfahren der vornehmlich doch die Landwirtschaft berührenden Ablösung von Reallasten und Servituten auf Grundlage der Rentenrechnung erörterte. So u. a. von E. M. Hahn (1857). Neben der also umschriebenen, mehr oder weniger exklusiv gepflegten Richtung hat es sich seither nur die Forstwissenschaft angelegen sein lassen, die Zinseszins- und Rentenrechnung zur Behandlung der wichtigsten wirtschaftlichen Aufgaben, welche ihrem Forschungsgebiete angehören, heranzuziehen, und tatsächlich ist in ihr das Verfahren, mittelst dieser Rechnungsarten die erzielbaren und die erreichten Erfolge verschiedener Betriebseinrichtungen nachzuweisen und die finanzielle Tragweite zahlreicher forstwirtschaftlicher Einzelmaßregeln darzulegen, längst eingebürgert. Erst in neuerer Zeit macht sich aber das Bedürfnis geltend, die gleiche Methode auch auf die Verhältnisse in der Ökonomie anderweiter Zweige der Erwerbstätigkeit in wissenschaftlicher Begründung anzuwenden, wie dies beispielsweise in dem sehr anerkennenswerten „Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung“ von A. Kleyer (1885) geschehen ist. In Anbetracht der heutigen Situation verdienen jedoch innerhalb dieser Richtung gerade auch die ausgesprochen vielseitigen privatwirtschaftlichen Beziehungen der ausübenden Landwirte die eingehendste Berücksichtigung. Und darum soll denn das bevorzugte Ziel meiner Anleitung sein, zu zeigen, inwieweit und auf welchen Wegen die Zinseszins- und Rentenrechnung auch in den Dienst des Landbaugewerbes gestellt werden kann.

Für die Art des Aufbaues meiner Arbeit, welche mit einer gedrängt gehaltenen Darlegung des Verfahrens der einfachen Zinsrechnung eingeleitet wurde, sind mehrfache Erwägungen bestimmend gewesen. In Ablehnung des Gedankens, einer den kausalen Zusammenhang verschleiernden schablonenhaften Behandlung des Stoffes irgend Vorschub zu leisten, mußte es sich mir durchweg zunächst um die Feststellung der arithmetischen Grundlagen des Verfahrens handeln, und sind daher auch alle zur Anwendung gelangenden Formeln planmäßig und in tunlichst verständlicher Weise entwickelt worden. Die Verfolgung dieses richtschnurgebenden Weges, an welchem ich im didaktischen Gesichtspunkte auch auf dem Gange durch die Rechnungs-Beispiele festgehalten, setzt allerdings voraus, daß der Leser sich mit der Lehre von den Progressionen, Potenzen,

Wurzeln und Logarithmen vertraut gemacht habe und auch mit wenigstens einfachen Gleichungen umzugehen verstehe. Erforderlichen Falles findet er in einem der verbreiteten Lehrbücher der Arithmetik und Algebra jede gewünschte Auskunft. Übrigens dürfte damit zugleich unseren landwirtschaftlichen Schulen denn doch die Aufgabe nahegelegt sein, ihrerseits die angehenden Landwirte mit den nötigen Kenntnissen in jenen Disziplinen auszurüsten. Wird den hier genannten Anforderungen entsprochen, so erfüllen sich auch erst recht die Voraussetzungen für eine ergiebige Anwendung der meiner Arbeit anfangsweise beigegebenen Hilfstafeln.

Abgesehen von dem Inhalte des Schluß-Abschnittes (Obst- und Forstkultur) folgt die Anordnung der Rechnungs-Beispiele genau der vorangestellten Entwicklung der Formeln, ein gegebenes Verhältnis, welches auch in der Detail-Bearbeitung regelmäßig wiederkehrt, übrigens sich im wesentlichen der meist üblichen Gliederung anschließt.

Hinsichtlich der Auswahl der Aufgaben war der Grundgedanke des Programmes maßgebend. Der gewiß berechtigten Forderung einer lückenlosen Umprägung der Formeln mußte allerdings durch die Aufnahme auch einer Anzahl allgemein gehaltener, nicht auf konkrete berufliche Voraussetzungen zugeschnittener Beispiele, ähnlich denjenigen, welche in Schul-Lehrbüchern enthalten sind, entsprochen werden. Darüber hinaus wurde aber der Rücksicht auf besondere wirtschaftliche Beziehungen Ausdruck gegeben. Konnte hierbei aus naheliegenden Gründen auch ein Übergreifen auf Fragen nicht ganz ausgeschlossen bleiben, welche in Handels- und Industriegewerben und auf dem Markte in Wert-Anlagen auftauchen, so habe ich doch in meinen Ausführungen konsequent auf Vorkommnisse in der L a n d w i r t s c h a f t das Hauptgewicht gelegt. Und in dieser Richtung wurden nicht allein Probleme, welche dem inneren Betriebe angehören, sondern auch solche, welche der Außenverkehr des Landwirts mit sich bringt, in Betracht gezogen. Die Sammlung dieser enger umschriebenen Aufgaben beruht übrigens zum größten Teile auf direkter Wahrnehmung von Verhältnissen, welche das berufliche Leben in mannigfaltiger Weise vorführt. Ergänzt wurde sie durch Anknüpfung an mehrere in der Literatur verzeichnete Fälle, in welchen ich eine Richtschnur für die Formulierung geeigneter Beispiele fand.

Auf die rechnerische Bearbeitung von solchen einfachen Aufgaben, welche nicht mehr als die direkte Anwendung je nur einer der vorliegenden Formeln erheischen, durfte sich meine Anleitung allerdings nicht beschränken. Die im Getriebe der wirtschaftlichen Tätigkeit auftauchenden Fragen, welche nach der hier in's Auge gefaßten Rechnungsweise zu lösen sind, können nämlich auch innerhalb der gleichen Kategorie noch sehr verschiedene Gestaltungen annehmen, und oft geschieht es, daß sie sich in Formen aufdrängen, welche einer unmittelbaren Aufschließung durch je einen arithmetischen Leitsatz unzugänglich sind. In solchen Fällen bedarf es einer vorgängigen Überlegung und Untersuchung darüber, welche besonderen Dispositionen zu treffen sind, um denselben mit Hilfe der einschlagenden Formeln beizukommen. Den hieraus resultierenden Ansprüchen habe ich denn auch in der Art der Konstruktion von Aufgaben gebührend Rechnung zu tragen gesucht.

In der Anordnung und Durchführung meiner Anleitung sah ich mich wiederholt aufgefordert, auch die neueren literarischen Erscheinungen, welche in der gleichen Richtung steuern, zu beachten. Wo und in weit ich in Einzelfällen auf sie Bezug genommen, ist im Texte regelmäßig vorgemerkt. Im übrigen habe ich außer den Eingangs erwähnten Arbeiten namentlich auch das oben erwähnte Lehrbuch von A. Kleyer mehrfach zu Rate gezogen.

Bei diesem Anlasse empfinde ich es noch als ein besonderes Anliegen, mehreren Kollegen aus meiner früheren Lehramtstätigkeit an der eidgen. technischen Hochschule in Zürich meinen wärmsten Dank für das freundliche Entgegenkommen zu bezeugen, welches sie mir bei verschiedenen Gelegenheiten durch ihre Anregung und ihren Beirat bewiesen haben.

Somit übergebe ich denn meine Arbeit den zur Ausübung und zur Förderung der Landwirtschaft berufenen Kreisen und insbesondere auch den Vertretern des landwirtschaftlichen Genossenschaftswesens, gerne erhoffend, daß sie in derselben den Ausdruck des ernsten Bestrebens erkennen werden, auf dem ihr vorgezeichneten Wege einer Auswertung arithmetischer Lehren zur ferneren Entwicklung des Gewerbes der Bodenkultur beizutragen.

Zürich, im Oktober 1909.

A. Kraemer.

Inhaltsverzeichnis.[1]

Erster Abschnitt.
Die Zinsrechnung.

Zweiter Abschnitt.
Die Zinseszinsrechnung.

[1] Wie im Texte, so bedeuten auch in nachfolgendem Verzeichnisse durchweg die Buchstaben:

A: Den End- oder Nachwert von ausstehenden je einmaligen und von zeitlich regelmäßig wiederkehrenden Anlagen bezw. Zahlungen;
a: Deren Vor- oder Ausgangswert (Barwert);
r: Den Betrag von regelmäßig sich wiederholenden Zahlungen (Raten);
p: Den Zinsfuß;
n: Die Zeitdauer der Kapital-Anlagen und des Bezuges von regelmäßig eingehenden Zahlungen in Jahren;
m: Die Zahl bestimmter gleicher Teilabschnitte des Jahres;
b: Die gleiche Frist von je mehreren Jahren (Zeitliche Zwischenräume);
v: Die Frist für den Aufschub des Beginnes von regelmäßigen Zahlungen;
e: Den Grad der fortschreitenden Vervielfältigung der Glieder einer Reihe von Zahlungen;
d: Den gleichmäßig wiederkehrenden Betrag, um welchen die Glieder einer Reihe von Zahlungen fortschreitend vermehrt oder vermindert werden.

[1] Dieselbe gibt S. 19—22 in den Aufgaben 33 u. 34 genaue Auskunft über die Behandlung von Fällen, in welchen der Zinszuschlag je an gleichen Teilabschnitten des Jahres erfolgt, und von solchen, in welchen die Dauerzeit der Anlage mit Jahresbruchteilen abschließt.

Dritter Abschnitt.

Die Rentenrechnung.

Vierter Abschnitt.

Spezial-Aufgaben aus dem Betriebe der Obst- und der Forstkultur.

Anhang.

Gruppierung der Aufgaben der Zinseszins- und Rentenrechnung im wirtschaftlichen Gesichtspunkte.

(Die Zahlen bezeichnen die Nummern der Aufgaben.)

I. Die Zinseszins-Rechnung.

1. Zuwachs von einmaligen, auf Zinseszins ausstehenden Kapitalien: 26. 33. 34. 36. 37. 40. 44—47. 54. 55. 59—61.
2. Prozentuale Zunahme von naturalen Größen (Holzbestände in Forsten, Bevölkerungen): 27. 29. 41. 42. 51—53. 57. 58.
3. Massiv- und Fachwerkbau: 30. 31. 123.
4. Zuwachs von einmaligen Kosten einer Aufforstung: 28.
5. Vergleichung mehrerer auf Nachzahlungen abzielender Angebote auf ein zum Verkaufe stehendes Landgut: 43.
6. Gewinn einer Kreditkasse in Folge Erhöhung des Zinsfußes bei Wiederanlage eines empfangenen Kapitales: 35. 71.
7. Stiftungen: 32. 56. 88. 97. 102. 116. 125.
8. Aufsparungen. — Sicherung eines nach Ablauf einer bestimmten Reihe von Jahren beziehbaren Kapitales durch ein- oder mehrmalige Zahlung oder auch in Verbindung mit vorgängigen teilweisen Rückbezügen: 39. 68. 74. 78. 84. 85. 86. 87. 91. 98. 105. 110. 113. 120. 141. 146. 147.
9. Diskontierung von Schuldverschreibungen: 49. 50.
10. Veränderung des Bestandes von Kapital-Anlagen in Folge von Zuschüssen und bezw. Rückbezügen: 62. 63. 76. 77. 79—83. 89. 90. 92. 93. 95. 99. 101. 104. 107—109. 112. 114. 145. 148.
11. Vorzeitige Rückzahlung von Kapital- und von Annuitäten-Schulden: 38. 48. 126.
12. Ersatz mehrerer unter verschiedenen Bedingungen ausgestellter Wechsel durch nur einen gleichwertigen Wechsel: 64.
13. Bestimmung des Termines für die in einem Betrage zu vollziehende Abzahlung einer mehrfachen Schuld: 65. 66.
14. Abtragung einer mehrfachen Schuld nach Vorauserhebung der Zinsen: 67.
15. Nachweis der Erträge an Zinsen und Zinseszinsen oder nur an Zinsen von ausstehenden Kapitalien: 69. 70.
16. Vergleichende Darstellung des Verhaltens je zweier Kapitalien nach Maßgabe der Bedingungen ihrer Anlage: 72. 73. 118.
17. Zuwachs von Kapital-Anlagen bei Anrechnung von Kommissionsgebühren: 75.

18. Abschlagszahlungen auf Schulden: 94. 100. 103. 111. 115. 117.
19. Sicherung eines während einer Reihe von Jahren regelmäßig zu beziehenden Betrages durch eine einmalige Anlage: 96.
20. Beschaffung des Kapitales für den Übergang von der Bewirtschaftung eines Kleingutsbesitzes zur Pachtung eines größeren Objektes: 106.
21. Pachtzins-Rückstand: 121.
22. Vereinbarung zwischen Verpächter und Pächter betr. Beteiligung an den Kosten einer Drainage: 122.
23. Herstellung von Arbeiterwohnungen: 128.
24. Erb-Auseinandersetzung (Beispiel aus der Landwirtschaft): 129.
25. Erneuerungsfonds für Gebäude: 130.
26. Vereinbarung zwischen Verpächter und Pächter betr. Beteiligung an den Kosten der Herstellung von Bauten: 133. 155.
27. Amortisation von Anleihen: 119. 124. 127. 132. 134. 135. 137. 138. 140. 142—144. 153.
28. Amortisationen im internen Betriebe der Landwirtschaft (Gebäude. Meliorationen usw.): 131. 136. 139.
29. Verschiedener Zinsfuß für das Anleihens-Kapital und die Amortisationsraten: 150.
30. Begleichung einer zu amortisierenden Schuld durch vorzeitige Abzahlung derselben: 151. 152.
31. Aufnahme eines Amortisations-Anleihens behufs Abfindung von Miterben: 154.
32. Abkürzung der Tilgungsfrist durch vorzeitige Abzahlung eines Teiles der Schuld: 156.
33. Aufgeschobener Termin für den Beginn der Zahlung von Tilgungsraten: 149. 157.

Von vorstehend verzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Verkehr mit Spar- und Darlehnskassen: 39. 55. 68. 78. 82. 84. 85. 87. 91. 98. 103. 105. 111. 120. 141. 146. 147.

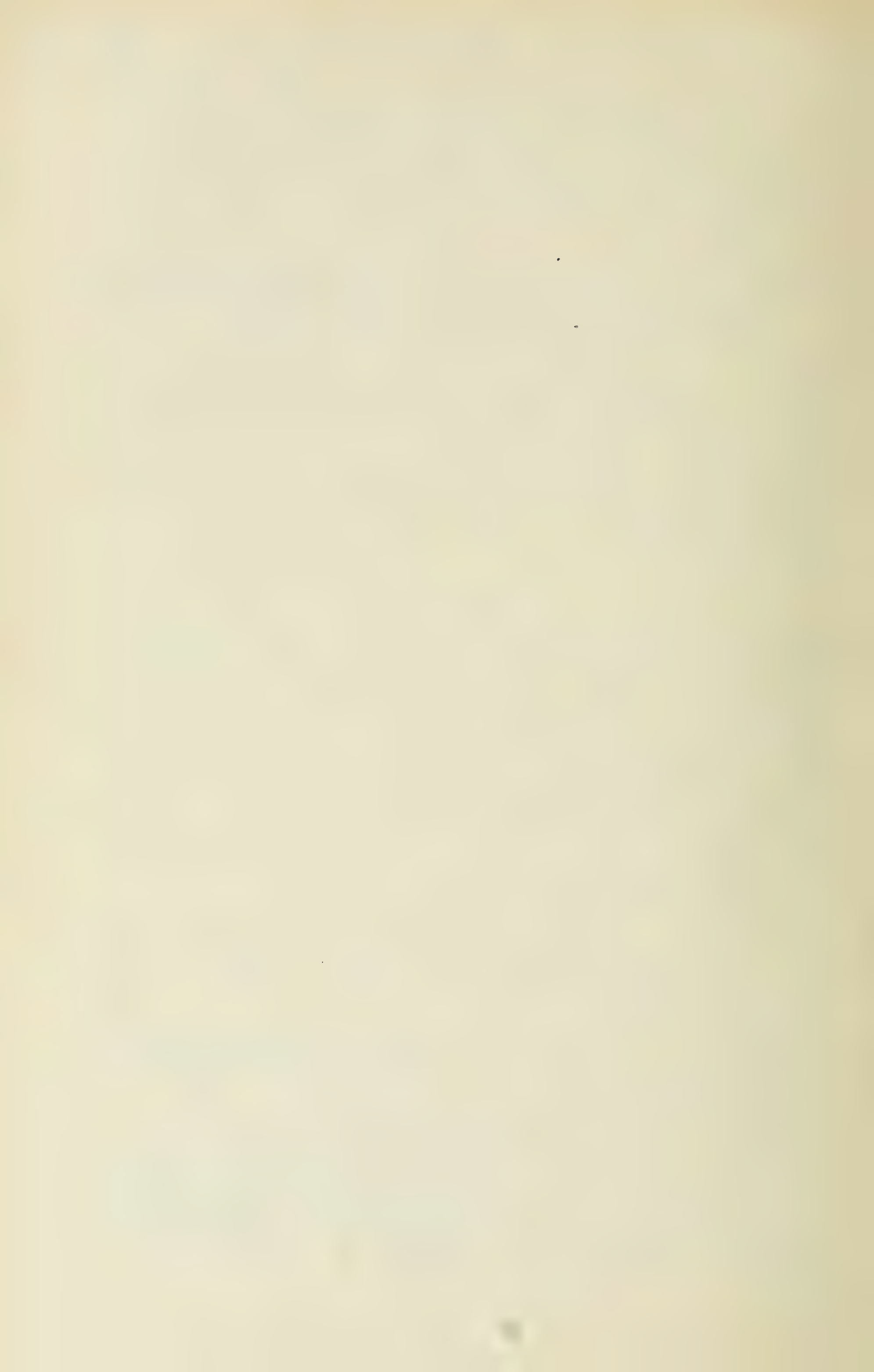
II. Die Rentenrechnung.

1. Zeitrenten.

1. Berechnung des Endwertes von Zeitrenten: 158—160. 176. 177. 192. 218.
2. Abtragung von Schulden mittelst Ratenzahlungen: 159. 186. 189. 193. 197. 199. 204. 209. 215.
3. Versicherungen: 161. 162. 165. 169. 179.
4. Ablösung von Zeitrenten: 166. 183.
5. Erwerb von Zeitrenten mittelst Kapital-Einlage: 163. 167. 172. 173. 178. 180. 181. 184. 188. 190. 194. 195. 196. 198. 201—203. 205—207. 212—214. 216. 219—221. 223. 224.
6. Veräußerung von Zeitrenten: 164. 182. 200.
7. Kapital-Anlagen zum Zwecke des Bezuges einer Rente und zeitlich nachfolgend eines Kapital-Zuwachses: 168.
8. Abtragung von Schulden mittelst einmaliger Bar- und nachfolgender Rentenzahlung: 170. 174.

2. Ewige Renten.

Über die Gliederung der Spezial-Aufgaben aus dem Betriebe der Obst- und der Forstkultur gibt das Inhaltsverzeichnis, S. XIII—XIV, nähere Auskunft.



Erster Abschnitt.

Die Zinsrechnung.

Unter Zins versteht man bekanntlich die bedungene Vergütung für die Benutzung eines im Miet- oder Leihverkehr angelegten Kapitales (Kapital-Mietpreis). Bezogen auf eine Kapitalwerts-Einheit bezeichnet man denselben als Zinsfuß. Im Verkehr gilt als solche Einheit die Zahl 100. Demgemäß pflegt man auch den Zinsfuß in Prozenten vom Kapitale auszudrücken. Bei der Feststellung der Zins-Prozente wird immer eine bestimmte Zeiteinheit, gewöhnlich diejenige eines Jahres angenommen (Jahreszins).

Erste Reihe.

In den Zinsrechnungen handelt es sich zunächst um vier Größen, von welchen jede einzelne eine Funktion aller übrigen ist, daher von diesen abhängt. Die Aufgaben, welche hierbei in Betracht kommen, bestehen also, allgemein gefaßt, darin, aus drei gegebenen Größen die unbekannte vierte Größe zu ermitteln. Dem einzuschlagenden Verfahren dient die Lehre von den Proportionen (Regel de tri).

Bezeichnet man das zinstragende Kapital mit a, die jährlichen Prozente mit p, die Zeitdauer der Verzinsung in Jahren mit n, und den absoluten Betrag der Jahreszinsen mit z, so ergeben sich folgende Ansätze:

$$100 : p = a \,.\, n : z$$

$$z = \frac{a \,.\, p \,.\, n}{100} \text{ oder: } \frac{a}{100} \cdot p \cdot n \text{ oder: } \frac{a \,.\, n}{100}\, p \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$p \,.\, n : 100 = z : a$$

$$a = \frac{100 \,.\, z}{p \,.\, n} \text{ oder: } \frac{z}{p \,.\, n} \cdot 100 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$a \,.\, n : z = 100 : p$$

$$p = \frac{100 \,.\, z}{a \,.\, n} \text{ oder: } \frac{100}{a \,.\, n} \cdot z \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$a \,.\, p : z = 100 : n$$

$$n = \frac{100 \,.\, z}{a \,.\, p} \text{ oder: } \frac{100}{a \,.\, p} \cdot z \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Anmerkung. Erstreckt sich die Zeitdauer der Verzinsung auf Jahresbruchteile, und werden diese auf Monate oder Tage angegeben oder berechnet, so vereinfacht sich das Verfahren in Anwendung aller hier und nachfolgend verzeichneten Aufgaben insofern, als man für n die ganzen Zahlen der Monate bezw. Tage direkt einsetzt, dann aber den Faktor oder Divisor 100 mit 12 bezw. 365 multipliziert. (Letztere Ziffer wird im kaufmännischen Verkehr bei kurzen, die Jahresgrenze nicht überschreitenden Fristen gewöhnlich auf 360 abgerundet.) – Vgl. die Aufg. 3, 5. u. 11.

Aufgaben.

(Formel 1.)

1. Wie hoch belaufen sich die Jahreszinsen eines zu $4^3/_4$ Prozent ausstehenden Kapitales von 7 300 Mark?

A. Da in diesem Falle $n = 1$ ist, lautet die Rechnung einfach:

$$z = \frac{7\,300}{100} \times 4{,}75 = 73 \times 4{,}75 = \mathbf{346{,}75} \text{ Mark.}$$

2. Ein Kapital von 450 Mark steht zu $3^1/_2$ Prozent. Wieviel Zinsen bringt dasselbe in 7 Jahren?

A. $$z = \frac{450}{100} \times 3{,}5 \times 7 = 4{,}5 \times 3{,}5 \times 7 = \mathbf{110{,}25} \text{ Mark.}$$

3. Wieviel beträgt die Verminderung der Zinspflicht, welche der Schuldner eines zu 6 Prozent p. Jahr übernommenen Kapitales von 1 300 Mark dann erreicht, wenn er dasselbe $^1/_4$ Jahr vor Ablauf des Jahres zurückzahlt?

A. $$z = \frac{1\,300}{100} \times 6 \times 0{,}25 = 13 \times 1{,}5 = \mathbf{19{,}50} \text{ Mark,}$$

oder auch (s. Anmerkung o.):

$$\frac{1\,300}{1\,200} \times 6 \times 3 = \frac{1\,300 \times 6}{\frac{1\,200}{3}} = \frac{7\,800}{400} = \frac{78}{4} = \mathbf{19{,}50} \text{ Mark.}$$

(Formel 2.)

4. Wie groß wird das Kapital sein, welches, zu 4 Prozent angelegt, in 12 Jahren 144 Mark eintrug?

A. $$a = \frac{144}{4.12} \times 100 = \frac{144}{48} \times 100 = \mathbf{300} \text{ Mark.}$$

5. Wenn von einem zu $5\,^1/_2$ Prozent ausgeliehenen Kapitale in 3 Jahren und 52 Tagen 795,10 Mark Zinsen eingingen: Wie groß war dann dieses Kapital?

A. $$a = \frac{795{,}10}{5{,}5 \times 1\,147} \times 36\,500 = \frac{795{,}10}{6\,308{,}5} \times 36\,500 = 12{,}603 \times 365$$
$$= \mathbf{4\,600} \text{ Mark.}$$

(Formel 3.)

6. Der buchhalterisch nachgewiesene Jahresertrag eines in der Landwirtschaft angelegten Betriebskapitales von 34 352 Mark belief sich auf 1 667,45 Mark. Wieviel beträgt derselbe in Prozenten von diesem Kapital?

A. Es handelt sich hier um eine einjährige Nutzung, in welcher also $n = 1$ ist. Somit lautet die einfache Rechnung:

$$p = \frac{1\,667{,}45 \times 100}{34\,352} = \frac{166\,745}{34\,352} = \mathbf{4{,}854} \text{ Prozent.}$$

7. Ein Kapital von 3 200 Mark brachte in 9 Jahren 1 080 Mark Zinsen. Zu wieviel Prozenten war dasselbe angelegt?

A. $$p = \frac{1\,080 \times 100}{3\,200 \times 9} = \frac{108\,000}{28\,800} = \mathbf{3\,^3/_4} \text{ Prozent.}$$

8. Zu welchem Prozentsatze war ein Kapital von 886 Mark ausgeliehen, wenn dasselbe in $7^1/_2$ Jahren 348,86 Mark Zinsen eintrug?

A. $$p = \frac{348{,}86 \times 100}{886 \times 7{,}5} = \frac{34\,886}{6\,645} = \mathbf{5\,^1/_4} \text{ Prozent.}$$

(Formel 4.)

9. Von einem zu $3\,{}^1/_4$ Prozent ausstehenden Kapitale im Betrage von 920 Mark wurden 149,85 Mark Zinsen entrichtet. Wie viele Jahre mußte dasselbe ausgeliehen sein, um diesen Zinsertrag zu liefern?

A. $$n = \frac{100}{920 \times 3{,}25} \times 149{,}85 = \frac{14\,985}{2\,990} = 5{,}012 \text{ Jahre}$$
$= \mathbf{5}$ Jahre und **4** Tage.

10. Wie lange ist ein Kapital von 22 148 Mark ausgestanden, welches bei einem Zinsfuße von $4\,{}^1/_2$ Prozent einen Zinsertrag von 3 322,20 Mark lieferte?

A. $$n = \frac{100}{22\,148 \times 4{,}5} \times 3\,322{,}20 = \frac{332\,220}{99\,666} = 3\,{}^1/_3 \text{ Jahre.}$$

Zweite Reihe.

Im Anschlusse an die seither behandelten Fälle sind zunächst noch einige Aufgaben in Betracht zu ziehen, in welchen, außer auf das zinstragende Kapital, die jährlichen Prozente und die Zeitdauer der Verzinsung in Jahren, auch auf den Endwert Bezug genommen wird, bis auf welchen das Anlage-Kapital durch Zuschlag der Zinsen zu demselben anwächst.

Wird die Frage gestellt, bis zu welchem Betrage ein zu einem bestimmten Zinsfuße (p) angelegtes Kapital (a) mit Ablauf einer bestimmten Reihe von Jahren (n) sich auf jene Weise vergrößert, und bezeichnet man den gesuchten Betrag mit A, so muß derselbe, da das Anwachsen nur in dem Zinsertrag z besteht, dieser aber nach dem Ansatze 1 sich auf $\frac{a}{100} \cdot p \cdot n$ berechnet, gleich sein mit:

$$a + \left(\frac{a}{100} \cdot p \cdot n\right)$$

Woraus dann folgt:

$$A = \frac{a}{100} \cdot [100 + (p \, . \, n)], \text{ oder auch } = a \, . \left(1 + \frac{p \, . \, n}{100}\right) \quad \ldots \quad (5)$$

[1]

Und hiernach für das Anlage-Kapital a, wenn die übrigen Größen gegeben sind:

$$a = \frac{A \, . \, 100}{100 + (p \, . \, n)}, \text{ oder auch } = \frac{A}{1 + \frac{p \, . \, n}{100}} \text{ — Diskontierung —} \quad (6)$$

Mit jeder dieser Gleichungen (5 und 6) lassen sich aber, wenn A, a und n oder p bekannt, auch die Größen von p oder von n bestimmen. So ergibt sich beispielsweise aus Formel 5:

---

[1] Diesen einfachen Ausdruck erhält man also:

$$A = a + \left(\frac{a}{100} \cdot p \, . \, n\right) = a + \frac{a \, . \, p \, . \, n}{100} = \frac{a \, . \, 100}{100} + \frac{a \, . \, p \, . \, n}{100} = a \, . \, \frac{100 + (p \, . \, n)}{100}$$
$$= \frac{a}{100} \cdot [100 + (p \, . \, n)] = a \, . \left(1 + \frac{p \, . \, n}{100}\right)$$

$$p = \frac{A - a}{\frac{a}{100} \cdot n}$$[1], und analog: . . . . (7)

$$n = \frac{A - a}{\frac{a}{100} \cdot p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Aufgaben.

(Formel 5.)

11. Wenn ein Kapital von 2 360 Mark zu $4^1/_4$ Prozent ausgeliehen ist: Bis auf welchen Betrag wird dasselbe durch Zuschlag der einfachen Zinsen nach 5 Jahren angewachsen sein?

A. $A = \frac{2\,360}{100} \times [100 + (4{,}25 \times 5)] = 23{,}60 \times (100 + 21{,}25)$

$= 23{,}60 \times 121{,}25 =$ **2 861,50** Mark.

12. Ein Landwirt bleibt bei einem Ankauf von Hilfsdünger mit der Begleichung einer Schuld von 870 Mark im Rückstande, für welche er vertragsmäßig 5 Prozent Verzugszinsen zu entrichten hat. Wie hoch beläuft sich die Forderung des Lieferanten, wenn die Abzahlung nach $^3/_4$ Jahren geschieht?

A. $A = \frac{870}{100} \times [100 + (5 \times 0{,}75)] = 8{,}70 \times (100 + 3{,}75)$

$= 8{,}70 \times 103{,}75 =$ **902,62** Mark.

(Formel 6.)

13. Welchen gegenwärtigen Wert haben für einen Darlehnsgeber 12 000 Mark, die er bei einer Anlage zu 3 Prozent bei Anrechnung einfacher Zinsen nach 11 Jahren erhalten könnte?

A. $a = \frac{12\,000 \times 100}{100 + (3 \times 11)} = \frac{1\,200\,000}{133} =$ **9 022,56** Mark.

14. Wird ein ohne Zinsen zahlbarer Betrag, z. B. eines auf 2 250 Mark lautenden Wechsels, 87 Tage vor der Verfallzeit unter der Voraussetzung

---

[1] Zu dieser für die Rechnung bequemsten Formel gelangt man, wie folgt:

$$A = \frac{a}{100} \cdot [100 + (p \cdot n)]$$

$$\frac{a}{100} \cdot 100 + \frac{a}{100} \cdot (p \cdot n) = A$$

$$a + \frac{a}{100} \cdot (p \cdot n) = A$$

$$\frac{a}{100} \cdot (p \cdot n) = A - a$$

$$p \cdot n = \frac{A - a}{\frac{a}{100}}$$

$$p = \frac{A - a}{\frac{a}{100} \cdot n}$$

eines Abzuges von $4^1/_2$ Prozent p. Jahr übernommen bezw. eingelöst: Wie hoch berechnet sich dann der Abzug (Diskont)?

A. $$A - a = 2\,250 - \frac{2\,250 \times 36\,000}{36\,000 + (4{,}5 \times 87)} = 2\,250 - \frac{810\,000}{363{,}915}$$
$$= 2\,250 - 2\,225{,}79 = \mathbf{24{,}21} \text{ Mark},$$

oder auch: $$a = \frac{2\,250}{1 + \frac{4{,}5 \times 87}{36\,000}} = \frac{2\,250}{1 + \frac{3{,}915}{360}} = \frac{2\,250}{1{,}010875}$$
$$= \mathbf{2\,225{,}79} \text{ Mark (Diskontierter Wert).}$$

Anmerkung. Im bankgeschäftlichen Verkehr wird häufig die Zinsformel 1 (Aufgabe 3) auch zur Berechnung des Diskont-Abzuges benutzt Demgemäß multipliziert man das Kapital mit der Zahl der für die Dauer der Verzinsung angegebenen Zeiteinheiten und dividiert man das also erhaltene Produkt — die sog. Zinszahl oder Zinsnummer — durch den Quotienten aus der Division von 100 (bezw. 100 × 12 oder 100 × 360) durch den Zinsfuß. Auf diese allerdings einfache Weise ergibt sich — beispielsweise bezogen auf Zinstage (t) —: $z = \frac{a \cdot t}{\frac{36\,000}{p}}$.

Im Gesichtspunkte der Diskontierung kann indessen diese Praxis, weil sie eben die Zinsen von dem benannten, nicht aber von dem barwertigen Kapitale berechnet, nur dann zu einem einigermaßen zutreffenden Ergebnisse führen, wenn es sich um engere Zeitfristen, mäßige Zinsfüße und nicht hohe Kapitalbeträge handelt. Im vorliegenden Falle würde die Rechnung (nach vorheriger Division von Zähler und Nenner durch 100) lauten:

$$\text{Zinszahl} = 22{,}50 \times 87 = \quad \ldots \quad 1\,957{,}50$$
$$\text{Divisor} = \frac{360}{4{,}5} = \quad \ldots\ldots \quad 80$$
$$\text{Betrag des Diskont-Abzuges:} \quad \frac{1\,957{,}50}{80} = \mathbf{24{,}47} \text{ Mark.}$$

Die Differenz von 24,47 und 24,21 (s. o.) = 0,26 Mark entspricht aber genau dem Zins-Unterschiede von dem benannten und dem barwertigen Kapital im Betrage von 24,21 Mark à 4,5 Prozent für 87 Tage.

15. Ein des Kredites bedürftiger Unternehmer gedenkt auf eine Darlehns-Offerte einzugehen, gemäß welcher er das Kapital samt angelaufenen $4^1/_4$ prozentigen Zinsen nach 7 Jahren in dem an diesem Zeitpunkte ihm voraussichtlich zur freien Verfügung stehenden Betrage von 2 500 Mark zurückzuerstatten hat. Wie groß wird das Anleihe-Kapital sein, welches er hiernach aufnehmen kann?

A. $$a = \frac{2\,500 \times 100}{100 + (4{,}25 \times 7)} = \frac{250\,000}{129{,}75} = \mathbf{1\,926{,}78} \text{ Mark.}$$

(Formel 7.)

16. Ein verzinslich ausstehendes Kapital von 1 225 Mark erreichte nach 12 Jahren mit dem Zuschlage der Zinsen den Betrag von 1 776,25 Mark. Zu welchem Zinsfuße war dasselbe angelegt?

A. $$p = \frac{1\,776{,}25 - 1\,225}{\frac{1\,225}{100} \times 12} = \frac{551{,}25}{12{,}25 \times 12} = \frac{551{,}25}{147} = \mathbf{3{,}75} \text{ Prozent.}$$

17. Der Besitzer eines Kapitales von 5 000 Mark möchte dasselbe derart auf Zinsen anlegen, daß dasselbe innerhalb 8 Jahren inkl. Zinsen

bis auf die Summe von 6 700 Mark anwächst. Wieviel Zinsprozente müßten alsdann beansprucht werden?

A. $p = \frac{6\,700 - 5\,000}{\frac{5\,000}{100} \times 8} = \frac{1\,700}{50 \times 8} = \frac{1\,700}{400} = \mathbf{4{,}25}$ Prozent.

(Formel 8.)

18. Nach wieviel Jahren erreichte ein zu $3^3/_4$ Prozent angelegtes Kapital von 380 Mark durch Zuschlag der Zinserträge die Summe von 437 Mark?

A. $n = \frac{437 - 380}{\frac{380}{100} \times 3{,}75} = \frac{57}{3{,}80 \times 3{,}75} = \frac{57}{14{,}25} = \mathbf{4}$ Jahre.

19. Ein Kapital von 4 100 Mark war mit den von ihm bezogenen $3^1/_2$ prozentigen Zinsen auf die Summe von 5 391,50 Mark angewachsen. Während wie vieler Jahre war dasselbe zinstragend angelegt?

A. $n = \frac{5\,391{,}50 - 4\,100}{\frac{4\,100}{100} \times 3{,}5} = \frac{1\,291{,}50}{41 \times 3{,}5} = \frac{1\,291{,}50}{143{,}5} = \mathbf{9}$ Jahre.

20. Der Inhaber eines gewerblichen Unternehmens empfängt bei dessen Einrichtung ein zu 4 Prozent verzinsliches Darlehen von 3 170 Mark unter dem Vorbehalte, daß ihm die Zinsen von demselben gestundet werden und die Rückzahlung des Guthabens dann erfolgen soll, wenn dieses samt den angelaufenen einfachen Zinsen den Betrag von 4 500 Mark erreicht hat. Nach wieviel Jahren wird dieser Fall eintreten?

A. $n = \frac{4\,500 - 3\,170}{\frac{3\,170}{100} \times 4} = \frac{1\,330}{31{,}70 \times 4} = \frac{1\,330}{126{,}80} = \mathbf{10{,}5}$ Jahre (rund).

Dritte Reihe.

Den vorliegenden Aufgaben lassen sich zweckdienlich noch einige Beispiele angliedern, welche die Fälle zeitlich regelmäßig in gleichen Beträgen mit ihren Zinsen wiederkehrender Kapitalzahlungen betreffen. Vorkommnisse dieser Art können auf einfachem Wege durch Heranziehung der Lehre von den arithmetischen Progressionen behandelt werden. Unter diesen versteht man Zahlenreihen, in welchen die Subtraktion je zweier aufeinander folgender Glieder stets die gleiche Differenz ergibt. Solche Progressionen sind entweder steigende oder fallende, je nachdem die Glieder in ihrer Reihenfolge immer größer oder kleiner werden.

So bilden z. B. steigende Progressionen die Reihen:

3, 7, 11, 15, 19, 23, usw.

1, 8, 15, 22, 29, 36, usw.

Dagegen fallende Progressionen die Reihen:

30, 26, 22, 18, 14, 10, usw.

13, 8, 3, −2, −7, −12, usw.

Gemeinüblich bezeichnet man das erste Glied mit a, die Differenz je zweier aufeinander folgender Glieder mit d, das letzte Glied mit t, die

Gesamtzahl der Glieder mit n, und die Summe aller Glieder mit s. Die zur Anwendung gelangenden Formeln, nach welchen jede dieser 5 Größen dann berechnet werden kann, wenn von ihnen nur 3 in Zahlen angegeben sind, lauten:

$$s = (a + t) \cdot \frac{n}{2}; \qquad (9)$$

$$t = a + (n - 1) . d, \text{ oder auch} = \frac{2s}{n} - a; \qquad (10)$$

$$a = t - (n - 1) . d, \text{ oder auch} = \frac{2s}{n} - t, \text{ oder auch} = \frac{s}{n} - \frac{(n-1) . d}{2} \qquad (11)$$

$$d = \frac{t - a}{n - 1}, \text{ oder auch} = \frac{\left(\frac{s}{n} - a\right) . 2}{n - 1}; \qquad (12)$$

$$n = \frac{t - a}{d} + 1, \text{ oder auch} = \frac{2s}{a + t} \qquad (13)$$

Aufgaben.

21. Es bezieht jemand ein in jährlichen Beträgen von 75 Mark bestehendes und nach 6 Jahren mit Zinsen abzuzahlendes Anleihen. Auf welche Summe werden diese Bezüge mit Ablauf der Leihfrist angewachsen sein, wenn von dem Kapitale zugleich 4 Prozent einfache Zinsen beansprucht werden?

A. Das Anfangsglied (a) der Reihe ist = 75, die Differenz (d) der einzelnen Glieder derselben = 75 × 1,04 = 78, und die Zahl der Glieder (n) = 7. Somit hat man für t (Formel 10):

$$75 + (7 - 1) \times 78 = 75 + 468 = \mathbf{543} \text{ Mark.}$$

22. Behufs Durchführung von Grundverbesserungen wird einem Pächter seitens des Gutsbesitzers ein Vorschuß von 1 500 Mark unter der Bedingung gewährt, daß das Kapital innerhalb 12 Jahren in gleichen Beträgen nebst zugehörigen einfachen Zinsen von 3 Prozent zurückerstattet werde. — Fragen: 1. Um welchen Betrag vermindern sich die Raten von Jahr zu Jahr bis zur völligen Abtragung der Schuld? 2. Welche Summe erreicht die Abzahlung (einschließlich der Zinsen) im ganzen?

A. 1. Die erste Rate (a) beläuft sich auf $\frac{1\,500}{12} + (1\,500 \times 0{,}03)$ = 125 + 45 = 170 Mark. Die letzte Rate (t) beträgt nur noch 125 + (125 × 0,03) = 125 + 3,75 = 128,75 Mark. Die Differenz der Glieder der (fallenden) Reihe, also der Grad der jährlichen Abminderung (d) der Raten berechnet sich somit (Formel 12) auf:

$$\frac{128{,}75 - 170}{12 - 1} = \frac{-41{,}25}{11} = -\mathbf{3{,}75} \text{ Mark.}$$

2. Die Summe (s) aller Zahlungen ist:

$$(170 + 128{,}75) \times \frac{12}{2} = 298{,}75 \times 6 = \mathbf{1\,792{,}50} \text{ Mark (Formel 9).}$$

Dieselbe umfaßt:

Das Kapital: 125 × 12 = ... 1 500,00 Mark

Dazu die Zinsen (s. Formel 9): (45 + 3,75) × 6 = 48,75 × 6 = 292,50 „

Zusammen: 1 792,50 Mark.

23. Um eine Summe von 875 Mark aufzusparen, sollen jährlich 60 Mark zurückgelegt werden. Wenn nun von diesen Beträgen regelmäßig ein Zins von $4^1/_2$ Prozent zu beziehen ist: Nach wieviel Jahren müssen dann dieselben bei Berechnung einfacher Zinsen auf jene Summe angewachsen sein?

A. Gesucht ist n. Die Rechnung ergibt somit (Formel 13):

$$\frac{875 - 60}{60 + (60 \times 0{,}045)} + 1 = \frac{815}{60 \times 1{,}045} + 1 = \frac{815}{62{,}70} + 1 = \mathbf{14}\text{ Jahre (rund).}$$

24. Von seinen Ersparnissen gedenkt R. einmalig 600 Mark und dann dazu, mit Ablauf von einem Jahre beginnend, regelmäßig alljährlich den Betrag von 50 Mark zinstragend anzulegen. Wieviel wird hiernach die Summe aller Einzahlungen bei Zugrundelegung einfacher Zinsen zu $3^1/_2$ Prozent nach Ablauf von 10 Jahren betragen?

A. Die Stamm-Einlage von 600 Mark trägt alljährlich: $6 \times 3{,}5 = 21$ Mark Zinsen. Dazu kommen von den laufenden Einzahlungen alle Jahre: $0{,}5 \times 3{,}5 = 1{,}75$ Mark. Somit ist a am Beginne der jährlichen Einzahlungen $= 621 + 50 = 671$, und in deren Reihenfolge: $d = 50 + 21 + 1{,}75 = 72{,}75$ Mark.

Es berechnen sich also für den Endwert t (Formel 10):

$$671 + (9 \times 72{,}75) = 671 + 654{,}75 = \mathbf{1\,325{,}75}\text{ Mark.}$$

25. Der Besitzer eines Kapitales von 190 Mark will dasselbe in Verbindung mit regelmäßig alljährlich zu leistenden gleichen Nachzahlungen auf Zinsen anlegen, um nach 5 Jahren über eine Summe von 950 Mark verfügen zu können. Wenn nun die Ratenzahlungen mit Ablauf des ersten Jahres nach der einmaligen Kapital-Einlage beginnen, und für die gesamten Beträge einfache Zinsen von $4^1/_2$ Prozent in Anrechnung kommen: Wie hoch wird sich dann je eine Ratenzahlung belaufen müssen?

A. Die Stamm-Einlage erreicht in 6 Jahren, also nach 5maliger Verzinsung (Formel 5, oben) den Betrag von $190 \times \left(1 + \frac{4{,}5 \times 5}{100}\right)$ $= 190 \times 1{,}225 = 232{,}75$ Mark.

An dem ins Auge gefaßten Endbetrage fehlen also noch: $950{,}00 - 232{,}75 = 717{,}25$ Mark.

Der diesem Betrage entsprechende Anfangswert (Betrag einer Rate) berechnet sich, indem man vorerst die Größe von d ermittelt. Nach der Formel No. 11 hätte man:

$$a = 717{,}25 - (5 - 1) \times d = 717{,}25 - 4\,d.$$

Nun ist $d = a + 0{,}045 \,.\, a = 1{,}045\,a$, und $4\,d = 4{,}18\,a$.

Daher aber: $a = 717{,}25 - 4{,}18\,a$, und $5{,}18\,a = 717{,}25$.

Folglich: $a = \frac{717{,}25}{5{,}18} = \mathbf{138{,}47}$ Mark.

Zweiter Abschnitt.

Die Zinseszinsrechnung.

A. Allgemeines.

Werden die am Schlusse je eines bestimmten Zeitraumes fälligen Zinsen eines Kapitales sogleich nach ihrem Bezuge als neues Kapital zinstragend angelegt oder dem ursprünglichen Kapitale derart zugeschlagen, daß sie mit diesem weiter auf Zinsen stehen, so hat man es mit einer Anlage des Kapitales auf Zinseszinsen zu tun. Setzt sich die Verwendung des Kapitales in gleicher Weise über weitere Zeitabschnitte fort, so muß der ursprüngliche Betrag desselben zu einer immer größeren Summe anwachsen. Um diesen Hergang in jeder Richtung zahlenmäßig zu verfolgen, bedarf es eines besonderen Rechnungsverfahrens, welches Zinseszinsrechnung oder zusammengesetzte Zinsrechnung genannt wird.

Aufgaben der Zinseszins- und auf erweiterter Grundlage auch der Rentenrechnung kommen im Leben überaus häufig vor. Der äußeren Wortbezeichnung gemäß bestehen dieselben vornehmlich in dem Nachweis der Größen, welche den Stand und die Bewegung von Geldgut-Kapitalien bei fortgesetzt wirtschaftlicher Anlage und Verwendung derselben bedingen. In dieser Umschreibung begegnet man ihnen nicht allein im Getriebe des Leih-, Miet- und Tauschverkehrs, sondern auch im Rahmen abgeschlossener Unternehmungen. Und begreiflich können sie sich gleichwie auf Geldkapitalien, so auf andere Vermögensgüter erstrecken, welche überhaupt Kapitaleigenschaft besitzen und mit dem Geldwertmaßstabe faßbar sind.

Analog den Wertbewegungen zinstragend angelegter Kapitalien kommen bekanntlich vielfach auch Erscheinungen regelmäßiger naturaler Zunahme bezw. Abnahme im Bereiche der Pflanzen- und Tierwelt vor. Soweit derartige Veränderungen zahlenmäßig faßbar sind, und sich an ihre kalkulatorische Behandlung ein privat- oder allgemein-wirtschaftliches Interesse knüpft, kann dieser auch die Zinseszins- sowie die Rentenrechnung dienstbar gemacht werden. (Erträge aus der Forstwirtschaft und der Obstkultur. Bewegungen in dem Stande der Bevölkerung. Veränderungen im Haustierbestand usw.) An Stelle des Geldwertes tritt dann die naturale Größe, und an diejenige des Zinsfußes der Ausdruck für die prozentische Vermehrung bezw. Verminderung. Selbstverständlich können aber auch Fälle

vorkommen, in welchen mit der grundlegenden Ermittlung der naturalen Beträge diejenige der Geldwerte verbunden wird.

Zinseszins- und Rentenrechnungen werden angewendet im Gebiete der öffentlichen Verwaltung (Finanzhaushalt des Staates und seiner Unterverbände — Ablösungsverfahren — Statistik) und der Wirksamkeit der Kredit- und Versicherungsanstalten, wie in denjenigen der gewerblichen Ökonomie, insonderheit des Handels, und nicht zum geringsten des Betriebes der Bodenkultur.

B. Die Anlagen von Kapitalien (Wertgütern i. w. S.) sind entweder einmalige (geschlossene, stationäre), oder die ursprünglichen Beträge derselben werden in der Folge durch gelegentliche (nicht regelmäßige) Zuschüsse oder Abzüge vermehrt oder vermindert.

Das Verfahren.

1. Entwicklung der Formeln.

Wie bei der einfachen, so konkurrieren auch bei der Zinseszinsrechnung zunächst vier Größen, von welchen jede eine bestimmte Funktion der drei übrigen ist. Um die Beziehungen derselben zu einander rechnerisch zu erfassen, bedarf es der Konstruktion je besonderer Gleichungen. Jene Größen sind mit den für sie angenommenen Bezeichnungen:

- a: Das auf Zinseszinsen angelegte Kapital (Ursprünglicher oder Anfangswert des Kapitals. Barwert. Vorwert);
- p: der Zinsfuß (Jahreszins in Prozenten vom Kapital);
- n: die Zeitdauer der Verzinsung in Jahren, und
- A: die Größe des durch den Zuschlag der Zinsen zum Anlage-Kapital angewachsenen Kapitales. Anlage-Kapital + Zinseszinsen. (Künftiger oder End-Wert des Kapitales. Nachwert.)

Eine naheliegende, einfache und leicht verständliche Betrachtungsweise führt zur Feststellung der Funktion von A, welche somit als Ausgangspunkt weiterer Ermittlungen dienen kann.

Ist ein Kapital von 100 Mark zu einem Jahreszinse von p (Zinsfuß in Prozenten) angelegt, so trägt dasselbe in einem Jahre p Mark Zinsen und wird es am Schlusse des Jahres mit Zurechnung der fällig gewordenen Zinsen den Betrag von 100 + p Mark erreichen. Setzt man an Stelle der zweiten Null des Anfangs-Kapitales (100) die Bezeichnung der Zinsprozente p, so erhält man für jenen Endwert den Ausdruck: 10p.

Darnach beläuft sich beispielsweise der Betrag des End-Kapitales, bis zu welchem das Anfangs-Kapital von 100 Mark nach Jahresfrist angewachsen sein wird, bei einem Zinsfuße

von: 2,5 — 3 — 3,75 — 4 — 4,50 — 5 Prozent
auf: 102,5 — 103 — 103,75 — 104 — 104,50 — 105 Mark.

Wird dieses Verhältnis auf eine Geldwert-Einheit von 1 Mark bezogen, so beträgt der Jahreszins nur $\frac{p}{100} = 0{,}0p$ Mark, und erscheint somit ein Endwert von $\frac{100 + p}{100} = \frac{100}{100} + \frac{p}{100} = 1 + \frac{p}{100} = 1 + 0{,}0p = 1{,}0p$.

Und ebenmäßig berechnen sich dann für die genannten Abstufungen der Zinsprozente mit Ablauf eines Jahres die Endwerte

auf: 1,025 — 1,03 — 1,0375 — 1,04 — 1,045 — 1,05 Mark.

Die mit 1,0p bezeichnete Summe, bis auf welche eine Geldwert-Einheit innerhalb eines Jahres durch den Zuschlag von p Zinsprozent anwächst, pflegt man auch den „Zinsfaktor“ zu nennen.

Aus dieser Darlegung ist somit zu ersehen, daß die Größe A, bis auf welche ein auf Zinseszinsen angelegtes Kapital am Schlusse des ersten Jahres anwachsen wird, aus seinem Anfangswert a und dem auf diesen entfallenden Jahreszins $a \cdot \frac{p}{100}$, also aus $a + \left(a \cdot \frac{p}{100}\right)$ bestehen muß. Zieht man aber diesen Ausdruck zusammen, so erhält man die Formel:

$$A = a \, . \left(1 + \frac{p}{100}\right), \text{ oder kürzer:}$$

$$A = a \, . \, 1{,}0p.$$

Wird nun das also angewachsene neue Kapital weiter zinstragend angelegt, so berechnet sich sein um den Zinszuschlag vermehrter Betrag am Ende des zweiten Jahres, indem man einfach die Multiplikation mit $1 + \frac{p}{100}$ bezw. mit 1,0p wiederholt. Man erhält dann die Gleichung:

$$A = a \, . \left(1 + \frac{p}{100}\right) . \left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ oder } a \, . \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2, \text{ oder kürzer:}$$

$$A = a \, . \, 1{,}0p^2.$$

Bei gleich fortgesetzter Anlage ergibt sich folgerichtig die Summe, bis zu welcher das ursprüngliche Kapital am Ende des dritten Jahres angewachsen sein wird, aus der Anwendung der Gleichung:

$$A = a \, . \, 1{,}0p^3.$$

Und wenn man für die Zahl der Jahre, während welcher ein Kapital auf Zinseszinsen steht, die Bezeichnung n einsetzt, so lautet die allgemeine Formel zur Berechnung des Endwertes desselben:

$$A = a \, . \, 1{,}0p^n.$$

Da nun diese Gleichung, welche man als Grundformel betrachten kann, die Beziehungen zwischen den genannten vier Größen zum Ausdruck bringt, so lässet sich aus derselben jede dieser Größen, wenn die übrigen drei gegeben sind, ableiten. Auf diesem Wege ergibt sich folgendes:

$$A = a \, . \, 1{,}0p^n \quad \ldots\ldots\ldots$$

Logarithmisch: $\log. A = \log. a + n \, . \log. 1{,}0p$ . . . . .

I. *Aufgaben 26—35. 62. 64.*

In Worten: Um den Betrag A (Nachwert) zu finden, bis auf welchen ein auf Zinseszinsen angelegtes Kapital a bei einem bestimmten Zinsfuße p in n Jahren anwächst, hat man dieses

mit der nten Potenz des Zinsfaktors $\left(1{,}0p = 1 + \frac{p}{100}\right)$, die man auch den „Vermehrungsfaktor“ nennt, zu multiplizieren. — Übergang des Vorwertes zum Nachwert, oder Prolongation des Vorwertes.

Aus der Formel I resultiert weiter:

$$a = \frac{A}{1{,}0p^n} \quad \text{Logarithmisch:} \quad \log. a = \log. A - n \,.\, \log. 1{,}0p$$

II. *Aufgaben 36—45. 63. 64. 67.*

Dieser Ausdruck besagt: Der Anfangswert a (Vorwert. Barwert) eines während n Jahren bei einem gegebenen Zinsfuße p auf den Betrag von A angewachsenen Kapitales wird ermittelt, indem man diesen durch die nte Potenz des Zinsfaktors (Exponent gleich der Anzahl der Jahre) dividiert. — Zurückführung des Nachwertes auf den Vorwert, oder Diskontierung des Nachwertes.[1])

Und ferner:

$$1{,}0p = \sqrt[n]{\frac{A}{a}} \quad \text{Logarithmisch:} \quad \log. 1{,}0p = \frac{\log. A - \log. a}{n}$$

III. *Aufgaben 46—53.*

Das will heißen: Behufs Feststellung des Zinsfaktors 1,0p $\left(= 1 + \frac{p}{100}\right)$, zu welchem ein Kapital a angelegt werden muß, um in n Jahren auf die Summe von A anzuwachsen, dividiert man den Betrag dieses Nachwertes durch denjenigen des Vorwertes, und zieht man aus dem erhaltenen Quotienten die nte Wurzel. (W-Exponent gleich der Zahl der Jahre.)

Da die Größe von 1,0p aus $1 + \frac{p}{100}$ besteht, so berechnet sich der zugehörige Zinsfuß p, indem man von der gefundenen Wurzel einfach die Zahl 1 in Abzug bringt und die Differenz mit 100 multipliziert.

Was schließlich die unbekannte Größe n betrifft, so ist zu beachten, daß dieselbe als Exponent einer Potenz auftritt, die betreffende Gleichung also eine sogenannte Exponentialgleichung ist. In diesem Falle hat man vorerst die ganze Potenz $1{,}0p^n$ als die unbekannte Größe zu behandeln, diese auszulösen und dann die einzelne unbekannte Größe (n) logarithmisch zu bestimmen. Darnach erhält man:

[1]) Zu dieser Formel gelangt man übrigens auch durch die Betrachtung, daß dem Werte des Zinsfaktors 1,0p ein reciproker Wert $\frac{1}{1{,}0p}$ entsprechen muß, dessen Multiplikation mit dem Betrage des Endwertes des Kapitales denjenigen des Anfangs- oder Barwertes des Kapitales ergibt (Diskontfaktor). Darnach erhält man für die Zeitdauer n der Anlage:

$$a = A \cdot \frac{1}{1{,}0p^n} = \frac{A}{1{,}0p^n}.$$

$$1{,}0p^n = \frac{A}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{Logarithmisch: } n = \frac{\log. A - \log. a}{\log. 1{,}0p} \quad \ldots\ldots\ldots$$

IV. *Aufgaben 54—61. 65. 66. 68.*

Die Anleitung, welche diese Gleichung gibt, lautet also: Die Zahl der Jahre n, während welcher ein Kapital a bei einem gegebenen Zinsfuße p auf einen bestimmten Betrag A anwächst, wird gefunden, wenn man den Logarithmus des Vorwertes von demjenigen des Nachwertes subtrahiert und die Differenz durch den Logarithmus des Zinsfaktors 1,0p $\left(= 1 + \frac{p}{100}\right)$ dividiert.

Sonder-Aufgaben 69—75.

Rechnungswege. Ein Rückblick auf die seitherige Darstellung wird schon überzeugen, daß die Lösung der Aufgaben, welche eine zahlenmäßig rechnerische Umprägung der vorgeführten Gleichungen zum Ziele haben, entweder (Formel IV) vorbehaltlos die Anwendung der Logarithmen erfordert, oder (Formeln I—III), sobald es sich um Potenzen und Wurzeln höherer Grade handelt, ohne die Zuhilfenahme der logarithmischen Rechnung einen enormen Aufwand an Zeit und Mühen verursachen würde. In Anbetracht dessen sind denn auch die nachfolgenden Beispiele ohne Ausnahme direkt auf logarithmischem Wege bearbeitet worden, ein Verfahren, welches, wie gleich hier bemerkt werden soll, sich auch in der anschließenden Rentenrechnung regelmäßig wiederholt. Dabei wurde es aus Gründen der Genauigkeit, welche die Behandlung der in der Mehrzahl der Aufgaben vorkommenden Größenverhältnisse beansprucht, angemessen erachtet, fast durchweg siebenstellige Logarithmen, wie sie u. a. in dem sehr verbreiteten Handbuche von v. Vega enthalten sind, heranzuziehen. Selbstverständlich bleibt es aber dem Rechner überlassen, je nach den vorliegenden Anforderungen sich einer abgekürzten Stellenreihe zu bedienen, wie das auch bei den in den Schluß-Abschnitt dieses Buches aufgenommenen Spezial-Aufgaben aus dem Gebiete der Obst- und der Forstkultur geschehen ist.

In der Absicht, das bei den vorgeführten Beispielen angewendete Verfahren durchaus übersichtlich zu gestalten und die Orientierung über den Rechnungsgang zu erleichtern, ist überall, wo die Art der Fragestellung dazu aufforderte, die Anordnung von 2 bezw. 3 nebeneinander stehenden Kolumnen getroffen worden. Von diesen enthält die erste (links befindliche) ausnahmslos die der Rechnung zugrunde zu legenden siebenstelligen logarithmischen Größen, welche von jedem in dem Gebrauche der Logarithmen-Tafeln auch nur einigermaßen geübten Interessenten leicht und schnell ermittelt werden können. Vorgängige Erhebung. Die Ausführungen in der zweiten und bezw. auch der dritten Kolumne geben dagegen das eigentliche Rechnungsbild, in welchem die Stellung und Behandlung der konkurrierenden Größen sofort erkennbar werden.

Es sind nun aber seither schon besondere Tabellen konstruiert und in der Literatur verbreitet worden, welche die Bestimmung tragen, in ge-

eigneten Fällen das Rechnungsverfahren in dem Sinne zu erleichtern, daß mit ihrer Beihilfe von der logarithmischen Behandlung der Aufgaben Umgang genommen und somit auch ein abgekürzter Weg der Ermittlung der in Frage stehenden Zahlengrößen eingeschlagen werden kann. Dem nächstliegenden Zwecke dienen zwei Hilfstafeln, in welchen einerseits die Nachwerte und andererseits die Vorwerte einer Einheit für verschiedene Zinsfuß-Ansätze und für jede Reihe von Jahren (bis zu 100) verzeichnet sind, so daß die betreffenden Wertgrößen aus den Tabellen unmittelbar entnommen werden können. Der Vorsprung, welchen die Benutzung der also dargebotenen Ziffern ermöglicht, beruht hiernach darin, daß in diesen „vorweg“ die logarithmisch ermittelten Potenzen der Zinsfaktoren $(1{,}0p^n)$ bezw. auch die Verhältnisse derselben zu einer Einheit $\left(\frac{1}{1{,}0p^n}\right)$ ausgedrückt sind, so daß es in concreto nur noch einer Multiplikation mit der gegebenen Größe bedarf.

In der Erwartung, daß es dem Leser nicht unwillkommen sein dürfte, bei passender Gelegenheit von einer solchen Erleichterung Gebrauch machen zu können, sind der vorliegenden Arbeit anhangsweise 2 derartige Tafeln beigegeben worden. Der Inhalt derselben bildet einen Auszug aus den umfangreichen Tabellen von S. Spitzer.[1]) Dabei wurden die indizierten Größen bis auf die 7 te Stelle eingeengt.[2]) Mit Ausnahme mehrerer Fälle, in welchen die Zinstermine sich Teilabschnitten des Jahres anschließen, und daher auch Spaltungen des Jahreszinsfußes stattfinden, ebenso des Vorkommens außergewöhnlicher Steigerung der Zinsansprüche wurden nahezu alle Prozentsätze, welche die nachfolgende Aufgaben-Sammlung enthält, in die Übersichten aufgenommen.

Im besonderen ist noch folgendes hervorzuheben:

Die Tafel I, Prolongierungstafel, zeigt den Betrag an, bis auf welchen eine zu p Prozent auf Zinseszinsen angelegte Geldwert-Einheit (z. B. 1 Mark) bis zum Ablauf von n Jahren anwächst. In diesem Betrage kommen somit die Zinsfaktoren 1,0p und deren Potenzen $1{,}0p^n$ zum Ausdruck. — End- oder Nachwert. — Um die Summe zu ermitteln, bis auf welche ein bestimmtes, zu p Prozent auf Zinseszinsen angelegtes Kapital in n Jahren anwächst, hat man dasselbe einfach mit dem zugehörigen, in der Tafel enthaltenen Faktor $(1{,}0p^n)$ zu multiplizieren.

Aus der Tafel II, Diskontierungstafel, ergibt sich, welcher Betrag zu p Prozent auf Zinseszinsen anzulegen ist, damit er nach n Jahren den Wert einer Geld-Einheit (z. B. 1 Mark) erreicht, oder welchen gegenwärtigen Wert eine zu p Prozent ausstehende und nach n Jahren fällige Wert-Einheit besitzt. — Bar- oder Vorwert. — Derselbe bedeutet den Diskont-Faktor $\left(\frac{1}{1{,}0p^n}\right)$ welcher der reciproke Wert des Prolon-

[1]) S. Spitzer: Tabellen für die Zinseszins- und Rentenrechnung mit Anwendung derselben auf Berechnung von Anlehen, Konstruktion von Amortisationsplänen usw. 3. Aufl. Wien 1886.

[2]) Bei der Ausschaltung der achten Stellen sind dann, wenn dieselben über die Ziffer 5 hinausgreifen, die vorausgehenden siebenten Stellen um die Zahl 1 erhöht worden.

gierungs-Faktors ist. — Soll der Barwert eines während n Jahren zu p Prozent auf Zinseszinsen ausstehenden Kapitales bestimmt werden, so multipliziert man dessen Betrag mit dem betreffenden, in der Tafel verzeichneten Faktor $\frac{1}{1{,}0p^n}$.

Vergleicht man die Zahlen, welche die Tafel für $1{,}0p^n$ angibt, mit den numeris der betreffenden 7stelligen Logarithmen, so wird man häufig finden, daß beide Größen nicht bis auf die letzten Stellen genau übereinstimmen. Derartige Fälle sind darauf zurückzuführen, daß den Angaben der Tafeln die Briggsschen 10stelligen Logarithmen zugrunde gelegt wurden. Die erwähnten Differenzen sind aber so unbedeutend, daß sie das Endergebnis der Rechnung nicht erheblich beeinflussen, es daher im praktischen Gesichtspunkte auch kaum und nur ausnahmsweise notwendig erscheint, ihretwillen bei Anwendung des logarithmischen Verfahrens mit 10stelligen Zahlen zu operieren.

Hinsichtlich des Gebrauches der beiden Hilfstafeln ist noch daran zu erinnern, daß dieselben mit Erfolg zunächst nur der Ermittlung der Endwerte (A) und der Vorwerte (a), sodann aber auch in der Rentenrechnung mittelbar der Werte von Annuitäten (r) dienstbar gemacht werden können. Wollte man deren Benutzung auch auf den Nachweis der Zinsprozente (p) und denjenigen der Zeitdauer der Anlagen (n) ausdehnen, so müßte man, wenn der Quotient A : a nicht gerade mit einer Zahl für n und bezw. p in den Kolumnen der Tabelle zusammentrifft, behufs Feststellung des Ergebnisses das sehr umständliche Verfahren einer Interpolation anwenden. Von einer Kürzung des Weges wäre dann allerdings nicht mehr die Rede.

Liegt der Fall vor, daß die gegebene Zahl der Jahre (n) über die in den Tafeln enthaltene Höchstgrenze von 100 hinausgreift, dann hat man jene einfach in zwei Zahlen, deren Summe ihr gleich ist, zu zerlegen und die denselben zugehörigen, in den Tafeln verzeichneten beiden Größen miteinander zu multiplizieren.

Wie bereits angedeutet wurde, sind die Zahlen der Diskontierungstafel (II) ohne weiteres als Multiplikations-Faktoren zu benutzen. Es bleibt indessen dem Rechner gegebenen Falles unbenommen, an deren Stelle die reciproke Größe der Tafel I heranzuziehen und dann mit dieser die allerdings meist minder bequeme Division auszuführen. — Folgt im Falle der Diskontierung der Potenz des Zinsfaktors der Subtrahend 1, und will man an der Multiplikation festhalten, so vermindert man die betreffende Zahl der Tabelle I um jene Ziffer und dividiert man die Einheit (1) durch die erhaltene Differenz. Der Quotient ist dann der zu benutzende Multiplikations-Faktor.

Für die Beantwortung der Frage endlich, inwieweit der Gebrauch der Hilfstafeln gegenüber der logarithmischen Rechnung zu einer erheblichen Arbeitsersparnis führt, dürften folgende Gesichtspunkte maßgebend sein:

Wer sich mit dem logarithmischen Verfahren vertraut gemacht und in ihm Übung erlangt hat, wird sich schon auf Grund seiner Erfahrungen zu der Auffassung bekennen, daß demselben denn doch im allgemeinen der Vorzug einer gewissen Einfachheit und Übersichtlichkeit innewohnt.

Und zwar aus dem Grunde, weil in dessen Anwendung die Multiplikationen durch Additionen und die Divisionen durch Subtraktionen ersetzt, diese Erleichterungen jedoch nur zum Teil durch den Aufwand an Zeit und Mühen aufgewogen werden, deren es bedarf, um die erforderlichen Logarithmen aus einer Tafel auszuziehen und mit deren Hilfe auch für jeden Logarithmus die ihm zugehörige Zahl (numerus) festzustellen. Kein Zweifel aber, daß sich derartige Rechnungen, ob in ihnen auch je längere Reihen von Zahlen auf der Bildfläche erscheinen, immer in einem ruhigen, sicheren Geleise bewegen. Diese offenbar begünstigende Seite der logarithmischen Rechnung verdient immer auch dann gewürdigt zu werden, wenn die Anwendung der Hilfstafeln an sich noch geeignet und akzeptabel zu erachten ist, dieweil hier doch die Umständlichkeiten und Schwerfälligkeiten berücksichtigt werden müssen, welche mit der Multiplikation und bezw. Division vielstelliger Größen verbunden sind. Wenn es sich dagegen um Aufgaben handelt, in welchen derartige Operationen je nur vereinzelt auftauchen, oder deren Lösung nach Maßgabe der vorliegenden Anforderungen gar mit einer geringeren Anzahl von Dezimalstellen geschehen kann, dann erscheint allerdings die Benutzung der Hilfstafeln ganz vorbehaltlos in einem weit vorteilhafteren Lichte. Und begreiflich wird der Rechner dieser Anschauung immer um so eher zuneigen, je weniger ihm Gewandtheit und Sicherheit in der Handhabung der Logarithmen zur Seite stehen.

Zum Zwecke einer näheren Auskunft über die praktische Seite der Anwendung der angeschlossenen Hilfstafeln sind in den nachfolgenden Abschnitten von Strecke zu Strecke in Anknüpfung an verschiedene Aufgaben — mit Einbeziehung auch solcher über die Zeit- und die ewigen Renten — Vergleichs-Rechnungen eingeschaltet worden, aus welchen ohne weiteres ersehen werden kann, unter welchen Voraussetzungen durch Rückgriff auf jene Tabellen eine Erleichterung des Verfahrens zu erreichen ist.

---

2. Rechnungs-Aufgaben.

a) Fälle einmaliger (stationärer) Anlagen (26—61).

Erste Gruppe.

(Gegeben: a, p und n. Gesucht: A. Anwendung der Formel I: $A = a \cdot 1{,}0p^n$).

26. Es hat Jemand bei einer Bank 4 500 Mark zu $3\frac{1}{2}$ Prozent Zins und Zinseszinsen angelegt. Auf welchen Betrag wird das Kapital nach 15 Jahren angewachsen sein?

A. $A = 4\,500 \times 1{,}035^{15}$

log. 1,035 = 0,0149403	log. 4 500 = 3,6532125
× 15	+ log. $1{,}035^{15}$ = 0,2241045
747015	log. A = 3,8773170
149403	num. = 7 539,06
log. $1{,}035^{15}$ = 0,2241045	A = **7 539,06** Mark.

Mit Hilfe der Tafel I:

$A = 4\,500 \times 1{,}6753488 =$ **7 539,06** Mark.

27. Ein Waldholz-Bestand ist zu 10 618 Festmeter veranschlagt worden. Wenn nun auf Grund örtlicher Erfahrungen angenommen werden darf, daß der jährliche naturale Holzzuwachs nach Maßgabe der Standortsverhältnisse $1^3/_4$ Prozent beträgt: Auf wie viele fm. wird sich dann der Bestand nach weiteren 25 Jahren belaufen?

A. $A = 10\,618 \times 1{,}0175^{25}$

$$\begin{array}{rl} \log. 1{,}0175 = & 0{,}0075344 \\ & \times 25 \\ \hline & 376720 \\ & 150688 \\ \hline \log. 1{,}0175^{25} = & 0{,}1883600 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log. 10\,618 = & 4{,}0260427 \\ + \log. 1{,}0175^{25} = & 0{,}1883600 \\ \hline \log. A = & 4{,}2144027 \\ \text{num.} = & 16\,383{,}35 \\ A = & \mathbf{16\,383{,}35} \text{ fm.} \end{array}$$

28. Zum Zwecke der Aufforstung eines Grundstücks bedurfte es p. ha Flächeninhalt eines einmaligen Kulturaufwandes von 143 Mark. Bis zu welchem Betrage wachsen diese Kosten mit Anrechnung der Zinsen und Zinseszinsen von 3 Prozent bis zum Ende einer Umtriebszeit von 80 Jahren an?

A. $A = 143 \times 1{,}03^{80}$

$$\begin{array}{rl} \log. 1{,}03 = & 0{,}0128372 \\ & \times 80 \\ \hline \log. 1{,}03^{80} = & 1{,}0269760 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log. 143 = & 2{,}1553360 \\ + \log. 1{,}03^{80} = & 1{,}0269760 \\ \hline \log. A = & 3{,}1823120 \\ \text{num.} = & 1\,521{,}64 \\ A = & \mathbf{1\,521{,}64} \text{ Mark.} \end{array}$$

29. Die Wohnbevölkerung eines Gebietes umfaßt zurzeit 3 312 550 Personen. Wenn nun die künftige jährliche Zunahme derselben in dem seither beobachteten Verhältnisse von 0,85 Prozent fortschreitet: Welche Zahl wird der Stand der Bevölkerung nach 50 Jahren erreicht haben?

A. $A = 3\,312\,550 \times 1{,}0085^{50}$

$$\begin{array}{rl} \log. 1{,}0085 = & 0{,}0036759 \\ & \times 50 \\ \hline \log. 1{,}0085^{50} = & 0{,}1837950 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log. 3\,312\,550 = & 6{,}5201625 \\ + \log. 1{,}0085^{50} = & 0{,}1837950 \\ \hline \log. A = & 6{,}7039575 \\ \text{num.} = & 5\,057\,751 \\ A = & \mathbf{5\,057\,751} \text{ Bewohner.} \end{array}$$

30. Ein Hochbau, z. B. einer Scheune, erfordert in massiver Ausführung, deren Bestandesdauer auf 180 Jahre veranschlagt ist, einen Aufwand von 15 000 Mark, indessen die Herstellung eines Fachwerkbau's gleichen Umfanges und im übrigen gleicher Einrichtung, der aber nur 60 Jahre vorhält, 9 000 Mark Kosten verursacht. Stellt man sich nun vor, daß die Benutzung des Gebäudes mit dem ganzen Kapitalbetrage, einschließlich der von solchem beanspruchten Zinsen und Zinseszinsen, belastet ist, so entsteht die Frage: Auf welche Summe würde der Bauaufwand, bezogen auf die gleiche Dauerzeit, in jedem dieser Fälle bei Anrechnung von 3 Prozent Zinsen anwachsen? [1])

---

[1]) Den Ergebnissen der Rechnung wird man allerdings nicht mehr als die Bedeutung von Verhältnis-Werten beilegen können. Indessen verdienen dieselben auch schon in diesem Gesichtspunkte seitens der Praxis beachtet zu werden. Im

A.

a) Massivbau.

$$A = 15\,000 \times 1{,}03^{180}$$

log. 1,03 = 0,0128372	log. 15 000 = 4,1760913
× 180	+ log. $1{,}03^{180}$ = 2,3106960
10269760	log. A = 6,4867873
128372	num. = 3 067 519
log. $1{,}03^{180}$ = 2,3106960	A = ... **3 067 519** Mark.

b) Fachwerkbau.

Erster Bau (180 Jahre).

$$A_{,} = 9\,000 \times 1{,}03^{180}$$

log. 1,03 = 0,0128372	log. 9 000 = 3,9542425
× 180	+ log. $1{,}03^{180}$ = 2,3106960
10269760	log. $A_{,}$ = 6,2649385
128372	num. = 1 840 511
log. $1{,}03^{180}$ = 2,3106960	$A_{,}$ = 1 840 511 M.

Zweiter Bau (120 Jahre).

$$A_{,,} = 9\,000 \times 1{,}03^{120}$$

log. 1,03 = 0,0128372	log. 9 000 = 3,9542425
× 120	+ log. $1{,}03^{120}$ = 1,5404640
2567440	log. $A_{,,}$ = 5,4947065
128372	num. = 312 397
log. $1{,}03^{120}$ = 1,5404640	$A_{,,}$ = 312 397 M.

Dritter Bau (60 Jahre).

$$A_{,,,} = 9\,000 \times 1{,}03^{60}$$

log. 1,03 = 0,0128372	log. 9 000 = 3,9542425
× 60	+ log. $1{,}03^{60}$ = 0,7702320
log. $1{,}03^{60}$ = 0,7702320	log. $A_{,,,}$ = 4,7244745
	num. = 53 024
	$A_{,,,}$ = 53 024 M.

Zusammen: **2 205 932** Mark.

Der Fachwerkbau würde also den Betrieb um: **861 587** Mark weniger, und mit rund nur 72 Prozent (3067 : 2206 = 100 : x) des Kapitalaufwandes beschweren, welchen der Massivbau erfordert.

31. Zwei Landwirte M. und F. sind in der Lage, je eine Scheune gleichen Umfanges und sonst gleicher Einrichtung bauen zu müssen.

übrigen ist eine abschließende Würdigung der hervortretenden Unterschiede erst dann möglich, wenn auch die ungleiche Belastung der Anlagen mit Reparaturkosten und Versicherungsprämien in Rechnung gezogen wird. Vgl. hierzu die Aufgabe 123.

Näheres über den Gegenstand in des Verfassers Abhandlung: „Die Grundlagen und Einrichtungen des landwirtschaftlichen Betriebes" im „Handbuch der gesamten Landwirtschaft" von Th. v. d. Goltz. Band I. S. 183.

M. bevorzugt den Massivbau, welcher 11 500 Mark kosten soll, dessen Bestandesdauer sich aber voraussichtlich auf mehrere Menschenalter erstreckt, F. dagegen den Fachwerkbau, welcher ein Anlage-Kapital von nur 8 000 Mark erfordert und nur 65 Jahre vorhalten würde. Gegenüber seinem Berufsgenossen erspart also F. von vornherein eine Summe von 3 500 Mark. Frage: Welche Bedeutung hat dieser Vorsprung in Rücksicht auf das Bedürfnis eines Wiederholungsbaues, wenn man annimmt, daß das ersparte Kapital verfügbar sei und zu $3^1/_4$ Prozent auf Zins und Zinseszinsen angelegt werde?

A. $A = 3\,500 \times 1{,}0325^{65}$

$\log. 1{,}0325 = 0{,}0138901$	$\log. 3\,500 = 3{,}5440680$
$\times 65$	$+ \log. 1{,}0325^{65} = 0{,}9028565$
694505	$\log. A = 4{,}4469245$
833406	$\text{num.} = 27\,984{,}95$
$\log. 1{,}0325^{65} = 0{,}9028565$	$A =$ **27 984,95** Mark.

Mit der Summe, auf welche das ersparte Kapital während der Dauerzeit des Baues anwächst, würde also F. bezw. sein Besitzesnachfolger nicht allein die Neubaukosten von 8 000 Mark bestreiten, sondern auch noch 27 985 — 8 000 = 19 985 Mark erübrigen können.

32. Ein reicher Ortsbürger stiftete zugunsten seiner Gemeinde ein Legat von 45 000 Mark mit der Bestimmung, daß diese auf Zinseszinsen angelegt und daß erst nach 10 Jahren die jährlich fälligen Zinsen zur laufenden Unterstützung des alsdann zu erweiternden Arbeiterheims verwendet werden sollen. Nimmt man nun an, daß das Kapital zu $3^3/_4$ Prozent auf Zinseszinsen stehe: Auf welche Summe wird dasselbe bis zu jenem Zeitpunkte angewachsen sein, und welcher Jahres-Zinsertrag steht alsdann der Gemeinde zur Verfügung?

A. $A = 45\,000 \times 1{,}0375^{10}$

$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$	$\log. 45\,000 = 4{,}6532125$
$\times 10$	$+ \log. 1{,}0375^{10} = 0{,}1598810$
$\log. 1{,}0375^{10} = 0{,}1598810$	$\log. A = 4{,}8130935$
	$\text{num.} = 65\,026{,}97$
	$A =$ **65 026,97** Mark.

Und der jährliche Zinsertrag beläuft sich auf:

$$\frac{65\,026{,}97}{100} \times 3{,}75 = \mathbf{2\,438{,}51} \text{ Mark.}$$

33. Auf welchen Betrag wächst ein Kapital von 3 700 Mark in 12 Jahren an, wenn dasselbe zu $4^1/_2$ Prozent unter der Bedingung je vierteljährigen Zinszuschlages angelegt wird?

Anmerkung. Das vorliegende Beispiel weicht von den seither behandelten Fällen nur insofern ab, als die Verzinsung in je gleichen Teilabschnitten des Jahres erfolgt.

Auf den ersten Blick scheint diese Aufgabe einfach in der Weise gelöst werden zu können, daß man von einer proportionalen Verteilung des jährlichen Zinsfußes auf die einzelnen Zeitabschnitte des Jahres ausgeht und dann für die Dauer der Verzinsung die Gesamtzahl der einzelnen Zeiträume, welche auf n Jahre entfallen, einsetzt. Von diesem Verfahren wird auch im bürgerlichen Leben gewöhnlich Gebrauch gemacht. Genau zutreffende Ergebnisse liefert dasselbe indessen nicht.

Angewandt auf das gegebene Beispiel würde eine solche Rechnungsweise sich gestalten, wie folgt:

$$A = 3\,700 \times \left(1 + 0{,}0\frac{45}{4}\right)^{4 \times 12}$$

$$= 3\,700 \times 1{,}01125^{48}$$

log. 1,01125 = 0,0048585	log. 3 700 = 3,5682017
× 48	+ log. $1{,}01125^{48}$ = 0,2332080
388680	log. A = 3,8014097
194340	num. = 6 330,09
log. $1{,}01125^{48}$ = **0,2332080**	A = **6 330,09** Mark.

Daß der also eingeschlagene Weg nicht zu einem korrekten Fazit führen kann, lässet sich leicht dartun. Grundsätzlich muß doch für den vierteljährlichen Zinszuschlag ein Prozentsatz angewendet werden, welcher in den vier Abschnitten des Jahres zusammen den für dieses bedungenen Zuwachs, in unserem Falle = 100 : 104,5 bezw. 1 : 1,045 bewirkt. Eine Einteilung des Jahres in vier Abschnitte vorausgesetzt, würde also, wenn man den für $^1/_4$ Jahr zutreffenden unbekannten Zinsfaktor mit 1,0x bezeichnet, der Endwert des Kapitales a mit Ablauf von einem Vierteljahr sich auf a . 1,0x belaufen. Weil nun der Endwert am Schlusse des ganzen ersten Jahres = a . 1,0p sein soll, so folgt, daß derselbe bei vierteljähriger Verzinsung gleich sein muß dem Werte von $1{,}0x^4$. Somit ist aber $\sqrt[4]{1{,}0p} = 1{,}0p^{1/4}$. Im gegebenen Falle würde also die Berechnung von 1,0x lauten:

$$\sqrt[4]{1{,}045} = \frac{\log.\ 1{,}045}{4} \text{ oder:}$$

$$\log.\ 1{,}045\ .\ {}^1/_4 = 0{,}0047790(75), \text{ und}$$

$$\text{num. log. } 1{,}0x = 1{,}011065.$$

Diesem Ergebnisse entspricht aber ein vierteljährlicher Zinsfuß (p) von: (1,011065 — 1) × 100 = 1,1065 (statt wie oben: 1,125) Prozent.

Da nun die gesamte Dauerzeit von 12 Jahren : 48 Vierteljahre umfaßt, so hat man die Größe von n um die Zahl der auf ein Jahr entfallenden Abschnitte zu vervielfältigen. Hiernach ergibt sich:

$$A = 3\,700 \times 1{,}011065^{48}$$

log. 1,011065 = 0,0047790(75)	log. 3 700 = 3,5682017
× 48	+ log. $1{,}011065^{48}$ = 0,2293956
38232600	log. A = 3,7975973
19116300	num = 6 274,76
log. $1{,}011065^{48}$ = **0,2293956**	A = **6 274,76** Mark.

Der Endwert von A würde also nach dem erstgenannten gemeinüblichen Verfahren immer zu hoch ausfallen.[1])

Zu einem durchaus einwandfreien Resultate gelangt man aber unter allen Umständen durch die Anwendung der für die vorliegende Aufgaben-Reihe grundlegenden allgemeinen Formel: A = a . $1{,}0p^n$. Hiernach würde die Rechnung lauten:

[1]) Dieses Verhältnis erklärt sich übrigens mit der einfachen Betrachtung, daß ein Darleiher (Gläubiger), wenn er den bedungenen Jahreszins in Zeitabschnitten des Jahres, und zwar in proportionaler Verteilung auf diese, erhebt, die Begünstigung eines Vorbezuges genießt, welche darin besteht, daß, da die Zwischen-Zinserträge mit ihrer Einkehr sofort wieder angelegt werden können, sich ein den Wiederholungsfällen entsprechender Zuwachs an solchen berechnet, welcher den Jahres-Zinsertrag überschreitet. — Beispielsweise würde, wie sich leicht nachweisen läßt, der Gläubiger unter den in Aufgabe 33 gegebenen Voraussetzungen eines Jahres-Zinsfußes von $4^1/_2$ Prozent und des vierteljährlichen Zuschlages der Zinsen zum Kapitale am Schlusse des ersten Jahres in Wirklichkeit nicht 4,5, sondern 4,5765 Prozent beziehen, so daß sein Kapital p. 100 Mark nicht auf 104,50, sondern auf rund 104,58 Mark anwächst. — Und in der Tat erhält man im oben vorgeführten Falle unter Zugrundelegung dieses Zinsfußes für die Zahl der ganzen Jahre genau den Betrag von 6330,09 Mark.

A.

$$A = 3\,700 \times 1{,}045^{12}$$

$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$	$\log. 3\,700 = 3{,}5682017$
$\times 12$	$+ \log. 1{,}045^{12} = 0{,}2293956$
382326	$\log. A = 3{,}7975973$
191163	$\text{num.} = 6\,274{,}76$
$\log. 1{,}045^{12} = \mathbf{0{,}2293956}$	$A = \mathbf{6\,274{,}76}$ M (wie oben).

34. Ein Kapital von 6 250 Mark steht zu 5 Prozent auf Zins und Zinseszins aus. Welchen Endwert wird dasselbe nach $8^3/_4$ Jahren erreicht haben?

Anmerkung. Es liegt hier der Fall vor, daß die Zeitdauer (n) der Anlage des Kapitales eine gemischte (ganze und gebrochene) Zahl darstellt. Derselbe bildet ein Seitenstück zu dem Beispiele No. 33.

In der Behandlung solcher Aufgaben pflegt der gewöhnliche Geschäftsverkehr regelmäßig eine eigenartige, scheinbar einfache Praxis zu befolgen. Dieselbe besteht darin, daß vorerst der Betrag, bis auf welchen das Kapital nach der geschlossenen, abgerundeten Zahl der Jahre (n) anwächst, festgestellt und anknüpfend hieran die während der folgenden Jahresabschnitte stattfindende Vermehrung desselben, dann aber unter Anwendung proportionaler Bruchteile des Jahres-Zinssatzes ermittelt wird. Bezogen auf den gegebenen Fall würde alsdann die Rechnung bei Benutzung eines Zinsfußes von $^3/_4 \times 5 = 3^3/_4$ Prozent lauten müssen:

$$A = 6\,250 \times 1{,}05^8 \times 1{,}0375$$

$\log. 1{,}05 = 0{,}0211893$	$\log. 6\,250 = 3{,}7958800$
$\times 8$	$+ \log. 1{,}05^8 = 0{,}1695144$
$\log. 1{,}05^8 = \mathbf{0{,}1695144}$	$+ \log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$
$\log. 1{,}0375 = \mathbf{0{,}0159881}$	$\log. A = 3{,}9813825$
	$\text{num.} = 9\,580{,}37$
	$A = \mathbf{9\,580{,}37}$ **Mark.**

Eine strenge Genauigkeit kann übrigens auch für diese Rechnungsweise nicht beansprucht werden, wie man sich durch Rückgriff auf die bei Behandlung der Aufgabe 33 bereits entwickelten Gesichtspunkte leicht zu überzeugen vermag.

Zerlegt man nämlich die Rechnung in der Weise, daß man mit Hilfe der allgemeinen Formel zunächst den Endwert, welchen das Kapital mit Ablauf der 8 ganzen (n) Jahre erreicht, ermittelt und denselben alsdann um den Betrag, welcher auf die noch weiteren $^3/_4$ Jahre entfällt, vermehrt, und bezeichnet man jenen vorläufigen Schlußwert mit A_1, so erhält man:

$$A_1 = 6\,250 \times 1{,}05^8$$

$\log. 1{,}05 = 0{,}0211893$	$\log. 6\,250 = 3{,}7958800$
$\times 8$	$+ \log. 1{,}05^8 = 0{,}1695144$
$\log. 1{,}05^8 = \mathbf{0{,}1695144}$	$\log. A_1 = 3{,}9653944$
	$\text{num.} = 9\,234{,}096$

Dieser Betrag steht nunmehr auf noch $^3/_4 = \frac{1}{\frac{4}{3}}$ Jahre aus. Der für das ganze Jahr berechnete Zinsfaktor ist $1{,}0p = 1{,}05$. Soll derselbe auf den Zeitraum von $\frac{1}{\frac{4}{3}}$ Jahren bezogen werden, und benennt man die betreffende Größe wiederum mit $1{,}0x$, so erhält man die Gleichung:

$$A_1 \,.\, 1{,}0x^{4/3} = A_1 \times 1{,}0p$$

Hieraus ergibt sich aber:

$$1{,}0x = \sqrt[4/3]{1{,}0p} = 1{,}0p^{3/4}$$

Auf diese Weise ermittelt sich für das gegebene Beispiel:

$$1{,}0x = \sqrt[4/3]{1{,}05} = \frac{\log. 1{,}05}{\frac{4}{3}} = \log. 1{,}05 \,.\, {}^3/_4 = 0{,}0211893 \times {}^3/_4 = 0{,}0158920$$

$$\text{num. log. } 1{,}0x = 1{,}03727,$$

entsprechend einem Zinsfuße für $^3/_4$ Jahre von: $(1{,}03727 - 1) \times 100 = 3{,}727$ (statt wie oben 3,75) Prozent.

(In gleicher Art kann natürlich die Zinsberechnung für jeden anderen Jahresbruchteil ausgeführt werden.)

Überträgt man nunmehr das erhaltene Resultat auf die vorliegende Aufgabe, so berechnen sich im ganzen:

$$A = 9\,234{,}096 \times 1{,}03727 = \mathbf{9\,578{,}25} \text{ Mark.}$$

Womit zugleich dargetan ist, daß die Ergebnisse des im bürgerlichen Leben verbreiteten Rechnungs-Verfahrens auch hier die richtige Linie überschreiten.

Ein durchaus zuverlässiger Weg bietet sich aber im gegebenen Falle wiederum in der Anwendung der allgemeinen Formel dar, wie die nachfolgende Rechnung zeigen soll:

A.

$$A = 6\,250 \times (1{,}05^{8} \times 1{,}05^{3/4})$$
$$= 6\,250 \times 1{,}05^{8\,3/4}$$
$$= 6\,250 \times 1{,}05^{35/4}$$

$\log. 1{,}05 = 0{,}0211893$
$0{,}0211893 : 4$
$0{,}0052973(25)$
$\times 35$
26486625
15891975
$\log. 1{,}05^{35/4} = 0{,}1854063(75)$

$\log. 6\,250 = 3{,}7958800$
$+ \log. 1{,}05^{35/4} = 0{,}1854063$
$\log. A = 3{,}9812863$
$\text{num.} = 9\,578{,}25$
$A = \mathbf{9\,578{,}25}$ M (wie oben).

35. Bei einer Kreditkasse wird ein Kapital von 2 400 Mark zu $3^1/_2$ Prozent auf Zinseszinsen angelegt. Die Empfängerin gibt dasselbe wieder zu 4 Prozent unter dem vertragsmäßigen Vorbehalt aus, daß die Zinsen halbjährlich dem Kapitale zugeschlagen werden. Wenn nun die Rückzahlung des Kapitales mit Ablauf von 15 Jahren geschehen soll: Wieviel hat dann die Kreditkasse am Schlusse dieses Zeitraumes an dem Darlehensgeschäft gewonnen?

A. Die Kreditkasse hat zu zahlen:

$$A = 2\,400 \times 1{,}035^{15}$$

$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$
$\times 15$
747015
149403
$\log. 1{,}035^{15} = 0{,}2241045$

$\log. 2\,400 = 3{,}3802112$
$+ \log. 1{,}035^{15} = 0{,}2241045$
$\log. A = 3{,}6043157$
$\text{num.} = 4\,020{,}83$
$A = \mathbf{4\,020{,}83}$ Mark.

Hinsichtlich der Berechnung der Einnahme, welche der Kreditkasse zufließt, ist unter Berufung auf die Darlegungen in den Aufgaben 33 und 34 an folgendes zu erinnern:

Anmerkung 1. Nach dem im Verkehr meist üblichen Verfahren würde man für die Ermittlung der Einnahme die Gleichung anzuwenden haben:

$$A = 2\,400 \times (1 + 0{,}0\tfrac{4}{2})^{2 \times 15}$$
$$= 2\,400 \times 1{,}02^{30}$$

$\log. 1{,}02 = 0{,}0086001(7)$
$\times 30$
$\log. 1{,}02^{30} = 0{,}2580051$

$\log. 2\,400 = 3{,}3802112$
$+ \log. 1{,}02^{30} = 0{,}2580051$
$\log. A = 3{,}6382163$
$\text{num.} = 4\,347{,}27$
$A = \mathbf{4\,347{,}27}$ Mark.

Der Grad der Ablenkung dieses Ergebnisses kann wiederum durch die Kontrollrechnung nachgewiesen werden. Denn wenn der auf das Halbjahr bezogene Zinsfaktor $= \sqrt[2]{1{,}04}$, also $\frac{\log. 1{,}04}{2} = 1{,}04^{1/2} = 0{,}00851665$ ist, und der zugehörige numerus 1,019804 beträgt, so erhält man für $2 \times 15 = 30$ Halbjahre:

$$A = 2\,400 \times 1{,}019804^{30}$$

$\log. 1{,}019804 = 0{,}00851665$	$\log. 2\,400 = 3{,}3802112$
$\times 30$	$+ \log. 1{,}019804^{30} = 0{,}2554995$
$\log. 1{,}019804^{30} = 0{,}2554995$	$\log. A = 3{,}6357107$
	num. $= 4\,322{,}26$
	$A =$ **4 322,26** Mark.

Eine glatte, runde Bestätigung der Richtigkeit dieses Fazits ergibt sich wiederum mit Anwendung der allgemeinen Formel. Nämlich:

A. $$A = 2\,400 \times 1{,}04^{15}$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$	$\log. 2400 = 3{,}3802112$
$\times 15$	$+ \log. 1{,}04^{15} = 0{,}2554995$
851665	$\log. A = 3{,}6357107$
170333	num. $= 4\,322{,}26$
$\log. 1{,}04^{15} = 0{,}2554995$	$A =$ **4 322,26** Mark.

Somit ist der Gewinn der Kreditkasse = 4 322,26 — 4 020,83 = **301,43** Mark.

Übrigens ließe sich die Berechnung des Unterschiedes zwischen den beiden Endwerten, d. i. des Gewinnes der Kreditkasse, in der Weise vereinfachen, daß man nur die Potenzen, deren Grundzahl aus dem Zinsfaktor, und deren Exponent aus der Anzahl der Jahre bezw. der Jahresbruchteile für den Zinszuschlag besteht, für sich ermittelt und dieselben mit dem in beiden Fällen gleichen Anfangswert des Kapitales (2 400 Mark) multipliziert.

Darnach würde man im vorliegenden Beispiele, wenn man die Einnahme mit E und die Ausgabe mit A bezeichnet, erhalten:

Gemäß dem im bürgerlichen Leben üblichen Verfahren:

$$E - A = 2\,400 \times 1{,}02^{30} - 2\,400 \times 1{,}035^{15}$$

In Anwendung des genaueren Rechnungsganges:

$$E - A = 2\,400 \times 1{,}04^{15} - 2\,400 \times 1{,}035^{15}$$

Daher aber:

$$E - A = 2\,400 \times (1{,}02^{30} - 1{,}035^{15})$$

bezw.

$$2\,400 \times (1{,}04^{15} - 1{,}035^{15})$$

Und mit Einsetzung der numeri der logarithmierten Potenzen:

$$E - A = 2\,400 \times (1{,}8113613 - 1{,}6753458)$$

bezw.

$$2\,400 \times (1{,}8009412 - 1{,}6753458)$$

Woraus schließlich folgt:

$$E - A = 2\,400 \times 0{,}1360155$$

bezw.

$$2\,400 \times 0{,}1255954$$

= **326,44** bezw. **301,43** Mark.

Anmerkung 2. Es dürfte wohl nicht überflüssig sein, bei diesem Anlasse im Anschlusse an die Aufgaben 33—35 noch daran zu erinnern, daß man, wie aus dem Zinsfaktor für das ganze Jahr denjenigen für Bruchteile des Jahres, so auch umgekehrt aus dem Zinsfaktor für die Bruchteile des Jahres denjenigen für das ganze Jahr leicht berechnen kann. Letzteres geschieht, indem man den Zinsfaktor für den Jahresbruchteil mit der Zahl, welche dessen Verhältnis zum ganzen Jahre ausdrückt, potenziert.

Beispielsweise ergibt sich hiernach:

	Vierteljährl. Zinsfaktor:		Potenziert:	Jährlicher Zinsfaktor:
Aufgabe 33:	1,011065	$= 1{,}011065^{4}$	$= 4 \,.\, \log. 0{,}0047790 = \log. 0{,}0191163$	$= 1{,}045$
„ 34:	1,037270	$= 1{,}037270^{4/3}$	$= \frac{4}{3} \,.\, \log. 0{,}0158919 = \log. 0{,}0211892$	$= 1{,}05$
„ 35:	1,019804	$= 1{,}019804^{2}$	$= 2 \,.\, \log. 0{,}0085167 = \log. 0{,}0170333$	$= 1{,}04$

Zweite Gruppe.

(Gegeben: A, p und n. Gesucht a. Anwendung der Formel II: $a = \frac{A}{1{,}0p^n}$)

36. Wie groß ist das Kapital, welches nach 18 Jahren bei einer Anlage zu $4^1/_4$ Prozent mit Zinsen und Zinseszinsen auf den Betrag von 21 430 Mark anwächst?

A.

$$a = \frac{21\,430}{1{,}0425^{18}}$$

$$\begin{array}{rl|rl} \log. 1{,}0425 = & 0{,}0180761 & \log. 21\,430 = & 4{,}3310222 \\ & \times 18 & -\log. 1{,}0425^{18} = & 0{,}3253698 \\ \hline & 1446088 & \log. a = & 4{,}0056524\ ^{1)} \\ & 180761 & \text{num.} = & 10\,131 \\ \hline \log. 1{,}0425^{18} = & \mathbf{0{,}3253698} & a = & \mathbf{10\,131}\ \text{Mark.} \end{array}$$

Mit Hilfe der Tafel II:

$$a = 21\,430 \times 0{,}4727493 = \mathbf{10\,131}\ \text{Mark.}$$

37. Wie hoch beläuft sich der gegenwärtige Wert eines nach 11 Jahren fälligen Kapitales von 6 736 Mark, wenn für die Verzinsung desselben $3^1/_2$ Prozent gerechnet werden?

A.

$$a = \frac{6\,736}{1{,}035^{11}}$$

$$\begin{array}{rl|rl} \log. 1{,}035 = & 0{,}0149403 & \log. 6\,736 = & 3\,8284021 \\ & \times 11 & -\log. 1{,}035^{11} = & 0{,}1643433 \\ \hline & 149403 & \log. a = & 3{,}6640588 \\ & 149403 & \text{num.} = & 4\,613{,}80 \\ \hline \log. 1{,}035^{11} = & \mathbf{0{,}1643433} & a = & \mathbf{4\,613{,}80}\ \text{Mark.} \end{array}$$

38. Es ist Jemand verpflichtet, nach 9 Jahren ein Kapital von 12 000 Mark (ohne Zins) zu bezahlen. — Wenn nun der Schuldner diese Forderung sofort begleichen möchte und ihm dann eine Zinsvergütung von $4^1/_2$ Prozent bewilligt wird: Welchen Betrag müßte derselbe zu entrichten haben?

---

[1]) Es soll an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben, wie sich die logarithmischen Divisionen auch in der Weise ausführen lassen, daß man, anstatt den Logarithmus des Divisors von dem Logarithmus des Dividendus zu subtrahieren, von jenem die Ergänzung (Komplement) zu 0 oder 10 — 10 ermittelt und diese zu dem Dividendus addiert. (Bereits behandelt von V. Baerlocher: „Handbuch der Zinseszins-, Renten-, Anleihen- und Obligationen-Rechnung." Zürich 1885.) Im vorliegenden Beispiele (Aufgabe 36) ist Logarithmus von $1{,}0425^{18} = 0{,}3253698$, und beläuft sich dessen Ergänzung zu 10 auf: $10 - 0{,}3253698 = 9{,}6746302 - 10$. Daher die Rechnung:

$$\begin{array}{rl} & 4{,}3310222 \\ + & 9{,}6746302 - 10 \\ \hline & 14{,}0056524 - 10 \\ = & 4{,}0056524\ \text{(w. o.).} \end{array}$$

A.

$$a = \frac{12\,000}{1{,}045^9}$$

$$\begin{array}{rl} \log. 1{,}045 = 0{,}0191163 & \log. 12\,000 = 4{,}0791812 \\ \times 9 & -\log. 1{,}045^9 = 0{,}1720467 \\ \log. 1{,}045^9 = 0{,}1720467 & \log. a = 3{,}9071345 \\ & \text{num.} = 8\,074{,}85 \\ & a = \mathbf{8\,074{,}85}\ \text{Mark.} \end{array}$$

39. Um seinem 5 jährigen Sohne für den Zeitpunkt der Zurücklegung des 22 sten Lebensjahres das zur Begründung eines selbständigen Gewerbebetriebes erforderliche Kapital von 10 000 Mark zu sichern, beabsichtigt der Vater, bei einer Sparkasse eine Summe einzulegen, welche mit Anrechnung der Zinsen und Zinseszinsen am Schlusse der gegebenen Frist von 17 Jahren die Höhe jenes Kapitalbetrages erreicht. Wenn nun die Sparkasse einen Zins von $3^1/_4$ Prozent gewährt: Wie groß muß dann die Einlage sein?

A.

$$a = \frac{10\,000}{1{,}0325^{17}}$$

$$\begin{array}{rl} \log. 1{,}0325 = 0{,}0138901 & \log. 10\,000 = 4{,}0000000 \\ \times 17 & -\log. 1{,}0325^{17} = 0{,}2361317 \\ 972307 & \log. a = 3{,}7638683 \\ 138901 & \text{num.} = 5\,805{,}88 \\ \log. 1{,}0325^{17} = 0{,}2361317 & a = \mathbf{5\,805{,}88}\ \text{Mark.} \end{array}$$

40. Jemand ist in der Lage, einen verbrieften, nach 7 Jahren fälligen Entschädigungsanspruch (oder Erbanteil) von 3 500 Mark alsbald veräußern zu müssen. Wieviel kann ihm bei Berechnung von 4 Prozent Zinsen jetzt für denselben gezahlt werden?

A.

$$a = \frac{3\,500}{1{,}04^7}$$

$$\begin{array}{rl} \log. 1{,}04 = 0{,}0170333 & \log. 3\,500 = 3{,}5440680 \\ \times 7 & -\log. 1{,}04^7 = 0{,}1192331 \\ \log. 1{,}04^7 = 0{,}1192331 & \log. a = 3{,}4248349 \\ & \text{num.} = 2\,659{,}71 \\ & a = \mathbf{2\,659{,}71}\ \text{Mark.} \end{array}$$

Hiernach würde der A b z u g, welcher dem Zinsverluste bei Vorauszahlung der später fälligen Summe entspricht (Diskont), betragen: 3 500 — 2 659,71 = 840,29 Mark.[1])

41. Die Bevölkerung eines Distriktes vermehrte sich im Durchschnitt um jährlich 1,04 Prozent und zählt dieselbe zurzeit 485 356 Personen. Wie groß war die Zahl der Bewohner vor 25 Jahren?

A.

$$a = \frac{485\,356}{1{,}0104^{25}}$$

[1]) Vgl. hierzu die Ausführungen zu der Sonder-Aufgabe 234.

log. 1,0104 = 0,0044933	log. 485 356 = 5,6860604
× 25	— log. $1,0104^{25}$ = 0,1123325
224665	log. a = 5,5737279
89866	num. = 374 738
log. $1,0104^{25}$ = **0,1123325**	a = **374 738** Bew.

42. Auf Grund örtlicher Erfahrungen beläuft sich der Ertrag (Hauptnutzung) eines Nadelholzwaldes bei einem Bestandesalter von 90 Jahren auf 585 cbm p. ha. Wie hoch würde sich derselbe unter gleichen Standorts- und Kulturbedingungen für ein Bestandesalter von 60 Jahren berechnen, wenn für den jährlichen Zuwachs $1^1/_2$ Prozent angenommen werden?

A.

$$a = \frac{585}{1{,}015^{30}}$$

log. 1,015 = 0,0064660	log. 585 = 2,7671559
× 30	— log. $1,015^{30}$ = 0,1939800
log. $1,015^{30}$ = **0,1939800**	log. a = 2,5731759
	num. = 374,26
	a = **374,26** cbm.

43. Drei Interessenten bewerben sich um ein zum Verkaufe ausgebotenes Landgut. A. offeriert eine Zahlung von 89 000 Mark bar, B. von 75 000 Mark bar und von 18 000 Mark nach 5 Jahren, ohne Zins zu bezahlen, C. von 120 000 Mark nach 8 Jahren, gleichfalls ohne Zinsen. Welche dieser Offerten ist die höchste, und in welchem Betrage übersteigt sie die beiden anderen Angebote, wenn für die Verzinsung 4 Prozent angenommen werden?

Anmerkung 1. Es handelt sich hier um eine Vergleichung der Barwerte, also um eine Diskontierung der offerierten Beträge auf den gegenwärtigen Zeitpunkt. Das einfachste Verfahren wird dann eben darin bestehen, daß man die Barwerte aller drei Angebote direkt ermittelt.

A. 1. Barwert des Angebotes von A. = . . . **89 000,—** Mark.

2. Barwert des Angebotes von B.:

$$a = \frac{18\,000}{1{,}04^5}$$

log. 1,04 = 0,0170333	log. 18000 = 4,2552725
× 5	— log. $1,04^5$ = 0,0851665
log. $1,04^5$ = **0,0851665**	log. a = 4,1701060
	num. = 14 794,69
	a = **14 794,69** M

Dazu die Anzahlung . . . = **75 000,—** M

Zusammen: **89 794,69** Mark.

3. Barwert des Angebotes von C.:

$$a = \frac{120\,000}{1{,}04^8}$$

log. 1,04 = 0,0170333(4)	log. 120 000 = 5,0791812
× 8	— log. $1,04^8$ = 0,1362667
log. $1,04^8$ = 0,1362667	log. a = 4,9429145
	num. = 87 682,82
	a = . . . **87 682,82** Mark.

Demnach ist das Angebot von B. das höchste. Dasselbe übertrifft dasjenige von A. um **794,69** Mark, und dasjenige von C. um **2 111,67** Mark.

Anmerkung 2. Selbstverständlich kann die vorliegende Aufgabe auch indirekt in der Weise gelöst werden, daß entweder das Angebot von A. um 5 Jahre prolongiert und dasjenige von C. um 3 Jahre diskontiert, oder aber das Angebot von A. um 8 und dasjenige von B. um 3 Jahre prolongiert wird. In diesen Fällen wird es dann aber noch erforderlich, die ermittelten Unterschiede zwischen dem höchsten Angebote und den beiden anderen Angeboten auf die Gegenwart zu diskontieren. Aus leicht einzusehenden Gründen ist indessen ein solches Verfahren viel umständlicher, als der vorgeführte Rechnungsgang.

44. Ein zu $4\frac{1}{2}$ Prozent auf Zinseszinsen angelegtes Kapital ist nach 15 Jahren auf den Betrag von 16 339,35 Mark angewachsen. Wenn nun die Zinsen monatlich zum Kapitale geschlagen wurden: Wieviel betrug dessen Anfangswert?

Anmerkung. Nach dem im Geschäftsverkehr üblichen Rechnungsverfahren würde sich, wie aus der Anmerkung zur Aufgabe 33 zu entnehmen, der Wert von a ermitteln nach der Gleichung:

$$a = \frac{16\,339{,}35}{\left(1 + 0{,}0\frac{45}{12}\right)^{12 \times 15}} = \frac{16\,339{,}35}{1{,}00375^{180}}$$

log. 1,00375 = 0,0016255	log. 16 339,35 = 4,2132348
× 180	— log. $1{,}00375^{180}$ = 0,2925900
1300400	log. a = 3,9206448
16255	num. = 8 330
log. $1{,}00375^{180}$ = 0,2925900	a = **8 330** Mark.

Ein zutreffenderes Ergebnis liefert aber die allgemeine Formel II, nach welcher sich berechnet:

A.

$$a = \frac{16\,339{,}35}{1{,}045^{15}}$$

log. 1,045 = 0,0191163	log. 16 339,35 = 4,2132348
× 15	— log. $1{,}04^{15}$ = 0,2867445
955815	log. a = 3,9264903
191163	num. = 8 442,88
log. $1{,}045^{15}$ = 0,2867445	a = **8 442,88** Mark.

45. Bei dem mit Ablauf von 10 Jahren und 4 Monaten ($10\frac{1}{3}$ Jahren) erfolgten Rückbezug eines zu $5\frac{1}{4}$ Prozent auf Zinseszinsen ausgeliehenen Kapitales hatte dieses den Betrag von 4 387,50 Mark erreicht. Wie hoch berechnet sich der Anfangswert desselben?

Anmerkung. Nach der im bürgerlichen Leben gebräuchlichen Rechnungsart (vgl. Aufgabe 34) wäre die Gleichung anzuwenden:

$$a = \frac{4\,387{,}50}{1{,}0525^{10} \times \left(1 + 0{,}0\frac{525}{3}\right)} = \frac{4\,387{,}50}{1{,}0525^{10} \times 1{,}0175}$$

log. 1,0525 = 0,0222221	log. 4 387,50 . . . . = 3,6422171
× 10	— (log. $1{,}0525^{10}$ + log. 1,0175) = 0,2297554
log. $1{,}0525^{10}$ = 0,2222210	log. a = 3,4124617
+ log. 1,0175 = 0,0075344	num. = 2 585
0,2297554	a = **2 585** Mark.

Mit Benutzung der allgemeinen Formel II erhält man ein genaueres, allerdings nur wenig abweichendes Ergebnis, wie folgt:

A.

$$a = \frac{4\,387{,}50}{1{,}0525^{31/3}}$$

$$\begin{array}{rl} \log. 1{,}0525 = & 0{,}0222221 \\ & \times 31 \\ \hline & 222221 \\ & 666663 \\ \hline & 0{,}6888851 : 3 \\ \log. 1{,}0525^{31/3} = & \mathbf{0{,}2296284} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log. 4\,387{,}50 = & 3{,}6422171 \\ -\log. 1{,}0525^{31/3} = & 0{,}2296284 \\ \hline \log. a = & 3{,}4125887 \\ \text{num.} = & 2\,585{,}76 \\ a = & \mathbf{2\,585{,}76}\ \text{Mark.} \end{array}$$

Dritte Gruppe.

(Gegeben: A, a und n. Gesucht p. Anwendung der Formel III: $1{,}0p = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}$.)

Anmerkung. Da hier 1,0p die Größe bedeutet, auf welche eine Einheit bei dem Zinsfuße p in einem Jahre anwächst, so hat man, um letzteren auszulösen, sich zu erinnern, daß $1{,}0p = 1 + \frac{p}{100}$, daher $p = 100 \,.\, (1{,}0p - 1)$ ist und sich ergeben muß, wenn man die obige Formel entsprechend erweitern würde in:

$$p = 100 \,.\, \left(\sqrt[n]{\frac{A}{a}} - 1\right).$$

Man vergleiche übrigens die Ausführungen zu Formel III, Seite 12.

46. Ein auf Zinseszinsen angelegtes Kapital von 5 000 Mark ist in 14 Jahren auf den Betrag von 8 371,50 Mark angewachsen. Zu wieviel Prozent war dasselbe ausgeliehen? [1])

A.

$$1{,}0p = \sqrt[14]{\frac{8\,371{,}50}{5\,000}}$$

$$\begin{array}{rl} \log. 8\,371{,}50 = & 3{,}9228033 \\ -\log. 5\,000 \quad = & 3{,}6989700 \\ \hline & 0{,}2238333 : 14 \\ \hline \log. 1{,}0p = & 0{,}0159881 \\ \text{num.} = & 1{,}0375 \end{array}$$

$$p = 100 \times (1{,}0375 - 1) = \mathbf{3{,}75}\ \text{Prozent.}$$

47. Wie viele Prozente müssen für ein auf Zinseszinsen anzulegendes Kapital von 9 500 Mark berechnet werden, wenn dasselbe mit Ablauf von 8 Jahren die Summe von 13 510 Mark erreichen soll?

---

[1]) Wenn, wie es im gegebenen Beispiele zutrifft, das Verhältnis zwischen zwei Zahlen, deren Logarithmen voneinander subtrahiert werden sollen, sich derart einfach gestaltet, daß es durch Division schlank festgestellt werden kann, und dabei insbesondere der Quotient eine mehr oder weniger abgerundete, jedenfalls leicht zu fassende Größe bildet, dann wird es sich empfehlen, auf die betreffenden Zahlen, statt deren Logarithmen aufzusuchen und voneinander zu subtrahieren, die Division anzuwenden und deren Quotienten zu logarithmieren. Darnach würde man im vorliegenden Falle erhalten:

$$\log. \frac{8{,}3715}{5} = \log. 1{,}6743 = 0{,}2238333 \text{ (wie oben).}$$

Von dieser Rechnungsweise soll bei geeigneter Gelegenheit in späteren Aufgaben Gebrauch gemacht werden.

A. $$1{,}0p = \sqrt[8]{\frac{13\,510}{9\,500}}$$

$$\log.\ 13\,510 = 4{,}1306553$$
$$-\log.\ 9\,500 = 3{,}9777236$$
$$0{,}1529317 : 8$$
$$\log.\ 1{,}0p = 0{,}0191165$$
$$\text{num.} = 1{,}045$$
$$p = 100 \times (1{,}045 - 1) = \mathbf{4{,}5}\ \text{Prozent.}$$

48. Dem Schuldner eines nach 10 Jahren fälligen Kapitales von 12 500 Mark wird Gelegenheit gegeben, dasselbe durch sofortige Barzahlung abzustoßen. Wenn der Gläubiger hierfür den Betrag von 7 673,90 Mark verlangt: Wieviel Zinsprozente (Diskont) werden von ihm aldann beansprucht?

A. $$1{,}0p = \sqrt[10]{\frac{12\,500}{7\,673{,}9}}$$

$$\log.\ 12\,500 = 4{,}0969100$$
$$-\log.\ 7\,673{,}9 = 3{,}8850161$$
$$0{,}2118939 : 10$$
$$\log.\ 1{,}0p = 0{,}0211893(9)$$
$$\text{num.} = 1{,}05$$
$$p = 100 \times (1{,}05 - 1) = \mathbf{5}\ \text{Prozent.}$$

49. Ein ökonomisch bedrängter Bauer leiht von einem Händler die Summe von 750 Mark, muß diesem aber dafür einen Schuldschein über 1 000 Mark, zahlbar nach $3^1/_2$ Jahren (ohne Zinsen), ausstellen. Wieviel Zinsprozente beansprucht der Darleiher von diesem Geschäfte, wenn die Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden?

A. $$1{,}0p = \sqrt[3^1/_2]{\frac{1\,000}{750}}$$

$$\frac{1\,000}{750} = \frac{100}{75} = 1{,}3333333$$
$$\log.\ 1{,}333333 = 0{,}1249387$$
$$0{,}1249387 : 3{,}5$$
$$\log.\ 1{,}0p = 0{,}0356968$$
$$\text{num.} = 1{,}0856675$$
$$p = 100 \times (1{,}0856675 - 1) = \mathbf{8{,}57}\ \text{Prozent (rund).}$$

50. Gegen Verabfolgung eines Darlehens von 3 000 Mark läßt sich ein Kapitalist einen Schuldschein, lautend auf 4 267 Mark, welche nach 7 Jahren und 10 Monaten zu entrichten sind, ausstellen. Welcher Zins-Prozentsatz wurde hierbei in Rechnung gebracht?

A. $$1{,}0p = \sqrt[7^5/_6]{\frac{4\,267}{3\,000}}$$

$$\frac{4{,}267}{3} = 1{,}4223333$$
$$\log.\ 1{,}4223333 = 0{,}1530013$$
$$0{,}1530013 : {}^{47}/_6$$
$$\log.\ 1{,}0p = 0{,}0195321$$
$$\text{num.} = 1{,}0460009$$
$$p = 100 \times (1{,}0460009 - 1) = \mathbf{4{,}60}\ \text{Prozent (rund).}$$

Anmerkung. Ist die Anzahl der Jahre, wie in den vorliegenden Beispielen 49 und 50, eine gemischte bezw. gebrochene, so kann man sich in der Berechnung der Zinsprozente häufig noch eine Erleichterung verschaffen, indem man von der Gleichung $1{,}0p^n = \frac{A}{a}$ ausgeht, welche die Vorstufe der Formel III bildet. Alsdann hat man einfach die n te Potenz in der Weise zu zerlegen, daß einerseits der Zinsfaktor 1,0p mit der Gesamtzahl der Bruchteile, andererseits aber der Quotient aus der Division des Nachwertes A durch den Vorwert a mit dem Nenner des Bruches potenziert wird.

In Anwendung auf die Aufgabe 50 gestaltet sich somit das Verfahren der Auslösung von 1,0p wie folgt:

$$1{,}0p^{7\,5/6} = \frac{4\,267}{3\,000}$$

$$1{,}0p^{47/6} = \frac{4\,267}{3\,000}$$

$$1{,}0p^{47} = \left(\frac{4\,267}{3\,000}\right)^6$$

$$1{,}0p = \sqrt[47]{\left(\frac{4\,267}{3\,000}\right)^6} = \left(\frac{4\,267}{3\,000}\right)^{6/47}.$$

Logarithmiert:

$$\begin{aligned} \log 4\,267 &= 3{,}6301226 \\ -\log 3\,000 &= 3{,}4771213 \\ &\ 0{,}1530013 \\ &\ \times 6 \\ &\ 0{,}9180078 \\ &\ \times 1/47 \\ \log 1{,}0p &= 0{,}0195321 \\ \text{num.} \log 1{,}0p &= 1{,}046 \text{ (wie oben).} \end{aligned}$$

51. Die Bevölkerung einer Provinz ist im Laufe von 20 Jahren von 1 825 000 auf 2 317 000 Seelen angewachsen. Wie hoch berechnet sich die jährliche prozentuale Zunahme?

A.

$$1{,}0p = \sqrt[20]{\frac{2\,317\,000}{1\,825\,000}}$$

$$\begin{aligned} \log 2\,317\,000 &= 6{,}3649260 \\ -\log 1\,825\,000 &= 6{,}2612629 \\ &\ 0{,}1036631 : 20 \\ \log 1{,}0p &= 0{,}00518315 \\ \text{num.} &= 1{,}0120062 \end{aligned}$$

$$p = 100 \times (1{,}0120062 - 1) = \mathbf{1{,}2} \text{ Prozent.}$$

52. Der 70 jährige Holzbestand einer pp. 12 ha großen Waldfläche ist auf 3 875 cbm berechnet worden. Die Aufnahme im Bestandesalter desselben von 55 Jahren ergab 2 974 cbm. Wieviel betrug der jährliche prozentische Zuwachs?

A.

$$1{,}0p = \sqrt[15]{\frac{3\,875}{2\,974}}$$

$$\begin{aligned} \log 3\,875 &= 3{,}5882717 \\ \log 2\,974 &= 3{,}4733410 \\ &\ 0{,}1149307 : 15 \\ \log 1{,}0p &= 0{,}0076620 \\ \text{num.} &= 1{,}0177991 \end{aligned}$$

$$p = 100 \times (1{,}0177991 - 1) = \mathbf{1{,}78} \text{ Prozent (rund).}$$

53. In einem Lande hat sich der Bestand an Rindvieh während der letzten 30 Jahre verdoppelt. Wieviel Prozent betrug die jährliche Zunahme?

Anmerkung. Für den Nachweis derartiger Verhältnisse fallen die absoluten Größen der Anfangs- und der Endwerte des Bestandes außer Betracht. Geht man, um der Aufgabe beizukommen, von der Grundformel I: $A = a \,.\, 1{,}0p^n$ aus, und bezeichnet man den Grad der Vervielfältigung von a mit m, so ist $A = a \,.\, m$, und daher:

$$a \,.\, m = a \,.\, 1{,}0p^n.$$

Wird dann auf beiden Seiten mit dem gemeinschaftlichen Faktor a dividiert, so erhält man:

$$m = 1{,}0p^n.$$

Woraus sich ergibt: $\log. m = n \,.\, \log. 1.0p.$

Und weiter: $\log. 1{,}0p = \frac{\log. m}{n}.$

Damit ist zugleich ausgedrückt, daß der Faktor 1,0p, welcher den auf eine Einheit entfallenden prozentualen Zuwachs des Anfangswertes a auf das m fache desselben bedeutet, lediglich eine Funktion von der Zeitdauer n ist, also von der Größe des Anfangswertes gar nicht beeinflußt wird. Eine Wahrnehmung, welche zugleich besagt, daß die gleiche prozentuale Zunahme auch für jeden anderen Anfangswert zutreffen muß, welcher sich während der gleichen Zeitdauer in demselben Verhältnisse vervielfältigt. Und selbstverständlich bleibt das Rechnungsverfahren durchaus dasselbe, wie groß auch der Grad der Vervielfältigung (um das 2- oder 3- oder 4- usw. fache) des Anfangswertes, also der Faktor m sein mag.

Angewandt auf das vorliegende Beispiel würde die Rechnung also ergeben:

A.

$$\log. 1{,}0p = \frac{\log. 2}{30}$$

$$\log. 2 = 0{,}3010300$$

$$\log. 1{,}0p = 0{,}3010300 : 30 = 0{,}01003433$$

$$\text{num.} = 1{,}0233739$$

$p = 100 \times (1{,}0233739 - 1) =$ **2,337** Prozent (rund).

Vierte Gruppe.

(Gegeben: A, a und p. Gesucht: n. Anwend. der Formel IV: $n = \frac{\log. A - \log. a}{\log. 1{,}0p}$)

54. Auf wieviel Jahre wird ein Kapital von 11 750 Mark bei $4^3/_4$ Prozent auf Zinseszinsen ausstehen müssen, um bis zu dem Betrage von 25 000 Mark anzuwachsen?

A.

$$n = \frac{\log. 25\,000 - \log. 11\,750}{\log. 1{,}0475}$$

$$\log. 25\,000 = 4{,}3979400$$

$$- \log. 11\,750 = 4{,}0700379$$

$$0{,}3279021$$

$$\log. 1{,}0475 = 0{,}0201540$$

$n = \frac{3279021}{201540} =$ **16,27** Jahre
= 16 Jahre, 3 Monate und 7 Tage.

Anmerkung. Um die hier angedeutete Division auszuführen, kann man auch die beiden Zahlengrößen wiederum logarithmisch behandeln. Man erhält dann:

$$\log. 0{,}3279021 = 0{,}5157441 - 1$$

$$- \log. 0{,}0201540 = 0{,}3043613 - 2$$

$$\log. n = 1{,}2113828$$

num. = **16,27** Jahre (wie oben).

55. Es legt Jemand 1 323,50 Mark bei einer Sparkasse, welche $3^1/_2$ Prozent vergütet, in der Absicht an, das Kapital zurückzuziehen, wenn es samt Zinseszinsen den Betrag von 2 000 Mark erreicht hat. Nach wieviel Jahren wird dies geschehen können?

A.
$$n = \frac{\log. 2\,000 - \log. 1\,323{,}50}{\log. 1{,}035}$$

$$\log. 2\,000 = 3{,}3010300$$
$$- \log. 1\,323{,}50 = 3{,}1217239$$
$$0{,}1793061$$
$$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$$
$$n = \frac{1793061}{149403} = \mathbf{12} \text{ Jahre (nahezu).}$$

Die logarithmische Behandlung dieser Division gestaltet sich also:

$$\log. 0{,}1793061 = 0{,}2535950 - 1$$
$$- \log. 0{,}0149403 = 0{,}1743593 - 2$$
$$\log. n = 1{,}0792357$$
$$\text{num.} = \mathbf{12} \text{ Jahre (wie oben).}$$

56. Einer Gemeinde wurden 50 000 Mark mit der Bestimmung vermacht, daß das Kapital zur Herstellung eines öffentlichen Bauwerkes verwendet werden soll. Wenn diese nun nach dem Voranschlag des Technikers einen Aufwand von 65 798 Mark erfordert: Wieviel Jahre wird dann der Betrag des Legates, unter der Voraussetzung einer regelmäßigen Verzinsung von 4 Prozent, noch auf Zinseszinsen angelegt werden müssen, um auf denjenigen der Baukosten anzuwachsen?

A.
$$n = \frac{\log. 65\,798 - \log. 50\,000}{\log. 1{,}04}$$

$$\frac{65\,798}{50\,000} = \frac{6{,}5798}{5} = 1{,}31596$$
$$\log. 1{,}31596 = 0{,}1192427$$
$$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$$
$$n = \frac{1192427}{170333} = \mathbf{7} \text{ Jahre (rund).}$$

Wird letztere Gleichung logarithmiert, so erhält man:

$$\log. 0{,}1192427 = 0{,}0764318 - 1$$
$$- \log. 0{,}0170333 = 0{,}2312988 - 2$$
$$\log. n = 0{,}8451330$$
$$\text{num.} = \mathbf{7} \text{ Jahre (wie oben).}$$

57. Die jährliche Zunahme der Bevölkerung eines Bezirkes beträgt nach den vorliegenden Erhebungen: 12 auf 1000. Wenn nun die Zahl der Bewohner sich dermalen auf 133 430 beläuft: Nach wieviel Jahren wird dieselbe bis auf 200 000 gestiegen sein?

A.
$$n = \frac{\log. 200\,000 - \log. 133\,430}{\log. 1{,}012}$$

$$\log. 200\,000 = 5{,}3010300$$
$$- \log. 133\,430 = 5{,}1252535$$
$$0{,}1757765$$
$$\log. 1{,}012 = 0{,}0051805$$
$$n = \frac{1757765}{51805} = \mathbf{33{,}93} \ldots$$, also nach annähernd **34** Jahren.

In logarithmischer Ausführung der Division:

$$\log. 0{,}1757765 = 0{,}2449608 - 1$$
$$-\log. 0{,}0051805 = 0{,}7143717 - 3$$
$$\log. n = 1{,}5305891$$

num. = **33,93**.., oder rund **34** Jahre (wie oben).

58. In wieviel Jahren wird sich der zurzeit auf 19 124 cbm eingeschätzte Holzbestand eines Waldes um 10 500 cbm vergrößert haben, wenn ein Zuwachs-Verhältnis von $2^1/_8$ Prozent zugrunde gelegt werden darf?

A.
$$n = \frac{\log. 29624 - \log. 19124}{\log. 1{,}02125}$$

$$\log. 29\,624 = 4{,}4716437$$
$$-\log. 19\,124 = 4{,}2815787$$
$$0{,}1900650$$
$$\log. 1{,}02125 = 0{,}0091320$$
$$n = \frac{1900650}{91320} = \mathbf{20{,}813}..,$$ oder nahezu **21** Jahre.

Wird die Division logarithmisch behandelt, so erhält man:

$$\log. 0{,}1900650 = 0{,}2789021 - 1$$
$$-\log. 0{,}0091320 = 0{,}9605659 - 3$$
$$\log. n = 1{,}3183362$$

num. = **20,813** .., oder rund **21** Jahre (wie oben).

59. Ein zu 5 Prozent angelegtes Kapital von 3 360 Mark, von welchem die Zinsen vierteljährlich erhoben werden, soll so lange ausstehen, bis es mit Zinsen und Zinseszinsen auf 5 000 Mark angewachsen ist. Nach wieviel Jahren wird dies der Fall sein?

Anmerkung. Nach dem gemeinüblichen Verfahren (vgl. Aufgabe 33) würde die Rechnung lauten müssen:

$$4\,n = \frac{\log. 5\,000 - \log. 3\,360}{\log. 1{,}0125}$$

$$\log. 5\,000 = 3{,}6989700$$
$$-\log. 3\,360 = 3{,}5263393$$
$$0{,}1726307$$
$$\log. 1{,}0125 = 0{,}0053950$$
$$4\,n = \frac{1726307}{53950} = \mathbf{31{,}998}\ldots,$$ d. i. fast genau **32** Vierteljahre oder **8** Jahre.

Die zutreffendere Formel IV ergibt dagegen:

A.
$$n = \frac{\log. 5\,000 - \log. 3\,360}{\log. 1{,}05}$$

$$\log. 5\,000 = 3{,}6989700$$
$$-\log. 3\,360 = 3{,}5263393$$
$$0{,}1726307$$
$$\log. 1{,}05 = 0{,}0211893$$
$$n = \frac{1726307}{211893} = \mathbf{8{,}147}\ ..$$ Jahre
= 8 Jahre, 1 Monat und 23 Tage.

Logarithmische Behandlung der letzteren Gleichung:

$$\begin{aligned} \log. 0{,}1726307 &= 0{,}2371181 - 1 \\ -\log. 0{,}0211893 &= 0{,}3261167 - 2 \\ \hline \log. n &= 0{,}9110014 \\ \text{num.} &= \mathbf{8{,}147}\,..\ \text{Jahre (wie oben).} \end{aligned}$$

60. Wie viele Jahre muß ein Kapital zu $4^1/_4$ Prozent auf Zinseszinsen stehen, wenn sich dasselbe vervierfachen soll?

Anmerkung. Es sei hier an die Ausführungen zur Aufgabe 53 erinnert, aus welchen sich die hier in Betracht zu ziehende Formel ohne weiteres ergeben muß. Bezeichnet man nämlich den Grad der Vervielfältigung des Anfangswertes a wiederum mit m, so hat man, wie dort:

$$m = 1{,}0p^n$$

Woraus dann folgt:

$$n = \frac{\log. m}{\log. 1{,}0p}$$

Die gesuchte Zeit (n), innerhalb welcher ein Kapital a auf das mfache anwächst, ist somit eine Funktion von 1,0p bezw. p, und unabhängig von dem Anfangswerte a.

A.

$$n = \frac{\log. 4}{\log. 1{,}0425}$$

$$\begin{aligned} \log. 4 &= 0{,}6020600 \\ \log. 1{,}0425 &= 0{,}0180761 \end{aligned}$$

$$n = \frac{6020600}{180761} = \mathbf{33{,}307}\,..\ \text{Jahre.}$$

Division in logarithmischer Ausführung:

$$\begin{aligned} \log. 0{,}6020600 &= 0{,}7796398 - 1 \\ -\log. 0{,}0180761 &= 0{,}2571047 - 2 \\ \hline \log. n &= 1{,}5225351 \\ \text{num.} &= \mathbf{33{,}307}\ \text{Jahre (wie oben).} \end{aligned}$$

61. Ein zu $3^3/_4$ Prozent auf Zinseszinsen angelegtes Kapital ist bis zum Betrage von 9 300 Mark angewachsen. Vor wieviel Jahren betrug dasselbe noch 6 000 Mark?

A.

$$n = \frac{\log. 9\,300 - \log. 6\,000}{\log. 1{,}0375}$$

$$\frac{9\,300}{6\,000} = \frac{93}{60} = 1{,}55$$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}55 &= 0{,}1903317 \\ \log. 1{,}0375 &= 0{,}0159881 \end{aligned}$$

$$n = \frac{1903317}{159881} = \mathbf{11{,}904}\,..\ \text{Jahre.}$$

Die logarithmische Behandlung der Division ergibt:

$$\begin{aligned} \log. 0{,}1903317 &= 0{,}2795111 - 1 \\ -\log. 0{,}0159881 &= 0{,}2037968 - 2 \\ \hline \log. n &= 1{,}0757143 \\ \text{num.} &= \mathbf{11{,}904}\ \text{Jahre (wie oben).} \end{aligned}$$

Anmerkung. Wie ersichtlich, kommt in dieser Rechnung, da das Verhältnis des Anfangswertes zum Endwerte = 60 : 93 = 1 : 1,55 den Vervielfältigungsgrad bedeutet, wiederum die in Aufgabe 60 dargelegte Formel zum Ausdruck, nach welcher das Ergebnis gleichfalls lauten würde:

$$\frac{\log. 1{,}55}{\log. 1{,}0375}$$

Zusatz.

Den vorgeführten Beispielen ließen sich nun auch noch Aufgaben anreihen, in welchen Auskunft darüber verlangt wird, unter welchen Bedingungen zwei auf Zinseszinsen ausstehende Kapitalien sich gleich verhalten, wenn von dem einen alle drei Faktoren (a, p und n), von dem anderen aber nur zwei derselben gegeben sind, also der einer Gleichstellung dienende dritte Faktor (a oder p oder n) in Frage steht.

Fälle dieser Art lassen sich indessen mit Hilfe der bereits angegebenen Formeln mühelos behandeln, wie sich aus folgender Betrachtung ergibt:

1. Ist zu berechnen, wieviel ein zu p Prozent anzulegendes Kapital a betragen müsse, wenn es nach n Jahren auf die gleiche Summe anwachsen soll, wie ein Kapital a_1, welches zu p_1 Prozent n_1 Jahre aussteht, so hat man einfach nach der Formel II anzusetzen:

$$a = \frac{a_1 \,.\, 1{,}0p_1^{\,n_1}}{1{,}0p^n}$$

2. Wird der Nachweis verlangt, wie hoch der Zinsfuß p für ein Kapital a zu bemessen sei, damit dessen Endwert nach n Jahren den gleichen Betrag erreicht, bis auf welchen ein Kapital a_1 bei p_1 Prozent Zinsen in n_1 Jahren anwächst, so gestaltet sich die Rechnung gemäß der Formel III also:

$$\log.\ 1{,}0p = \frac{\log.\ a_1 \,.\, 1{,}0p_1^{\,n_1} - \log.\ a}{n}$$

3. Handelt es sich um die Frage, wie viele Jahre ein Kapital a bei einem Zinsfuße von p Prozent ausstehen müsse, um auf den gleichen Wert anzuwachsen wie ein zu p_1 Prozent angelegtes Kapital a_1 in n_1 Jahren, so ergibt die Anwendung der Formel IV:

$$n = \frac{\log.\ a_1 \,.\, 1{,}0p_1^{\,n_1} - \log.\ a}{\log.\ 1{,}0p}$$

Wie man sieht, kommt es in derartigen Fällen regelmäßig nur darauf an, vorerst die Vergleichungs-Grundlage durch Berechnung des Wertes von $A = a_1 \,.\, 1{,}0p_1^{\,n_1}$ (Formel I) zu bestimmen und diesen alsdann in die zugehörige Formel (II bezw. III oder IV) einzusetzen. Die logarithmische Behandlung der Aufgaben erfolgt genau nach den Rechnungsbeispielen 26—61.

b) Fälle ungleichmäßig (durch Zuschüsse oder Abzüge) ändernden Bestandes der Anlagen (62—68).

Obwohl die Voraussetzungen für die unter dieser Rubrik auftauchenden Probleme sich schon wesentlich von denjenigen unterscheiden, auf welchen die seither vorgeführten Rechnungen beruhen, bereitet es doch keine Schwierigkeit, an dieselben mit Hilfe der bereits in dem vorausgegangenen Abschnitte herangezogenen Formeln anzuknüpfen. Immerhin wird man dabei ein Verfahren einzuschlagen haben, welches die Vordersätze in eine direkt verwertbare Form einlenkt, also gleichsam einen Umweg betreten müssen. Eine Ausnahmestellung nimmt hier nur die Frage nach dem

Zinsfuße ein, da derselben nicht anders als mittels Rückgriffs auf höhere Gleichungen näher getreten werden kann, einen Rechnungsgang, dessen Anwendung allerdings den Rahmen, welcher unserer Anleitung gezogen ist, überschreiten würde. Hinsichtlich der praktischen Behandlung einschlagender Fälle geben im übrigen die nachfolgenden Beispiele nähere Auskunft.

62. Von einem zu $3^3/_4$ Prozent auf Zinseszinsen angelegten Kapitale im Betrage von 12 376 Mark werden nach 3 Jahren 2 204 und nach weiteren 4 Jahren 3 273 Mark zurückgezahlt. Wie hoch wird sich die Summe belaufen, welche am Ende des 12ten Jahres behufs völliger Abzahlung noch zu entrichten ist?

A. Bliebe der ursprüngliche Wert des Kapitales während der ganzen Zeitdauer der Anlage zinstragend stehen, so würde derselbe anwachsen auf:

$$A = 12\,376 \times 1{,}0375^{12}$$

Die Berechnung desselben ergibt:

log. 1,0375 = 0,0159881	log. 12 376 = 4,0925803
× 12	+ log. $1{,}0375^{12}$ = 0,1918572
319762	log. A = 4,2844375
159881	num. = 19 250,30
log. $1{,}0375^{12}$ = **0,1918572**	A = . . . **19 250,30** Mark.

Von diesem Betrage sind aber nunmehr in Abzug zu bringen:

1. Der Endwert A, der ersten, auf noch 9 Jahre ausstehenden Abzahlung, welche sich berechnet auf:

$$A_{,} = 2\,204 \times 1{,}0375^{9}$$

log. 1,0375 = 0,0159881	log. 2 204 = 3,3432116
× 9	+ log. $1{,}0375^{9}$ = 0,1438929
log. $1{,}0375^{9}$ = **0,1438929**	log. A, = 3,4871045
	num. = 3 069,76
	A, = 3 069,76 M.

2. Der Endwert A,, der zweiten, auf noch 5 Jahre ausstehenden Abzahlung, welche sich ergibt aus:

$$A_{,,} = 3\,273 \times 1{,}0375^{5}$$

log. 1,0375 = 0,0159881	log. 3 273 = 3,5149460
× 5	+ log. $1{,}0375^{5}$ = 0,0799405
log. $1{,}0375^{5}$ = **0,0799405**	log. A,, = 3,5948865
	num. = 3 934,47
	A,, = 3 934,47 M.

Zusammen: **7 004,23** Mark.

Somit beträgt der nach 12 Jahren noch zu zahlende Rest = A — (A, + A,,): . . . . **12 246,07** Mark.

Mit Hilfe der Tafel I:

$A = 12\,376 \times 1{,}5554543 =$ . . . . . 19 250,30 Mark

Davon in Abzug:

$A_{,} = 2\,204 \times 1{,}3928134 = 3\,069{,}76$ Mark

$A_{,,} = 3\,273 \times 1{,}2020998 = 3\,934{,}47$ „

7 004,23 „

$A - (A_{,} + A_{,,})$: **12 246,07** Mark.

Anmerkung. Zur Veranschaulichung des Verhältnisses kann auch noch folgende Betrachtungsweise dienen:

Der Endwert A des Anlage-Kapitales ist:

Nach 3 Jahren: $12\,376 \times 1{,}0375^3$

Nach $3 + 4 = 7$ Jahren: $(12\,376 \times 1{,}0375^3 - 2\,204) \times 1{,}0375^4$

Nach $7 + 5 = 12$ Jahren: $[(12\,376 \times 1{,}0375^3 - 2\,204) \times 1{,}0375^4 - 3\,273] \times 1{,}0375^5$

Löst man hierbei die Einzelwerte aus, so erhält man:

$$A - (A_{,} + A_{,,}) = 12\,376 \times 1{,}0375^{12} - 2\,204 \times 1{,}0375^9 - 3\,273 \times 1{,}0375^5$$

Die weitere Berechnung derselben liefert wiederum genau das oben vorgeführte Ergebnis.

63. Bei einer Erb-Auseinandersetzung ergab sich, daß ein von dem Testator auf Zinseszinsen angelegtes Kapital in 22 Jahren auf 15 464 Mark angewachsen, indessen von dem ausstehenden Kapitale nach Ablauf von 7 Jahren der Betrag von 1 700 Mark zurückgezogen worden war. Wenn nun bis zu diesem Zeitpunkte ein Zinsfuß von 4, von da an aber (während 15 Jahren) von nur $3\frac{1}{2}$ Prozent berechnet wurde: Wie groß muß dann das Anlage-Kapital gewesen sein?

A. Gesucht ist der Anfangswert a des Kapitales. Derselbe muß sich offenbar ergeben, wenn man zunächst den Vorwert ($a_{,}$) für den Zeitpunkt des Rückbezuges ermittelt, dann zu demselben den abgehobenen Betrag addiert und schließlich den Vorwert a der also erhaltenen Summe für den Zeitpunkt der Kapital-Anlage bestimmt. Die Rechnung gestaltet sich hiernach folgendermaßen:

$$a_{,} = \frac{15\,464}{1{,}035^{15}}$$

$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$
$\times 15$
747015
149403
$\log. 1{,}035^{15} = 0{,}2241045$

$\log. 15\,464 = 4{,}1893218$
$-\log. 1{,}035^{15} = 0{,}2241045$
$\log. a_{,} = 3{,}9652173$
num. $= 9\,230{,}33$
$a_{,} = 9\,230{,}33$ Mark
= Barwert vor 15 Jahren.

$$a = \frac{9\,230{,}33 + 1\,700}{1{,}04^7} = \frac{10\,930{,}33}{1{,}04^7}$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$
$\times 7$
$\log. 1{,}04^7 = 0{,}1192331$

$\log. 10\,930{,}33 = 4{,}0386333$
$-\log. 1{,}04^7 = 0{,}1192331$
$\log. a = 3{,}9194002$
num. $= 8\,306{,}15$
$a =$ **8 306,15** Mark
= Barwert vor 22 Jahren.

Anmerkung. Geht man davon aus, daß der Endwert A sich zusammensetzt aus dem Betrage, bis zu welchem das Kapital nach 7 Jahren und dann, nachdem

die erfolgte Rückzahlung in Abzug gebracht worden ist, während der folgenden 15 Jahre, also bis zum Schlusse des 22sten Jahres angewachsen war, so kann man den Vorwert a desselben auch auf dem Wege der Aufstellung einer Gleichung nachweisen. Man erhält dann im gegebenen Falle:

$$15\,464 = (a \times 1{,}04^7 - 1\,700) \times 1{,}035^{15}$$

$$a \times 1{,}04^7 = \frac{15\,464}{1{,}035^{15}} - 1\,700$$

$$a = \frac{\frac{15\,464}{1{,}035^{15}} - 1\,700}{1{,}04^7}$$

Wie ersichtlich, wird man durch die weitere (logarithmische) Ausführung dieser Rechnung zu dem nämlichen Ergebnisse wie oben gelangen.

Mit Hilfe der Tafel II:

$a_1 = 15\,464 \times 0{,}5968906 = 9\,230{,}32$ Mark.

$a = (9\,230{,}32 + 1\,700) \times 0{,}7599178 =$ **8 306,14** Mark.

64. Es will Jemand zwei Wechsel, welche einem Geschäfts-Gläubiger ausgestellt wurden und von welchen der eine auf 550 Mark, zahlbar nach 9 Monaten, der andere auf 360 Mark, zahlbar nach 5 Monaten, lautete, durch einen mit Ablauf von $1\frac{1}{4}$ Jahren fälligen Wechsel ersetzen. Wenn nun 4 Prozent Zinseszinsen gerechnet werden: Wie groß wird der Betrag dieses Ersatz-Wechsels sein müssen?

A. Hierbei handelt es sich zunächst um die Barwerte a der beiden ausgestellten Wechsel. Dieselben findet man nach dem gemeinüblichen Rechnungsverfahren (vgl. Aufgabe 45) wie folgt:

1. $\dfrac{550}{1 + \dfrac{0{,}04 \times 3}{4}} = \dfrac{550}{1 + 0{,}03} = \dfrac{550}{1{,}03} = \ldots\ldots$ 533,98 Mark

2. $\dfrac{360}{1 + \dfrac{0{,}04 \times 5}{12}} = \dfrac{360}{1 + 0{,}0167} = \dfrac{360}{1{,}0167} = \ldots$ 354,10 Mark

Summa der Barwerte: 888,08 Mark.

Der Betrag des nach $1\frac{1}{4}$ Jahren zahlbaren Ersatz-Wechsels muß also gleich sein der Summe A, bis auf welche die Barwerte a der beiden ausgestellten Wechsel in der gleichen Zeit anwachsen würden. Derselbe berechnet sich aber nach der bekannten Formel (vgl. Aufgabe 34) auf:

$888{,}08 \times 1{,}04 \times 1{,}01 =$ **932,84** Mark.

Anmerkung. Die vorliegende Aufgabe kann auch mit Hilfe einer zusammenfassenden Gleichung behandelt werden. Bezeichnet man nämlich den Betrag des nach $1\frac{1}{4}$ Jahren fälligen, den Barwerten der beiden ausgestellten Wechsel entsprechenden Ersatz-Wechsels mit A, so findet man:

$$\frac{A}{(1 + 0{,}04) \times \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)} = \frac{550}{1 + \frac{0{,}04 \times 3}{4}} + \frac{360}{1 + \frac{0{,}04 \times 5}{12}}$$

$$\frac{A}{1 + 0{,}04 \times 1 + 0{,}01} = \frac{550}{1 + 0{,}03} + \frac{360}{1 + 0{,}01666}$$

$$\frac{A}{1{,}04 \times 1{,}01} = \frac{550}{1{,}03} + \frac{360}{1{,}01666}$$

$$\frac{A}{1{,}0504} = 533{,}98 + 354{,}10$$

$A = 888{,}08 \times 1{,}0504 =$ **932,84** Mark (wie oben).

65. Es liegt eine dreifache zinsfreie Forderung vor, lautend auf 1 400 Mark, zahlbar nach 4 Jahren, 3 200 Mark, zahlbar nach 6 Jahren, und 4 800 Mark, zahlbar nach 9 Jahren. Der Schuldner will das ganze Kapital in einem Posten zurückerstatten. Wenn nun der Anspruch auf Zinseszinsen 5 Prozent beträgt: Nach wieviel Jahren kann dann die Schuld ohne Benachteiligung eines der Interessenten beglichen werden?

A. Die Summe A der drei Schuld-Kapitalien beträgt: 1 400 + 3 200 + 4 800 = 9 400 Mark. Die Barwerte a derselben berechnen sich also:

1) $a_{,} = \frac{1\,400}{1{,}05^4}$

$\log. 1{,}05 = 0{,}0211893$
$\times 4$
$\log. 1{,}05^4 = 0{,}0847572$

$\log. 1\,400 = 3{,}1461280$
$- \log. 1{,}05^4 = 0{,}0847572$
$\log. a_{,} = 3{,}0613708$
$\text{num.} = 1\,151{,}78$
$a_{,} = \ldots$ 1 151,78 Mark

2) $a_{,,} = \frac{3\,200}{1{,}05^6}$

$\log. 1{,}05 = 0{,}0211893$
$\times 6$
$\log. 1{,}05^6 = 0{,}1271358$

$\log. 3\,200 = 3{,}5051500$
$- \log. 1{,}05^6 = 0{,}1271358$
$\log. a_{,,} = 3{,}3780142$
$\text{num.} = 2\,387{,}89$
$a_{,,} = \ldots$ 2 387,89 „

3) $a_{,,,} = \frac{4\,800}{1{,}05^9}$

$\log. 1{,}05 = 0{,}0211893$
$\times 9$
$\log. 1{,}05^9 = 0{,}1907037$

$\log. 4\,800 = 3{,}6812412$
$- \log. 1{,}05^9 = 0{,}1907037$
$\log. a_{,,,} = 3{,}4905375$
$\text{num.} = 3\,094{,}12$
$a_{,,,} = \ldots$ 3 094,12 „

Summa der Barwerte a: **6 633,79** Mark.

Aus den beiden Werten A und a und dem gegebenen Zinsfuß resultiert schließlich:

$$n = \frac{\log. 9400 - \log. 6\,633{,}79}{\log. 1{,}05}$$

$\log. 9\,400 = 3{,}9731279$
$- \log. 6\,633{,}79 = 3{,}8217624$
$0{,}1513655$
$\log. 1{,}05 = 0{,}0211893$

$$n = \frac{1513655}{211893} = \mathbf{7{,}143}\ldots \text{ Jahre}$$
= 7 Jahre, 1 Monat und 22 Tage.

Anmerkung. Auf den gegenwärtigen Fall ließe sich übrigens auch noch eine andere, wenn auch nicht oder nicht wesentlich abkürzende Rechnungsweise anwenden.

Bezeichnet man nämlich die Zahl der gesuchten Jahre mit n, so ist der Barwert der zu zahlenden Summe:

$$\frac{1\,400}{1{,}05^4} + \frac{3\,200}{1{,}05^6} + \frac{4\,800}{1{,}05^9} = \frac{1\,400 + 3\,200 + 4\,800}{1{,}05^n}$$

Wird diese Gleichung durch beiderseitige Division der Zähler durch 100 vereinfacht, so erhält man:

$$\frac{14}{1{,}05^4} + \frac{32}{1{,}05^6} + \frac{48}{1{,}05^9} = \frac{14 + 32 + 48}{1{,}05^n}$$

Und wenn der links stehende Teil derselben gemäß dem in der vorausgesandten Rechnung angegebenen Verfahren logarithmisch behandelt wird:[1])

$$(\log. 14 - 4.\log. 1{,}05) + (\log. 32 - 6.\log. 1{,}05) + (\log. 48 - 9.\log. 1{,}05) = \frac{94}{1{,}05^n}$$

Woraus sich ergibt:

$$\log. 1{,}0613708 + \log. 1{,}3780142 + \log. 1{,}4905375 = \frac{94}{1{,}05^n}$$

Und mit Einsetzung der zugehörigen numeri:

$$11{,}5178 + 23{,}8789 + 30{,}9412 = \frac{94}{1{,}05^n}$$

$$66{,}3379 = \frac{94}{1{,}05^n}$$

$$1{,}05^n = \frac{94}{66{,}3379}$$

$$n = \frac{\log. 94 - \log. 66{,}3379}{\log. 1{,}05}$$

$$= \frac{1{,}9731279 - 1{,}8217624}{0{,}0211893}$$

$$= \frac{1513655}{211893} = \mathbf{7{,}143} \text{ Jahre (wie oben).}$$

66. In der Absicht, eine am Ende des ersten, zweiten, dritten und vierten Jahres fällige Schuld von 500, bezw. 350, 400 und 625 Mark im vollen Betrage auf einmal abzutragen, sieht sich der Pflichtige vor die Frage gestellt: Nach welcher Zeit (n) kann diese Tilgung, ohne daß ihm oder dem Gläubiger irgend ein Nachteil erwächst, geschehen, sofern $4^1/_4$ Prozent Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden?

A. Die Summe A der vier Schuldbeträge ist: $500 + 350 + 400 + 625 = 1\,875$ Mark. Die Barwerte a derselben ergeben sich nach folgender Rechnung:

1) $a_{,} = \frac{500}{1{,}0425} =$ . . . . 479,62 Mark

2) $a_{,,} = \frac{350}{1{,}0425^2}$

$\log. 1{,}0425 = 0{,}0180761$
$\times 2$
$\log. 1{,}0425^2 = 0{,}0361522$

$\log. 350 = 2{,}5440680$
$-\log. 1{,}0425^2 = 0{,}0361522$
$\log. a_{,,} = 2{,}5079158$
num. $= 322{,}04$
$a_{,,} =$ . . . 322,04 „

Summa: **801,66** Mark

[1]) In diesem Falle tritt infolge der Division der Zähler durch 100 an die Stelle der vor dem Komma befindlichen Ziffer 3 die Ziffer 1.

Zu übertragen: **801,66** Mark

3) $a_{,,,} = \frac{400}{1{,}0425^3}$

$\log. 1{,}0425 = 0{,}0180761$
$\times 3$
$\log. 1{,}0425^3 = 0{,}0542283$

$\log. 400 = 2{,}6020600$
$- \log. 1{,}0425^3 = 0{,}0542283$
$\log. a_{,,,} = 2{,}5478317$
$\text{num.} = 353{,}05$
$a_{,,,} = \ldots$ 353,05 „

4) $a_{,,,,} = \frac{625}{1{,}0425^4}$

$\log. 1{,}0425 = 0{,}0180761$
$\times 4$
$\log. 1{,}0425^4 = 0{,}0723044$

$\log. 625 = 2{,}7958800$
$- \log. 1{,}0425^4 = 0{,}0723044$
$\log. a_{,,,,} = 2{,}7235756$
$\text{num.} = 529{,}14$
$a_{,,,,} = \ldots$ 529,14 „

Summa der Barwerte a: **1 683,85** Mark.

Auf Grund der beiden Werte von A und a und dem Zinsfuße von 4,25 Prozent berechnet sich:

$$n = \frac{\log. 1\,875 - \log. 1\,683{,}85}{\log. 1{,}0425}$$

$\log. 1\,875 = 3{,}2730013$
$- \log. 1\,683{,}85 = 3{,}2263034$
$0{,}0466979$
$\log. 1{,}0425 = 0{,}0180761$

$$n = \frac{466979}{180761} = \mathbf{2{,}583} \text{ Jahre} = 2 \text{ Jahre und } 7 \text{ Monate.}$$

Anmerkung. Das hier beobachtete Verhältnis lässet sich auch, analog dem zu Aufgabe 65 angegebenen Verfahren, auf dem Gleichungswege darstellen, wie folgt:

$$\frac{500}{1{,}0425} + \frac{350}{1{,}0425^2} + \frac{400}{1{,}0425^3} + \frac{625}{1{,}0425^4} = \frac{500 + 350 + 400 + 625}{1{,}0425^n}$$

Und wenn man an Stelle der einzelnen Größen die oben bereits berechneten summarischen Werte derselben einsetzt:

$$1\,683{,}85 = \frac{1\,875}{1{,}0425^n}$$

$$1\,683{,}85 \times 1{,}0425^n = 1\,875$$

$$1{,}0425^n = \frac{1\,875}{1\,683{,}85}$$

$$n \,.\, \log. 1{,}0425 = \log. 1\,875 - \log. 1\,683{,}85$$

$$n = \frac{\log. 1\,875 - \log. 1\,683{,}85}{\log. 1{,}0425}$$

$$n = \frac{3{,}2730013 - 3{,}2263034}{0{,}0180761}$$

$$n = \frac{466979}{180761} = \mathbf{2{,}583} \text{ Jahre (wie oben).}$$

67. Es wird ein Anleihen im Betrage von 2 500 Mark unter der Bedingung kontrahiert, daß der Schuldner dasselbe innerhalb 10 Jahren, und zwar vom 4 ten Jahre an und darauffolgend nach zwei Zeitabschnitten

von je 3 Jahren mit 1 000, 800 und 700 Mark zurückzuzahlen, der Gläubiger aber die Zinseszinsen vorauszuerheben und von der Darlehnssumme in Abzug zu bringen hat. Wenn dieser nun $4\frac{1}{2}$ Prozent beansprucht: Welchen Betrag wird er dem Anleiher aushändigen müssen?

A. Im vorliegenden Falle kommen lediglich die Barwerte a der vom Schuldner zu entrichtenden Abschlagszahlungen in Frage, da dieselben mit der vom Gläubiger zu leistenden Zahlung gleichbedeutend sind. Jene Barwerte berechnen sich aber gemäß der Formel II also:

1) $a_{,} = \frac{1\,000}{1{,}045^4}$

$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$
$\times 4$
$\log. 1{,}045^4 = 0{,}0764652$

$\log. 1\,000 = 3{,}0000000$
$-\log. 1{,}045^4 = 0{,}0764652$
$\log. a_{,} = 2{,}9235348$
$\text{num.} = 838{,}56$
$a_{,} = \;.\;.\;.\;$ 838,56 Mark

2) $a_{,,} = \frac{800}{1{,}045^7}$

$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$
$\times 7$
$\log. 1{,}045^7 = 0{,}1338141$

$\log. 800 = 2{,}9030900$
$-\log. 1{,}045^7 = 0{,}1338141$
$\log. a_{,,} = 2{,}7692759$
$\text{num.} = 587{,}86$
$a_{,,} = \;.\;.\;.\;$ 587,86 „

3) $a_{,,,} = \frac{700}{1{,}045^{10}}$

$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$
$\times 10$
$\log. 1{,}045^{10} = 0{,}1911630$

$\log. 700 = 2{,}8450980$
$-\log. 1{,}045^{10} = 0{,}1911630$
$\log. a_{,,,} = 2{,}6539350$
$\text{num.} = 450{,}75$
$a_{,,,} = \;.\;.\;.\;$ 450,75 „

Summa: **1 877,17** Mark,

welchen Betrag der Darleiher bei Vorausbezug der Zinsen auszuzahlen hat.

Anmerkung 1. In eine einfache Gleichung zusammengefaßt, ist also das Rechnungsbild:

$$a = \frac{1\,000}{1{,}045^4} + \frac{800}{1{,}045^7} + \frac{700}{1{,}045^{10}}$$
$$a = 838{,}56 + 587{,}86 + 450{,}75$$
$$= 1\,877{,}17 \text{ Mark (wie oben).}$$

Anmerkung 2. Will man eine Kontrolle des vorliegenden Ergebnisses, so kann folgende Ausführung dienen:

Es beträgt von den einzelnen Kapital-Anlagen in Mark:

	Der Anfangswert:	Der Schlußwert:	Die Abzahlung:	Der Zinseszins-Ertrag:
Erste Periode von 4 Jahren:	2 500,00	2 981,30	— 1 000,00	481,30
Zweite „ „ 3 „ :	1 981,30	2 261,00	— 800,00	279,70
Dritte „ „ 3 „ :	1 461,00	1 667,24	— 700,00	206,24
		Summa:	2 500,00	967,24

Der Barwert der eingehenden Zinseszinsen von 967,24 ist aber, auf 10 Jahre zurückdatiert: 622,83 Mark.

Daher die Zahlung von: 2 500,00 — 622,83 = 1 877,17 Mark (wie oben).

Oder:

Am Ende der Darleihefrist würde der Gläubiger an Zinseszinsen beziehen:

Im Schlußwerte:	1 667,24 Mark
Davon ab die letzte Rückzahlung (Anlage-Kapital von 2 500 abzüglich der eingegangenen Tilgungsbeträge von 1 800 Mark)	700,00 „
Bleibt Zinseszins-Ertrag:	967,24 Mark
Diskontiert:	622,83 Mark (wie oben)

68. Um über den auf 4 755 Mark veranschlagten Betrag der Kosten einer in nicht ferner Zeit notwendig werdenden baulichen Erweiterung seines Gehöftes verfügen zu können, legt ein Landwirt bei der Sparkasse ein Kapital von 2 400 Mark auf Zinseszins zu $3\frac{3}{4}$ Prozent an. Mit Ablauf von 3 Jahren und 2 Monaten war er imstande, diesen Fond um den aus dem Verkaufe einer für den Betrieb ungünstig gelegenen Landparzelle erzielten Erlös von 1 200 Mark zu verstärken, indessen er sich nach weiteren $2\frac{1}{2}$ Jahren veranlaßt sah, zur Begleichung eines außergewöhnlichen Betriebsverlustes die Summe von 900 Mark abzuheben. Von da an blieb der Einsatz unverändert. Frage: Nach wieviel Jahren wird das angelegte Kapital bei gleichem Prozentsatze auf den Betrag des Bauaufwandes von 4 755 Mark angewachsen sein?

A. Auch in diesem Falle kommt es zunächst auf die Ermittlung der Barwerte a der angelegten Summe an. Dieselben berechnen sich, wie folgt:

Zu dem Werte der erstmaligen Anlage, welche beträgt: 2 400,00 Mark, kommen (gemäß der allgemeinen Formel II):

$$a_{,} = \frac{1\,200}{1{,}0375^{3\frac{1}{6}}}$$

$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$

$\times 19$

1438929

159881

$0{,}3037739 : 6$

$\log. 1{,}0375^{19/6} = 0{,}0506289$

$\log. 1\,200 = 3{,}0791812$

$-\log. 1{,}0375^{19/6} = 0{,}0506289$

$\log. a_{,} = 3{,}0285523$

num. = 1 067,95

$a_{,}$ = ... 1 067,95 „

Summa: **3 467,95** Mark.

Am Ende einer weiteren Periode von $2\frac{1}{2}$, also nach im ganzen $5\frac{2}{3}$ Jahren ist ein Rückbezug von 900 Mark erfolgt, dessen Barwert sich berechnet auf:

$$a_{,,} = \frac{900}{1{,}0375^{5\frac{2}{3}}}$$

$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$

$\times 17$

1119167

159881

$0{,}2717977 : 3$

$\log. 1{,}0375^{17/3} = 0{,}0905992$

$\log. 900 = 2{,}9542425$

$-\log. 1{,}0375^{17/3} = 0{,}0905992$

$\log. a_{,,} = 2{,}8636433$

num. = 730,54

$a_{,,}$ = ... 730,54 „

Reiner Barwert im ganzen: **2 737,41** Mark.

Diesem Betrage soll ein Endwert von 4 755 Mark entsprechen. Somit ist die Zeitdauer, nach welcher der Barwert auf die Summe des Endwertes angewachsen sein wird:

$$n = \frac{\log. 4\,755 - \log. 2\,737{,}41}{\log. 1{,}0375}$$

$$\begin{aligned} \log. 4\,755 &= 3{,}6771505 \\ -\log. 2\,737{,}41 &= 3{,}4373399 \\ & \quad 0{,}2398106 \\ \log. 1{,}0375 &= 0{,}0159881 \end{aligned}$$

$$n = \frac{2398106}{159881} = \mathbf{15} \text{ Jahre (fast ganz genau)}$$

vom Tage der ersten Einlage an, oder $15 - 5^2/_3 = 9^1/_3$ Jahre von dem Zeitpunkte des später erfolgten Rückbezuges an.

Anmerkung. Übersichtlich in eine Gleichung zusammengefaßt, veranschaulicht sich der Zusammenhang unter Bezugnahme auf die vorliegende logarithmische Berechnung, wie folgt:

$$\left(2\,400 + \frac{1\,200}{1{,}0375^{19/6}} - \frac{900}{1{,}0375^{17/3}}\right) \times 1{,}0375^n = 4\,755$$

$$(2\,400 + 1\,067{,}95 - 730{,}54) \times 1{,}0375^n = 4\,755$$

$$\frac{4\,755}{1{,}0375^n} = (2\,400 + 1\,067{,}95 - 730{,}54)$$

$$\frac{4\,755}{1{,}0375^n} = 2737{,}41$$

$$1{,}0375^n = \frac{4\,755}{2\,737{,}41}$$

$$n = \frac{\log. 4\,755 - \log. 2\,737{,}41}{\log. 1{,}0375}$$

Weitere Ausführung wie oben.

Sonder - Aufgaben.

(69—75.)

Die seither (Aufgaben 26—68) vorgeführten Beispiele betrafen ausnahmslos solche Fälle, welche sich auf dem Wege direkter und abschließender Anwendung der Seite 11—13 entwickelten Formeln I—IV behandeln ließen. Nun kommen aber im Leben auch solche Aufgaben vor, deren Lösung sich zwar ebenfalls auf diese Formeln gründet, indessen je nach der Fragestellung noch ergänzende oder erweiternde Begleitrechnungen erfordert. Zur Orientierung über derartige Probleme sollen die nachfolgenden Beispiele dienen.

69. Ein Kapital von 2 125 Mark stand $9^1/_2$ Jahre zu $3^1/_2$ Prozent auf Zinseszinsen. Wie hoch belief sich der Betrag der Zinsen und Zinseszinsen in diesem Zeitraume?

A. Der Endwert A des Kapitales berechnet sich nach der Formel I (vgl. Aufgabe 34. Gemeinübliches Annäherungs-Verfahren) auf:

$$2\,125 \times 1{,}035^9 \times 1{,}0175$$

$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$

$\times 9$

$\log. 1{,}035^9 = 0{,}1344627$

$\log. 1{,}0175 = 0{,}0075344$

$\log. 2\,125 = 3{,}3273589$

$+ \log. 1{,}035^9 = 0{,}1344627$

$+ \log. 1{,}0175 = 0{,}0075344$

$\log. A = 3{,}4693560$

num. $= 2\,946{,}84$

A $=$ . . **2 946,84** Mark

Hiervon abgezogen der Anfangswert a des Kapitales mit: **2 125,00** „

Bleibt ein Betrag für Zinsen und Zinseszinsen $(z + z_{,})$: **821,84** Mark.

Mit Hilfe der Tafel I:

$$2\,125 \times 1{,}3628973 \times 1{,}0175 = 2\,946{,}84 \text{ Mark}$$

Hiervon ab: $a = 2\,125{,}00$ „

$z + z_{,} =$ **821,84** Mark.

70. Wie hoch berechnet sich der Betrag der Zinseszinsen, welche ein zu $4^1/_2$ Prozent ausstehendes Kapital von 7 338 Mark in 18 Jahren einbringt?

A. Gemäß der Formel I beläuft sich der Endwert A des Kapitales auf:

$$7\,338 \times 1{,}045^{18}$$

$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$

$\times 18$

1529304

191163

$\log. 1{,}045^{18} = 0{,}3440934$

$\log. 7\,338 = 3{,}8655777$

$+ \log. 1{,}045^{18} = 0{,}3440934$

$\log. A = 4{,}2096711$

num. $= 16\,205{,}82$

A $=$ . . **16 205,82** Mark.

Somit ergibt sich ein Kapitalzuwachs in 18 Jahren von 16 205,82 — 7 338,00 = 8 867,82 Mark.

Der Betrag der auf das Anfangs-Kapital a entfallenden einfachen Zinsen z ermittelt sich mit Anwendung der Formel 1 (Zinsrechnung S. 1), wie folgt:

$$z = \frac{7\,338}{100} \times 4{,}5 \times 18$$
$$= 73{,}38 \times 81$$
$$= 5\,943{,}78 \text{ Mark.}$$

Hiernach belaufen sich die Zinseszinsen in 18 Jahren auf 8 867,82 — 5 943,78 = **2 924,04** Mark.

Anmerkung. Diese Rechnung lässet sich noch übersichtlicher gestalten, wenn man die in solcher wiederkehrenden gleichen Größen zusammenzieht. Man erhält dann für den Betrag der Zinseszinsen:

$$7\,338 \times 1{,}045^{18} - \left(7\,338 + \frac{7\,338 \times 4{,}5 \times 18}{100}\right)$$
$$7\,338 \times \left(1{,}045^{18} - 1 - \frac{4{,}5 \times 18}{100}\right)$$
$$7\,338 \times \left(2{,}2084796 - 1 - \frac{81}{100}\right)$$
$$7\,338 \times \left(2{,}2084796 - \frac{181}{100}\right)$$
$$7\,338 \times (2{,}2084796 - 1{,}81)$$
$$7\,338 \times 0{,}3984796$$
$$= \mathbf{2\,924{,}04} \text{ Mark (wie oben).}$$

71. Ein Geschäftsmann, welcher von der Kreditkasse ein Kapital zu $3^1/_4$ Prozent auf Zinseszinsen geborgt und dasselbe wiederum zu $3^3/_4$ Pro-

zent verliehen hat, erzielte nach 9 Jahren einen Profit von 325,92 Mark. Wie groß war das Leihkapital?

A. Gesucht ist hier der Anfangswert a eines Kapitales, welches in der gleichen Zeit bei verschiedenem Zinsfuße eine Differenz des Zinseszins-Ertrages von gegebener Größe liefert. Hiernach ist anzusetzen:

$$325{,}92 = a \times 1{,}0375^9 - a \times 1{,}0325^9$$

$$325{,}92 = a \times (1{,}0375^9 - 1{,}0325^9)$$

$$a = \frac{325{,}92}{1{,}0375^9 - 1{,}0325^9}$$

$$\begin{array}{rl|rl}
\log. 1{,}0375 = & 0{,}0159881 & \log. 1{,}0325 = & 0{,}0138901 \\
& \times 9 & & \times 9 \\
\log. 1{,}0375^9 = & \mathbf{0{,}1438929} & \log. 1{,}0325^9 = & \mathbf{0{,}1250109} \\
\text{num.} = & 1{,}3928132 & \text{num.} = & 1{,}3335549 \\
-\text{num.} \log. 1{,}0325^9 = & 1{,}3335549 & & \\
& 0{,}0592583 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log. 325{,}92 = & 2{,}5131110 \\
-\log. 0{,}0592583 = & 0{,}7727492 - 2 \\
\log. a = & 3{,}7403618 \\
\text{num.} = & 5\,500 \text{ (rund)}
\end{array} \qquad a = \mathbf{5\,500} \text{ Mark.}$$

Mit Hilfe der Tafel I:

$$a = \frac{325{,}92}{1{,}3928134 - 1{,}3335538} = \frac{325{,}92}{0{,}0592596} = \mathbf{5\,500} \text{ Mark.}$$

72. Welcher Zinsfuß muß für ein Kapital von 1 286 Mark beansprucht werden, wenn dasselbe mit Zinseszinsen nach 12 Jahren auf den gleichen Betrag anwachsen soll, wie ein ebenso lange zu 5 Prozent ausstehendes Kapital von 1 180 Mark?

A. Vorerst ermittelt man den Endwert A des letztgenannten Kapitales nach Maßgabe der Formel I, und zwar also:

$$A = 1\,180 \times 1{,}05^{12}$$

$$\begin{array}{rl|rl}
\log. 1{,}05 = & 0{,}0211893 & \log. 1\,180 = & 3{,}0718820 \\
& \times 12 & +\log. 1{,}05^{12} = & 0{,}2542716 \\
& 423786 & \log. A = & 3{,}3261536 \\
& 211893 & \text{num.} = & 2\,119{,}11 \\
\log. 1{,}05^{12} = & \mathbf{0{,}2542716} & A = \ldots & \mathbf{2\,119{,}11} \text{ Mark.}
\end{array}$$

Somit erhält man den gesuchten Zinsfuß p für die Anlage des erstgenannten Kapitales mittelst der Formel III wie folgt:

$$1{,}0p = \sqrt[12]{\frac{2\,119{,}11}{1\,286}}$$

$$\log. 1{,}0p = \frac{\log. 2\,119{,}11 - \log. 1\,286}{12}$$

$$\begin{array}{rl}
\log. 2\,119{,}11 = & 3{,}3261536 \\
-\log. 1\,286 = & 3{,}1092410 \\
& 0{,}2169126 : 12 \\
\log. 1{,}0p = & 0{,}0180761 \\
\text{num.} = & 1{,}0425
\end{array}$$

$$p = 100 \times (1{,}0425 - 1) = \mathbf{4{,}25} \text{ oder } \mathbf{4^1/_4} \text{ Prozent.}$$

73. Ein Kapital von 4 050 Mark steht 20 Jahre auf Zinseszins zu 3 Prozent. Nach Ablauf welcher Zeit (n) wird ein zu $3^1/_4$ Prozent angelegtes Kapital von 3 280 Mark auf die gleiche Summe wie jenes angewachsen sein?

A. Es wird hier zunächst der Endwert A des erstgenannten Kapitales festzustellen sein. Derselbe berechnet sich nach Formel I auf:

$$A = 4\,050 \times 1{,}03^{20}$$

$$\log. 1{,}03 = 0{,}0128372 \qquad \times 20 \qquad \log. 1{,}03^{20} = 0{,}2567440$$

$$\log. 4\,050 = 3{,}6074550$$
$$+ \log. 1{,}03^{20} = 0{,}2567440$$
$$\log. A = 3{,}8641990$$
$$\text{num.} = 7\,314{,}74$$

A = . . . **7 314,74** Mark.

Hiernach ergibt sich die gesuchte Zeitdauer n der Anlage des zweitgenannten Kapitales gemäß der Formel IV:

$$n = \frac{\log. 7\,314{,}74 - \log. 3\,280}{\log. 1{,}0325}$$

$$\log. 7\,314{,}74 = 3{,}8641990$$
$$- \log. 3\,280 = 3{,}5158738$$
$$0{,}3483252$$
$$\log. 1{,}0325 = 0{,}0138901$$

$$n = \frac{3483252}{138901} = \mathbf{25{,}077}\ldots \text{ Jahre} = 25 \text{ Jahre u. } 28 \text{ Tage.}$$

74. Um mit Ablauf von 25 Jahren zum Zwecke der Herstellung eines Ökonomiegebäudes über ein Kapital von rund 24 000 Mark verfügen zu können, gedenkt ein Landwirt unter der Voraussetzung eines Zinseszinsgenusses von 4 Prozent die jenem Kapitale entsprechende Summe von 9 000 Mark jetzt anzulegen. Auf Grund näherer Information bei einer Kreditkasse findet er aber, daß er auf dem bezeichneten Wege mit Sicherheit nur auf einen Zinsertrag von $3^1/_2$ Prozent rechnen kann. Um welchen Betrag bezw. um wie viele Prozente wird er unter diesen Bedingungen sein Anlage-Kapital zu vergrößern haben?

A. Die vorliegende Aufgabe ist einer einfachen Lösung fähig, wenn man das Verhältnis folgendermaßen auffaßt:

Die Vorwerte a und a, je einer in 25 Jahren zu 4 bezw. $3^1/_2$ Prozent Zinseszins ausstehenden Geldeinheit ist nach Formel II:

$$a = \frac{1}{1{,}04^{25}} \text{ und } a_, = \frac{1}{1{,}035^{25}}$$

Die logarithmische Berechnung dieser Werte ergibt:

$$\log. 1{,}04 = 0{,}01703334 \qquad \times 25 \qquad 8516670 \qquad 3406668$$
$$\log. 1{,}04^{25} = 0{,}42583350$$
$$\text{num.} = 2{,}6658361$$
$$a = \frac{1}{2{,}6658361}$$

$$\log. 1{,}035 = 0{,}01494035 \qquad \times 25 \qquad 7470175 \qquad 2988070$$
$$\log. 1{,}035^{25} = 0{,}37350875$$
$$\text{num.} = 2{,}3632446$$
$$a_, = \frac{1}{2{,}3632446}$$

Die Vorwerte verhalten sich somit zueinander wie 3 751 168 : 4 231 470 = 1 : 1,12804. Woraus folgt, daß im gegebenen Falle, um den gleichen Endwert von 24 000 Mark zu erreichen, die ursprüngliche Anlage auf 9 000 × 1,12804 = 10 152,36 Mark oder um rund **1 152** Mark zu vergrößern wäre.

In Prozenten ausgedrückt, ergibt sich diese Verstärkung des Einsatzes schon aus jener Verhältnisziffer 100 : 112,8, nach welcher der Zuschuß **12,80** Prozent betragen muß.

Anmerkung. Soll dieser Prozentsatz direkt ermittelt werden, so wird man von folgender Betrachtung ausgehen müssen: Bezeichnet man denselben mit x, so ist, wenn man zugleich die absolute Größe des Kapitales heranzieht, der Endwert A der vermehrten Anlage:

$$24\,000^{1)} = \left[9\,000 + \left(\frac{x}{100} \times 9\,000\right)\right] \times 1{,}035^{25}$$

$$9\,000 \times 1{,}04^{25} = \left[9\,000 + \left(\frac{x}{100} \times 9\,000\right)\right] \times 1{,}035^{25}$$

$$9\,000 \times \frac{1{,}04^{25}}{1{,}035^{25}} = 9\,000 + \left(\frac{x}{100} \times 9\,000\right)$$

$$\left(\frac{1{,}04}{1{,}035}\right)^{25} = 1 + \frac{x}{100}$$

$$\frac{x}{100} = \left(\frac{1{,}04}{1{,}035}\right)^{25} - 1$$

$$x = \left[\left(\frac{1{,}04}{1{,}035}\right)^{25} - 1\right] \times 100$$

Daher:

$$\begin{aligned} \log. 1{,}04 &= 0{,}0170333 \\ -\log. 1{,}035 &= 0{,}0149403 \\ &\ 0{,}0020930 \\ &\ \times 25 \\ &\ 104650 \\ &\ 41860 \\ 25\,.\,(\log. 1{,}04 - \log. 1{,}035) &= 0{,}0523250 \\ \text{num.} &= 1{,}1280413 - 1 = 0{,}12804 \\ \times 100 &= \mathbf{12{,}80} \text{ Prozent (wie oben).} \end{aligned}$$

75. Es legt Jemand bei einer Bank die Summe von 6 000 Mark auf Zinseszinsen an. Die Bank vergütet $3^1/_2$ Prozent, berechnet aber eine Kommissionsgebühr von jährlich 1 Promille, welche sie am Schlusse jeden Jahres von dem vergrößerten Kapitale in Abzug bringt. Bis zu welchem Betrage wird sich das Anlage-Kapital in 15 Jahren vergrößert haben?

A. Um diesen Verlauf rechnerisch darzutun, hat man sich zu vergegenwärtigen, daß von der bis zum Ablauf des ersten Jahres auf 6 000 × 1,035 Mark angewachsenen Summe $\frac{1}{1\,000}$ in Abzug kommen, also $\frac{999}{1\,000}$ übrig bleiben, und daß diese Reduktion sich im Laufe der Jahre im Verhältnis zur Vergrößerung des Kapitales wiederholt.

1) Genauer: 23992,53.

Im gegebenen Falle würde also die nach Abzug jener Gebühren verbleibende Summe A sich belaufen auf:

$$6\,000 \times 1{,}035^{15} \times \left(\frac{999}{1\,000}\right)^{15}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}035 &= 0{,}0149403 \\
&\quad \times 15 \\
&\quad 747015 \\
&\quad 149403 \\
\log. 1{,}035^{15} &= 0{,}2241045 \\
\log. 0{,}999 &= 0{,}9995655 - 1 \\
&\quad \times 15 \\
&\quad 49978275 \\
&\quad 9995655 \\
\log. \left(\frac{999}{1\,000}\right)^{15} &= 14{,}9934825 - 15 \\
&= 0{,}9934825 - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 6\,000 &= 3{,}7781513 \\
+ \log. 1{,}035^{15} &= 0{,}2241045 \\
+ \log. \left(\frac{999}{1\,000}\right)^{15} &= 0{,}9934825 - 1 \\
\log. A &= 4{,}9957383 - 1 \\
&= 3{,}9957383 \\
\text{num.} &= 9\,902{,}35 \\
A &= \mathbf{9\,902{,}35} \text{ Mark.}
\end{aligned}$$

Ohne den Gebühren-Abzug würde das Kapital bis zum Betrage von 10 052,08 Mark angewachsen sein, so daß auf jenen 149,73 Mark entfallen.

C. Die Anlagen werden in der Folge durch eine Reihe gleich großer und zeitlich gleichmäßig wiederkehrender Zuschüsse oder Entnahmen vermehrt oder vermindert.

Das Verfahren.

1. Entwicklung der Formeln.

Wenn das Objekt der Anlage im Sinne der überschriftlichen Andeutung von gleichmäßig eintretenden Veränderungen betroffen wird, erfordert auch der Nachweis des Verlaufes einer solchen Bewegung insofern eine von dem seither angewandten Verfahren abweichende Form, als die Zinseszinsrechnung die zeitliche Zu- oder Abnahme der ausstehenden Größen im Gesichtspunkte des Verhaltens von Renten aufzufassen hat und somit in die eigentliche Rentenrechnung übergreift. Um aber in dieser Richtung einfach und sicher zu Werke gehen zu können, bedarf es der Anknüpfung an die Lehre von den geometrischen Progressionen. Dieserhalb soll hier eine kurze Darlegung der theoretischen Grundlagen des Rechnungsganges vorausgesandt werden.

Unter einer geometrischen Progression versteht man eine Reihe von Zahlen, in welcher der Quotient je zweier aufeinander folgender Glieder ein und dieselbe Zahl ist, oder jedes Glied sich aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit dem gleichen Faktor ergibt. Diesem

Verhältnisse entspricht es, daß jedes Glied das geometrische Mittel der beiden Nachbarglieder bildet. Hiernach wird die Gestaltung einer geometrischen Reihe durch das Anfangsglied und den gleichmäßig wiederkehrenden (konstanten) Quotienten bezw. Faktor, oder den Exponenten der Progression, bestimmt.

Setzt sich eine solche Reihe ohne Aufhören fort, so nennt man sie eine unendliche, bricht sie dagegen ab, eine abgekürzte Reihe. In diesem Falle besteht ein letztes, abschließendes Glied.

Je nachdem der konstante Quotient größer oder kleiner als 1, und somit jedes folgende Glied größer oder kleiner als das vorhergehende, ist die Progression eine steigende (zunehmende) oder fallende (abnehmende).

Beispiele sind:

Steigende Progressionen:

(Konstanter Quotient = 5) . . . . $8 : 40 : 200 : 1000 : 5000 :$ . . . . .
(„ „ = 2) . . . . $1/8 : 1/4 : 1/2 : 1 : 2 :$ . . . .
(„ „ = $12/5$) . . . . $25/144 : 5/12 : 1 : 12/5 : 144/25 :$ . . . . . .

Fallende Progressionen:

(Konstanter Quotient = $1/7$) . . . . $49 : 7 : 1 : 1/7 : 1/49 :$ . . . .
(„ „ = $1/3$) . . . . $162 : 54 : 18 : 6 : 2 :$ . . . .
(„ „ = $1/2$) . . . . $1 : 1/2 : 1/4 : 1/8 : 1/16 :$ . . . .

Um eine geometrische Progression auf Grund der Angabe des Anfangsgliedes und des konstanten Quotienten bis zu jedem beliebigen Gliede zu entwickeln, hat man zu beachten, daß sich aus der Multiplikation des ersten Gliedes mit dem (konstanten) Quotienten das zweite, aus der Multiplikation des zweiten Gliedes mit dem Quotienten oder des ersten Gliedes mit der zweiten Potenz des Quotienten das dritte ergibt, und man somit bei Fortsetzung des gleichen Verfahrens, um beispielsweise das 20ste Glied zu bestimmen, das Anfangsglied mit der 19ten Potenz des Quotienten zu vervielfachen hat.

Wird das Anfangsglied mit a, und der konstante Quotient mit q bezeichnet, so gestaltet sich die Reihe also:

$$\underbrace{a}_{1} : \underbrace{a \cdot q}_{2} : \underbrace{a \cdot q^2}_{3} : \underbrace{a \cdot q^3}_{4} : \underbrace{a \cdot q^4}_{5} : \underbrace{a \cdot q^5}_{6} \; \ldots\ldots$$

Hieraus geht hervor, daß jedes einzelne dem Anfangsgliede folgende Glied der Reihe das Produkt zweier Faktoren darstellt, von welchen der eine aus dem Anfangsgliede a, und der andere aus der sovielten Potenz des Quotienten besteht, als dem betreffenden Gliede andere Glieder vorangehen.

Soll nun die Größe t (Abschluß) eines bestimmten Gliedes an der Stellenzahl n der Reihe ermittelt werden, so veranschaulicht sich das Verhältnis, wenn wiederum das erste Glied mit a, und der konstante Quotient mit q benannt wird, im Bilde der Reihe:

$$\overset{1-}{a} : \overset{2-}{a \cdot q} : \overset{3-}{a \cdot q^2} : \overset{4-}{a \cdot q^3} : \overset{5-}{a \cdot q^4} : \overset{6-}{a \cdot q^5} : \ldots : \overset{n-1-}{a \cdot q^{n-2}} : \overset{n\text{-Glied}}{a \cdot q^{n-1}}$$

Demnach ist das letzte Glied $t = a \cdot q^{n-1}$.

Im Gesichtspunkte praktischer Aufgaben (vgl. die allgemeinen Ausführungen zur Zinseszinsrechnung) ist der Quotient q gleichbedeutend mit dem Zinsfaktor 1,0p. Setzt man dann an Stelle der hier für das Anfangsglied eingeführten Bezeichnung a den Buchstaben r (Rente), so lautet die Gleichung: [1])

$$\left.\begin{cases} t = r \cdot q^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ t = r \cdot 1{,}0p^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}\right\} V.$$

In Worten: Man findet das einer gegebenen Stellenzahl n angehörende Glied t der Reihe, indem man das erste Glied (r) mit einer Potenz multipliziert, deren Grundzahl der konstante Quotient (q bezw. 1,0p), und deren Exponent gleich der Zahl der vorangehenden Glieder (n — 1), also um 1 kleiner, als die gegebene Stellenzahl ist.

Sofern von den hier vorkommenden vier Größen t, r, q und n drei gegeben sind, kann die vierte Größe leicht berechnet werden. — Es folgt nämlich aus Formel V:

$$\left.\begin{cases} r = \dfrac{t}{q^{n-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r = \dfrac{t}{1{,}0p^{n-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}\right\} V.\,a.$$

$$\left.\begin{cases} q = \sqrt[n-1]{\dfrac{t}{r}} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1{,}0p = \sqrt[n-1]{\dfrac{t}{r}} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}\right\} V.\,b.$$

$$\left.\begin{cases} n = \dfrac{\log. t - \log. r}{\log. q} + 1 \ldots\ldots\ldots \\ n = \dfrac{\log. t - \log. r}{\log. 1{,}0p} + 1 \ldots\ldots\ldots \end{cases}\right\} V.\,c.$$

Wenn von einer geometrischen Progression das Anfangsglied a, der konstante Quotient q und die Zahl der Glieder n bekannt sind, lässet sich aus diesen drei Größen auch die Summe aller n ersten Glieder der Progression bestimmen. Bezeichnet man nämlich diese Summe mit s, so ist nach obiger Darstellung:

$$s = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots\ldots + a \cdot q^{n-2} + a \cdot q^{n-1}$$

Werden nun beide Seiten dieser Gleichung mit q multipliziert, wobei zu beachten ist, daß das Produkt $a \cdot q^{n-1} \cdot q = a \cdot q^n$ sein muß, so kommt:

$$s \cdot q = a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^{n-2} + a \cdot q^{n-1} + a \cdot q^n$$

---

[1]) Der Übersicht willen sind hier, wie auch weiterhin, die einzelnen Formeln in den für Rechnungszwecke geeigneten Größen-Benennungen, und zwar mit dem Quotienten q und dem gleichbedeutenden Zinsfaktor 1,0p zusammengestellt.

Von einem Wort-Ausdruck für den Inhalt der aus den Grundformeln abgeleiteten Gleichungen soll hier und in der Folge abgesehen werden.

Wie ersichtlich, haben beide Gleichungen auf ihrer rechten Seite die Glieder $a \cdot q$, $a \cdot q^2$, $a \cdot q^3$ bis $a \cdot q^{n-1}$ gemeinsam. Subtrahiert man sodann die erste Gleichung von der zweiten, so müssen sich diese gleichen Glieder aufheben, und es folgt daher:

$$s \cdot q - s = a \cdot q^n - a, \text{ oder:}$$
$$s \cdot (q - 1) = a \cdot (q^n - 1)$$

Woraus sich weiter die sog. Summierungs-Formel ergibt, welche lautet:

$$s = \frac{a \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Wird hier wiederum an die Stelle von a die Bezeichnung r gesetzt, und auf die Summe s aller Glieder der Reihe (entsprechend dem Ausdrucke für den Endwert in der Zinseszinsrechnung) die Benennung A eingeführt, so erhält man bei dem Quotienten q bezw. dem Zinsfaktor 1,0p die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} A = \dfrac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex] A = \dfrac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{VI.}$$

Aus den vorliegenden Ergebnissen folgt der allgemein gültige Satz: Die Summe der Glieder einer geometrischen Progression wird gefunden, wenn man deren Anfangsglied (r) mit der um eine Einheit verminderten Potenz, deren Grundzahl der Quotient (q bezw. 1,0p), und deren Exponent die Stellenzahl (n) ist, multipliziert und das Produkt durch den um eine Einheit verminderten Quotienten (q — 1 bezw. 0,0p) dividiert.

Anmerkung. Wenn die zweite der oben aufgestellten Gleichungen von der ersten subtrahiert wird, ergibt sich:

$$s - s \cdot q = a - a \cdot q^n$$
$$s \cdot (1 - q) = a \cdot (1 - q^n)$$
$$s = \frac{a \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

Eine zu den gleichen Größen führende, bei fallenden Progressionen ebenfalls positiv, bei steigenden Progressionen aber negativ abschließende Rechnungsweise.

Wie aus der Formel V, so kann man auch aus der Formel VI, wenn von den konkurrierenden Größen r, q, n und A drei gegeben sind, die vierte Größe ableiten. Ausgeschlossen bleibt hier nur die Berechnung von q, da dieselbe auf eine Gleichung höheren Grades führt. So erhält man:[1]

[1]) Die Auslösung gestaltet sich also:

VI. a.

$$A = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$
$$A \cdot (q - 1) = r \cdot (q^n - 1)$$
$$r = \frac{A \cdot (q - 1)}{q^n - 1}$$

VI. b.

$$A = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$
$$A \cdot (q - 1) = r \cdot q^n - r$$
$$q^n = \frac{A \cdot (q - 1) + r}{r}$$
$$n = \frac{\log. [A \cdot (q - 1) + r] - \log. r}{\log. q}$$

$$\left.\begin{array}{l} r = \dfrac{A \,.\, (q - 1)}{q^n - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r = \dfrac{A \,.\, 0{,}0p}{1{,}0p^n - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{VI. a.}$$

$$\left.\begin{array}{l} n = \dfrac{\log.\,[A \,.\, (q - 1) + r] - \log.\, r}{\log.\, q} \ldots\ldots \\ n = \dfrac{\log.\,(A \,.\, 0{,}0p + r) - \log.\, r}{\log.\, 1{,}0p} \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{VI. b.}$$

Mittelst des oben dargelegten Verfahrens wurde gezeigt, daß die Summe A der Glieder einer geometrischen Progression, deren Anfangsglied in r und deren letztes Glied (t) in $r \,.\, q^{n-1}$ besteht, gleich $\dfrac{r \,.\, (q^n - 1)}{q - 1}$ ist. Der Dividendus dieses summarischen Ausdrucks ergibt nach Ausführung der dort bezeichneten Multiplikation: $r \,.\, q^n - r$. Zerlegt man dann die Größe q^n in: $q^{n-1} \,.\, q$, und setzt man für $r \,.\, q^{n-1}$ die Benennung t ein, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} A = \dfrac{t \,.\, q - r}{q - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A = \dfrac{t \,.\, 1{,}0p - r}{0{,}0p} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{VII.}^{1)}$$

In Worten: Ein der Summations-Formel VI gleichwertiger Ausdruck ergibt sich, wenn man von dem Produkte aus dem letzten (der Stellenzahl n angehörenden) Gliede t und dem Quotienten (q bezw. 1,0p) das erste Glied (r) subtrahiert und die entstandene Differenz durch den um eine Einheit verminderten Quotienten (q — 1 bezw. 0,0p) dividiert.

Von einer weiteren Verwendung dieser Formel zur Auslösung je einer unbekannten Größe kann hier in Rücksicht auf ihre nur untergeordnete praktische Bedeutung abgesehen werden.

Nach dieser immerhin gedrängten Darlegung der Grundformeln für die Berechnung von Renten kann nun auch der Aufgabe näher getreten werden, das Verfahren mit der bereits behandelten Zinseszinsrechnung in Zusammenhang zu bringen. Es handelt sich eben der vorangestellten Übersicht gemäß um die Fälle, in welchen Wert-Anlagen, die auch als Grundkapitalien bezeichnet werden mögen, infolge gleichmäßig wiederkehrender Zulagen oder Abzüge vor- oder rückschreitend abändern. Dem Bereiche derartiger Probleme gehört übrigens aus naheliegenden Gründen

[1]) Zu dem gleichen Ergebnisse würde man übrigens auf direktem Wege gelangen, wenn man, analog dem Verfahren, welches zur Darlegung der Formel VI geführt hat, eine dem Verlaufe der Progression folgende Gleichung für A aufstellt, diese in allen Gliedern mit q multipliziert und dann von der also gebildeten zweiten Gleichung die erstere subtrahiert. Die Differenz wäre alsdann:

$$A \,.\, q - A = t \,.\, q - r$$

$$A \,.\, (q - 1) = t \,.\, q - r$$

$$A = \frac{t \,.\, q - r}{q - 1} \quad \text{(w. o.)}$$

auch der Nachweis der Beziehungen an, welche im Verlaufe einer solchen Bewegung zwischen dem Betrage des Grundkapitals und demjenigen der seine Anlagen begleitenden regelmäßigen Zuschüsse oder Abzüge entstehen. Damit umschreibt die Aufgabe zugleich das Gebiet der Ablösungs- bezw. der Tilgungs- oder Amortisations-Rechnungen. Im Grunde genommen wird sich also die Betrachtung auf eine Kombination der Zinseszins- und der Renten-Rechnung erstrecken.

Angenommen, es sei ein Grundkapital a zu q Prozent auf Zinseszinsen angelegt, es werde demselben aber am Schlusse eines jeden Jahres eine bestimmte Summe r zugefügt, und es frage sich, auf welchen Betrag A diese Anlagen mit Ablauf von n Jahren anwachsen würden, so hat man von folgender Erwägung auszugehen:

Der ursprüngliche Betrag a wächst während der ganzen Dauerzeit n der Anlage (Formel I) auf . . . . $a \cdot q^n$

Der erste Zuschuß r steht offenbar für n — 1 Jahre aus und wächst daher auf . . . . $r \cdot q^{n-1}$

Und ebenmäßig liefern von den weiteren jährlichen Zulagen:

Die zweite, die n — 2 Jahre aussteht, ... $r \cdot q^{n-2}$

die dritte, n — 3 Jahre ausstehende, ... $r \cdot q^{n-3}$

Die vorvorletzte Einlage trägt nur noch für 2 Jahre Zinsen, wächst also auf . . . . $r \cdot q^2$

Die vorletzte Einlage liefert nur noch für 1 Jahr Zinsen und wächst daher auf . . . . $r \cdot q$

Von der letzten Einlage gehen keine Zinsen mehr ein. Dieselbe bleibt also stehen bei . . . . r

Werden nun sämtliche Beträge des Zuwachses summiert, so erhält man für den Zeitpunkt am Ende des n ten Jahres:

1) $A = a \cdot q^n + r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + r \cdot q^{n-3} + \ldots + r \cdot q^2 + r \cdot q + r$ [1])

Und wenn man die Glieder je gleicher Vorbenennung zusammenfaßt:

2) $A = a \cdot q^n + r \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots\ldots + q^2 + q + 1)$

Die in Klammern eingeschlossenen Glieder dieser Gleichung bilden eine geometrische Progression. Schreibt man dieselben in umgekehrter Reihenfolge, so kommt:

$$r \cdot (1 + q + q^2 + \ldots\ldots + q^{n-3} + q^{n-2} + q^{n-1})$$

[1]) Das Verhältnis verdeutlicht sich auch auf dem Wege des Nachweises der von Jahr zu Jahr fortschreitenden Schlußwerte. Die Anwachs-Beträge A sind nämlich:

Am Ende des ersten Jahres: . . . $a \cdot q + r$

Am Ende des zweiten Jahres:

$(a \cdot q + r) \cdot q + r$ . . . . $a \cdot q^2 + r \cdot q + r$

Am Ende des dritten Jahres:

$(a \cdot q^2 + r \cdot q + r) \cdot q + r$ . . . . $a \cdot q^3 + r \cdot q^2 + r \cdot q + r$

Am Ende des vierten Jahres:

$(a \cdot q^3 + r \cdot q^2 + r \cdot q + r) \cdot q + r$ . . . . . $a \cdot q^4 + r \cdot q^3 + r \cdot q^2 + r \cdot q + r$

Am Ende des fünften Jahres:

$(a \cdot q^4 + r \cdot q^3 + r \cdot q^2 + r \cdot q + r) \cdot q + r$ . . $a \cdot q^5 + r \cdot q^4 + r \cdot q^3 + r \cdot q^2 + r \cdot q + r$

usw.

Daher, wenn man für die Stellenzahl die n-Bezeichnung einsetzt:

$$A = a \cdot q^n + r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + r \cdot q^{n-3} + \ldots\ldots + r \cdot q^2 + r \cdot q + r$$

In dieser Reihe ist das erste Glied: r, der Quotient: q, und das letzte Glied: $r \cdot q^{n-1} = t$. Wendet man auf dieselbe die oben entwickelte Summierungs-Formel VII an, welche lautet: $s = \frac{t \cdot q - r}{q - 1}$, so ergibt sich:

$$s = \frac{(r \cdot q^{n-1} \cdot q) - r}{q - 1} = \frac{r \cdot q^n - r}{q - 1} = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Genau übereinstimmend mit der Formel VI.

Wird dann dieser zusammenfassende Ausdruck in die zuletzt aufgeführte Gleichung 2) eingesetzt, so erhält man für den Betrag des gesamten Endwertes die Formel:

$$A = a \cdot q^n + \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A = a \cdot 1{,}0p^n + \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

VIII. *Aufgaben 76—79.*

Anmerkung. Dieser Formel VIII kann übrigens noch eine Gestaltung gegeben werden, welche ihre rechnerische Anwendung wesentlich erleichtert. Es ist nämlich:

$$A = a \cdot q^n + \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$= a \cdot q^n + \frac{r \cdot q^n - r}{q - 1}$$

$$= a \cdot q^n + \frac{r \cdot q^n}{q - 1} - \frac{r}{q - 1}$$

$$= a \cdot q^n + \frac{r}{q - 1} \cdot q^n - \frac{r}{q - 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \left(a + \frac{r}{q - 1}\right) \cdot q^n - \frac{r}{q - 1} \\ A = \left(a + \frac{r}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n - \frac{r}{0{,}0p} \end{array} \right.$$

Auf Grund der Formel VIII ist man auch imstande, jede der in ihr enthaltenen fünf Größen A, a, r, q und n zu bestimmen, wenn die vier übrigen gegeben sind. Die Ermittlung von q muß hier aus früher (S. 52) angedeuteten Gründen außer Betracht bleiben. Die also abgeleiteten Formeln sind:[1])

---

[1]) Die Entwicklung derselben gestaltet sich, wie folgt:

VIII. a.

$$A = a \cdot q^n + \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{A}{q^n} = a + \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)}$$

$$a = \frac{A}{q^n} - \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)}$$

VIII. b.

$$A = a \cdot q^n + \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$A \cdot (q - 1) = a \cdot q^n \cdot (q - 1) + r \cdot (q^n - 1)$$

$$(A - a \cdot q^n) \cdot (q - 1) = r \cdot (q^n - 1)$$

$$r = \frac{(A - a \cdot q^n) \cdot (q - 1)}{q^n - 1}$$

VIII. c.

$$A = a \cdot q^n + \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$A \cdot (q - 1) = a \cdot (q - 1) \cdot q^n + r \cdot q^n - r$$

$$A \cdot (q - 1) + r = [a \cdot (q - 1) + r] \cdot q^n$$

$$q^n = \frac{A \cdot (q - 1) + r}{a \cdot (q - 1) + r}$$

$$n = \frac{\log. [A \cdot (q - 1) + r] - \log. [a \cdot (q - 1) + r]}{\log. q}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{A}{q^n} - \dfrac{r \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)} \\[2ex] a = \dfrac{A}{1{,}0p^n} - \dfrac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p} \end{array}\right\} \quad \text{VIII. a. } \textit{Aufgaben 80—82.}$$

$$\left\{\begin{array}{l} r = \dfrac{[A - (a \cdot q^n)] \cdot (q - 1)}{q^n - 1} \\[2ex] r = \dfrac{[A - (a \cdot 1{,}0p^n)] \cdot 0{,}0p}{1{,}0p^n - 1} \end{array}\right\} \quad \text{VIII. b. } \textit{Aufgaben 83—85.}$$

$$\left\{\begin{array}{l} n = \dfrac{\log. [A \cdot (q - 1) + r] - \log. [a \cdot (q - 1) + r]}{\log. q} \\[2ex] n = \dfrac{\log. [(A \cdot 0{,}0p) + r] - \log. [(a \cdot 0{,}0p) + r]}{\log. 1{,}0p} \end{array}\right\} \quad \text{VIII. c. } \textit{Aufgaben 86—88.}$$

Gemäß der Darlegung zu Formel VII, in welcher davon ausgegangen wurde, daß t (die Größe des letzten Gliedes der Reihe) $= r \cdot q^{n-1}$, und $r \cdot q^{n-1} \cdot q = r \cdot q^n = t \cdot q$ ist, kann man die Größe von A auch berechnen nach der Formel:

$$\left\{\begin{array}{l} A = a \cdot q^n + \dfrac{t \cdot q - r}{q - 1} \\[2ex] A = a \cdot 1{,}0p^n + \dfrac{t \cdot 1{,}0p - r}{0{,}0p} \end{array}\right.$$

Aus dieser Gleichung ließen sich aber weiter die Größen a, r, t und n ableiten. Hiervon soll jedoch unter Berufung auf die oben (S. 53) vorgeführte Erwägung abgesehen werden. [1])

Liegt der Fall vor, daß der jährliche Zuschuß r ebensoviel beträgt, wie das Grundkapital a, so berechnet sich der Endwert A der gesamten Anlage nach Maßgabe der Formel VIII, indem man in dieser einfach die Größe von r durch diejenige von a ersetzt. Alsdann hat man:

$$A = a \cdot q^n + \frac{a \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

[1]) Das Ergebnis würde lauten:

$$a = \frac{A}{q^n} - \frac{t \cdot q - r}{q^n \cdot (q - 1)}$$

$$r = t \cdot q - (A - a \cdot q^n) \cdot (q - 1)$$

$$t = \frac{(A - a \cdot q^n) \cdot (q - 1) + r}{q}$$

$$n = \frac{\log. [A \cdot (q - 1) - (t \cdot q - r)] - \log. a \cdot (q - 1)}{\log. q}$$

Und wenn man die beiden Glieder der rechten Seite dieser Gleichung zusammenzieht: [1])

$$A = \frac{a \cdot (q^{n+1} - 1)}{q - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \qquad \text{IX.}$$

$$A = \frac{a \cdot (1{,}0p^{n+1} - 1)}{0{,}0p} \quad \ldots\ldots\ldots \qquad \textit{Aufgabe 89.}$$

Hieraus ergibt sich weiter: [2])

$$a = \frac{A \cdot (q - 1)}{q^{n+1} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \qquad \text{IX. a.}$$

$$a = \frac{A \cdot 0{,}0p}{1{,}0p^{n+1} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \qquad \textit{Aufgabe 90.}$$

$$n = \frac{\log.[A \cdot (q - 1) + a] - \log. a}{\log. q} - 1 \quad \ldots\ldots \qquad \text{IX. b.}$$

$$n = \frac{\log.[(A \cdot 0{,}0p) + a] - \log. a}{\log. 1{,}0p} - 1 \quad \ldots\ldots \qquad \textit{Aufgabe 91.}$$

Wenn es sich aber um die Aufgabe handelt, zu zeigen, wie die Bewegung der Werte dann verläuft, wenn statt des regelmäßigen jährlichen Zuschusses zum Grundkapital am Ende eines jeden Jahres ein Rückbezug gleicher Größe stattfindet, so ist folgendes zu beachten:

Der ursprüngliche Betrag a würde, wenn keine Rückbezüge vorkämen, während der ganzen Zeitdauer n der Anlage (Formel I) fortschreitend auf $a \cdot q$, $a \cdot q^2$, $a \cdot q^3 \ldots\ldots$ und schließlich bis auf $a \cdot q^n$ anwachsen.

---

[1]) Die Formel entwickelt sich also:

$$A = a \cdot q^n + \frac{a \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$= \frac{a \cdot q^n \cdot (q - 1) + a \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$= \frac{a \cdot q^{n+1} - a \cdot q^n + a \cdot q^n - a}{q - 1}$$

$$= \frac{a \cdot q^{n+1} - a}{q - 1}$$

$$A = \frac{a \cdot (q^{n+1} - 1)}{q - 1}$$

[2]) Die betreffenden Formeln erhält man auf folgendem Wege:

IX. a.

$$A = \frac{a \cdot (q^{n+1} - 1)}{q - 1}$$

$$A \cdot (q - 1) = a \cdot (q^{n+1} - 1)$$

$$a = \frac{A \cdot (q - 1)}{q^{n+1} - 1}$$

IX. b.

$$A = \frac{a \cdot (q^{n+1} - 1)}{q - 1}$$

$$A \cdot (q - 1) = a \cdot q^{n+1} - a$$

$$A \cdot (q - 1) + a = a \cdot q^{n+1}$$

$$q^{n+1} = \frac{A \cdot (q - 1) + a}{a}$$

$$n = \frac{\log.[A \cdot (q - 1) + a] - \log. a}{\log. q} - 1$$

Erfolgt aber schon zu Ende des ersten Jahres eine Entnahme $= r$, so ist klar, daß das alsdann um diesen Betrag gekürzte Anlage-Kapital, d. i.: $a \cdot q - r$, sich bis zum Ablauf des zweiten Jahres, an welchem Zeitpunkte es auf $a \cdot q^2$ angewachsen ist, auch noch um den Betrag der Zinsen des erstmaligen Rückbezuges und um denjenigen einer erneuten Entnahme von r vermindern muß. Bezogen auf die ganze Zeitdauer n der Anlage beläuft sich aber jener Zinsanspruch gegenüber einem Endwert des Grundkapitales von $a \cdot q^n$ auf $r \cdot q^{n-1}$. Ebenmäßig ergibt sich, daß der Abzug, welcher am Schlusse des zweiten Jahres stattfindet, da derselbe noch $n - 2$ Jahre auf Zins aussteht, mit Ablauf dieser Zeit auf $r \cdot q^{n-2}$ anwachsen würde, also den Kapitalstock um diesen Betrag weiter reduzieren muß.

Setzt man diese Betrachtung fort, so findet man, daß die Verminderung des Anlage-Kapitales im vorvorletzten Jahre nur noch $r \cdot q^2$, im vorletzten Jahre $r \cdot q$, und im letzten Jahre r beträgt.

Erwägungen dieser Art sind durchaus analog denjenigen, welche bei der Entwicklung der Formel VIII vorgeführt wurden.

Man kann daher auch auf das für die ganze Dauerzeit n der Anlage zutreffende Ergebnis den allgemeinen Ausdruck anwenden:

1) $A = a \cdot q^n - r \cdot q^{n-1} - r \cdot q^{n-2} - r \cdot q^{n-3} - \ldots - r \cdot q^2 - r \cdot q - r$[1])

Zieht man in dieser Gleichung die Glieder je gleicher Vorbenennung zusammen, so kommt:

2) $A = a \cdot q^n - r \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots\ldots + q^2 + q + 1)$

Wie ersichtlich, bilden die in Klammern eingeschlossenen Glieder eine geometrische Progression, die, rückwärts gelesen, lautet:

$$r \cdot (1 + q + q^2 + \ldots\ldots + q^{n-3} + q^{n-2} + q^{n-1})$$

Wird dann diese Reihe nach dem bekannten Verfahren summiert, so erhält man wieder:

$$s = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Und wenn dieser Ausdruck für s in die obenstehende Gleichung 2 eingestellt wird:

[1]) Zur näheren Orientierung über den Hergang dient auch folgende Betrachtung (vgl. S. 54 Fußnote):

Die Schlußwerte A sind:

Am Ende des ersten Jahres: . . $a \cdot q - r$

Am Ende des zweiten Jahres:
$(a \cdot q - r) \cdot q - r =$ . . . . $a \cdot q^2 - r \cdot q - r$

Am Ende des dritten Jahres:
$(a \cdot q^2 - r \cdot q - r) \cdot q - r$ . . . . $a \cdot q^3 - r \cdot q^2 - r \cdot q - r$

Am Ende des vierten Jahres:
$(a \cdot q^3 - r \cdot q^2 - r \cdot q - r) \cdot q - r =$ . . . . $a \cdot q^4 - r \cdot q^3 - r \cdot q^2 - r \cdot q - r$

Am Ende des fünften Jahres:
$(a \cdot q^4 - r \cdot q^3 - r \cdot q^2 - r \cdot q - r) \cdot q - r$ . . $a \cdot q^5 - r \cdot q^4 - r \cdot q^3 - r \cdot q^2 - r \cdot q - r$

usw.

Also, wenn man für die Stellenzahl die n-Bezeichnung einsetzt:

$$A = a \cdot q^n - r \cdot q^{n-1} - r \cdot q^{n-2} - r \cdot q^{n-3} \ldots\ldots - r \cdot q^2 - r \cdot q - r$$

$$A = a \cdot q^n - \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \quad \ldots\ldots$$

$$A = a \cdot 1{,}0p^n - \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \quad \ldots\ldots$$

X. *Aufgaben 92—94.*

Anmerkung. Auch dieser Formel kann man eine für Rechnungszwecke bequemere Fassung geben. Dieselbe würde entsprechend den Ausführungen zu Formel VIII (S. 55 Text-Anmerkung) lauten:

$$A = \left(a - \frac{r}{q-1}\right) \cdot q^n + \frac{r}{q-1}$$

$$A = \left(a - \frac{r}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n + \frac{r}{0{,}0p}$$

Ist der Betrag der jährlichen Abzüge kleiner, als derjenige der einfachen Zinsen des Grundkapitals, so wird dieses noch weiter, jedoch gegenüber einem von Rückbezügen nicht betroffenen Verlaufe in abgeschwächtem Verhältnisse anwachsen, anderen Falles, wenn die jährlichen Entnahmen mehr als die einfachen Zinsen ausmachen, wird der Anwachs nachhaltig vermindert werden, in der Folge auf Null zurückgehen und dann bei Fortdauer der Abzüge negativ ausfallen, d. h. sich zu einem Passivum gestalten. Stellt man sich aber vor, daß der jährliche Rückbezug r gleich dem einfachen Zins des Grundkapitales sei, so muß dessen Betrag sich immer gleich, also konstant bleiben.[1])

Nach der Formel X ist es nun auch, sofern von den fünf Größen A, a, r, q und n vier gegeben sind, möglich, die fünfte zu bestimmen. Dabei findet man:[2])

---

[1]) Da nämlich der einfache Zins vom Grundkapital $= (a \cdot q) - a$, dieser Betrag aber nach der Voraussetzung auch $= r$ ist, so ergibt sich, wenn man dessen Wert in die Gleichung X einstellt:

$$A = a \cdot q^n - \frac{[(a \cdot q) - a] \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$= a \cdot q^n - \frac{a \cdot (q - 1) \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$= a \cdot q^n - a \cdot (q^n - 1)$$

$$= a \cdot q^n - (a \cdot q^n) + a$$

$$A = a.$$

[2]) Die betreffenden Formeln entwickeln sich also:

X. a.

$$A = a \cdot q^n - \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{A}{q^n} = a - \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)}$$

$$a = \frac{A}{q^n} + \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)}$$

X. b.

$$A = a \cdot q^n - \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = a \cdot q^n - A$$

$$r \cdot (q^n - 1) = (a \cdot q^n - A) \cdot (q - 1)$$

$$r = \frac{(a \cdot q^n - A) \cdot (q - 1)}{q^n - 1}$$

X. c.

$$A = a \cdot q^n - \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$A \cdot (q - 1) = a \cdot q^n \cdot (q - 1) - r \cdot (q^n - 1)$$

$$A \cdot (q - 1) = a \cdot q^n \cdot (q - 1) - r \cdot q^n + r$$

$$A \cdot (q - 1) - r = [a \cdot (q - 1) - r] \cdot q^n$$

$$q^n = \frac{A \cdot (q - 1) - r}{a \cdot (q - 1) - r}$$

$$n = \frac{\log. [A \cdot (q - 1) - r] - \log. [a \cdot (q - 1) - r]}{\log. q}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{A}{q^n} + \frac{r.(q^n - 1)}{q^n.(q - 1)} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a &= \frac{A}{1{,}0p^n} + \frac{r.(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n.0{,}0p} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{X. a. Aufgaben 95—97.}$$

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{(a.q^n - A).(q - 1)}{q^n - 1} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r &= \frac{(a.1{,}0p^n - A).0{,}0p}{1{,}0p^n - 1} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{X. b. Aufgaben 98—100.}$$

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{\log.[A.(q - 1) - r] - \log.[a.(q - 1) - r]}{\log. q} \ \ldots \\ n &= \frac{\log.[(A.0{,}0p) - r] - \log.[(a.0{,}0p) - r]}{\log. 1{,}0p} \ \ldots \end{aligned}\right\} \text{X. c. Aufgaben 101—103.}$$

Die Anwendung der Formeln VIII und X ändert nun freilich dann wieder ab, wenn vorausgesetzt ist, daß die jährlichen Zuschüsse oder Abzüge am Anfange, statt am Ende eines jeden Jahres stattfinden. Wie ein solches Verhältnis aufgefaßt werden muß, lässet sich mit Hilfe der oben (S. 54 und 57) vorgeführten Betrachtungen unschwer dartun.

Der ursprüngliche Betrag a würde, wenn weder Zulagen noch Rückbezüge erfolgen, während der ganzen Dauerzeit n der Anlage anwachsen auf . . . . $a.q^n$

Tritt aber schon mit Beginn des ersten Jahres ein Zuschuß oder Abzug um den vorgesehenen Betrag von r ein, so ist zu beachten, daß die betreffenden Beträge auch schon von diesem Zeitpunkte an als zinstragend angesehen werden müssen, also gleichwie das Anlage-Kapital noch n Jahre auf Zinsen stehen, und daß demgemäß für sie, je nachdem es sich um Zulagen (+) oder Entnahmen (—) handelt, am Schlusse der ganzen Zeit der Anlage zu berechnen sind . . . . $\pm r.q^n$

Analog den Ergebnissen früherer Erörterungen hat man dann:
Vom Beginne des zweiten Jahres . . . . $\pm r.q^{n-1}$
" " " dritten " . . . . $\pm r.q^{n-2}$
usw. Schließlich:
Vom Beginne des vorvorletzten Jahres . . . . $\pm r.q^3$
" " " vorletzten " . . . . $\pm r.q^2$
" " " letzten " . . . . $\pm r.q$

In diesem Verlaufe kommt wiederum eine geometrische Progression zum Ausdruck. Werden aber deren Glieder nach bekanntem Verfahren zusammengezogen, in umgekehrter Reihenfolge aufgeführt und der Be-

nennung des Endwertes der ursprünglichen Anlage angeschlossen, so entsteht:

$$A = a \cdot q^n \pm r \cdot (q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n)$$ [1]

Wenn dann auf die in der rechten Seite der Gleichung enthaltene Reihe die Summierungs-Formel VII angewendet wird, so erhält man:

$$s = \frac{(q^n \cdot q) - q}{q - 1} = \frac{q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Und nach Einstellung dieses Wertes in obige Gleichung:

$$A = a \cdot q^n \pm \frac{r \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A = a \cdot 1{,}0p^n \pm \frac{r \cdot 1{,}0p \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \quad \ldots\ldots\ldots$$

XI. *Aufgaben 104 u. 108.*

Anmerkung. Auch dieser Gleichung kann eine für die praktische Anwendung noch geeignetere Form gegeben werden. Aus derselben ergibt sich nämlich vorerst:

$$A = a \cdot q^n \pm \frac{r \cdot q \cdot q^n - r \cdot q}{q - 1}$$

$$A = a \cdot q^n \pm \frac{r \cdot q \cdot q^n}{q - 1} \mp \frac{r \cdot q}{q - 1}$$

Daraus folgt aber:

1) Für den Fall regelmäßiger Zuschüsse:

$$A = \left(a + \frac{r \cdot q}{q - 1}\right) \cdot q^n - \frac{r \cdot q}{q - 1}$$

$$A = \left(a + \frac{r \cdot 1{,}0p}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n - \frac{r \cdot 1{,}0p}{0{,}0p}$$

2) Für den Fall regelmäßiger Abzüge:

$$A = \left(a - \frac{r \cdot q}{q - 1}\right) \cdot q^n + \frac{r \cdot q}{q - 1}$$

$$A = \left(a - \frac{r \cdot 1{,}0p}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n + \frac{r \cdot 1{,}0p}{0{,}0p}$$

Vergleicht man das Ergebnis der Formel XI mit demjenigen der Formeln VIII und X, so sieht man, daß ersteres in der Berechnung der

---

[1]) Der Zusammenhang kann auch unter Bezugnahme auf bereits vorausgegangene Ausführungen (S. 54 und 58) durch die Feststellung der am Anfange und am Ende der einzelnen Jahre entstandenen Größen von A dargelegt werden. Darnach ist der Bestand:

Am Anfange des ersten Jahres: $a \pm r$
„ „ „ zweiten „ : $a \cdot q \pm r \cdot q \pm r$
„ Ende „ „ „ : $(a \cdot q \pm r \cdot q \pm r) \cdot q$
„ Anfange des dritten „ : $a \cdot q^2 \pm r \cdot q^2 \pm r \cdot q \pm r$
„ Ende „ „ „ : $(a \cdot q^2 \pm r \cdot q^2 \pm r \cdot q \pm r) \cdot q$
usw.

Und wenn man für die Stellenzahl die n-Bezeichnung einsetzt:

$$A = a \cdot q^n \pm r \cdot q^n \pm r \cdot q^{n-1} \pm r \cdot q^{n-2} \pm \ldots \pm r \cdot q^3 \pm r \cdot q^2 \pm r \cdot q$$
$$= a \cdot q^n \pm r \cdot (q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n)$$

jährlichen Zuschüsse oder Abzüge einen Vorsprung hat, welcher in der Verstärkung des Dividendus um q bezw. 1,0p zum Ausdruck kommt. Dementsprechend müssen sich dann auch die Formeln für die abgeleiteten Größen von den Gleichungen der früheren analogen Fälle unterscheiden. In der Tat erhält man:

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{A}{q^n} \mp \frac{r \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)} = \frac{A}{q^n} \mp \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{n-1} \cdot (q - 1)} \quad \ldots \\ a &= \frac{A}{1{,}0p^n} \mp \frac{r \cdot 1{,}0p \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p} = \frac{A}{1{,}0p^n} \mp \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1} \cdot 0{,}0p} \end{aligned}\right\} \text{XI. a.}$$

Aufgaben 105 u. 109.

$$\left\{\begin{aligned} r &= \frac{(A - a \cdot q^n) \cdot (q - 1)}{q \cdot (q^n - 1)} \text{ bezw. } \frac{(a \cdot q^n - A) \cdot (q - 1)}{q \cdot (q^n - 1)} \quad \ldots \\ r &= \frac{(A - a \cdot 1{,}0p^n) \cdot 0{,}0p}{1{,}0p \cdot (1{,}0p^n - 1)} \text{ bezw. } \frac{(a \cdot 1{,}0p^n - A) \cdot 0{,}0p}{1{,}0p \cdot (1{,}0p^n - 1)} \quad \ldots \end{aligned}\right\} \text{XI. b.}$$

Aufgaben 106 u. 110.

$$\left\{\begin{aligned} n &= \frac{\log. [A \cdot (q - 1) \pm r \cdot q] - \log. [a \cdot (q - 1) \pm r \cdot q]}{\log. q} \quad \ldots \\ n &= \frac{\log. [(A \cdot 0{,}0p) \pm r \cdot 1{,}0p] - \log. [(a \cdot 0{,}0p) \pm r \cdot 1{,}0p]}{\log. 1{,}0p} \quad . \end{aligned}\right\} \text{XI. c.}$$

Aufgaben 107 u. 111.

Sonder-Aufgaben 112—118.

Um schließlich die Frage zu beantworten, wie die jährlichen Abzüge r zu ermitteln seien, deren es bedarf, um ein bestimmtes Grundkapital a samt seinen Zinsen innerhalb einer gegebenen Frist von n Jahren auf Null zu reduzieren bezw. gerade aufzuwiegen, also abzustoßen oder zu tilgen, so wird man sich, wenn die Zahlungen am Ende jeden Jahres erfolgen, der Formel X zu bedienen haben, indem man in derselben einfach den Wert von A durch 0 ersetzt, so daß die beiden rechtsseitigen Glieder derselben einander gleich werden. (Berechnung von Jahresraten oder Annuitäten.) Alsdann hat man:

$$0 = a \cdot q^n - \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

oder:

$$\left\{\begin{aligned} a \cdot q^n &= \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \quad \ldots \\ a \cdot 1{,}0p^n &= \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \quad \ldots \end{aligned}\right\} \text{XII.}$$

Aufgaben 119—123.

In dieser Gleichung sind die Beziehungen zwischen den Größen a, r, q und n ausgedrückt. Daraufhin ist man aber imstande, jede dieser

vier Größen zu bestimmen, wenn deren drei gegeben sind. Auf diesem Wege ergibt sich: [1])

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)} \quad \ldots\ldots \qquad \text{XII. a.}$$

$$a = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p} \quad \ldots\ldots$$

Aufgaben 124—126.

$$r = \frac{a \cdot q^n \cdot (q - 1)}{q^n - 1} \quad \ldots\ldots \qquad \text{XII. b.}$$

$$r = \frac{a \cdot 1{,}0p^n \cdot 0{,}0p}{1{,}0p^n - 1} \quad \ldots\ldots$$

Aufgaben 127—133.

$$n = \frac{\log. r - \log. [r - a \cdot (q - 1)]}{\log. q} \quad \ldots\ldots \qquad \text{XII. c.}$$

$$n = \frac{\log. r - \log. [r - (a \cdot 0{,}0p)]}{\log. 1{,}0p} \quad \ldots\ldots$$

Aufgaben 134—140.

Anmerkung. Mittelst der Formel XII. b. ist es übrigens auch möglich, gegebenen Falles den Jahresbetrag zu bestimmen, welchen ein zu q Prozent auf n Jahre ausstehendes und der Amortisation unterworfenes Anlage-Kapital a außer zur Verzinsung zur regelmäßigen Tilgung erfordert. (Tilgungs- oder Amortisationsrate.)

Dem Inhalte der Formel XII. b. liegt die Voraussetzung einer Kombination beider Elemente zu Grunde. Dieser entspricht es, daß allda das ganze Anlage-Kapital a mit seinen Zins- und Tilgungs-Ansprüchen in die Berechnung einbezogen wurde. Faßt man aber lediglich die Amortisation ins Auge, so ist folgendes zu beachten: Der jährliche Betrag derselben bleibt sich nominell während der ganzen Dauerzeit der Anlage gleich. Faktisch wächst er aber dadurch, daß sich die Zinsforderungen des Kapitales mit den fortschreitenden Abtragungen verringern und somit die entsprechenden Beträge bei konstant gleicher Gesamtleistung (r) dem Tilgungsfonds zugute kommen. Der Anwachs aller dieser Tilgungsraten wird

---

[1]) Die Auslösung vollzieht sich wie folgt:

XII. a.

$$a \cdot q^n = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)}$$

XII. b.

$$a \cdot q^n = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$a \cdot q^n \cdot (q - 1) = r \cdot (q^n - 1)$$

$$r = \frac{a \cdot q^n \cdot (q - 1)}{q^n - 1}$$

XII. c.

$$a \cdot q^n = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$a \cdot q^n \cdot (q - 1) = r \cdot (q^n - 1)$$

$$a \cdot q^n \cdot (q - 1) = r \cdot q^n - r$$

$$a \cdot (q - 1) = r - \frac{r}{q^n}$$

$$\frac{r}{q^n} = r - a \cdot (q - 1)$$

$$q^n = \frac{r}{r - [a \cdot (q - 1)]}$$

$$n = \frac{\log. r - \log. [r - a \cdot (q - 1)]}{\log. q}$$

daher so groß sein müssen, daß deren Endwert nach n Jahren und bei q Prozent Zinsen genau das zu amortisierende Kapital a mit seinen Zinsen $= a \cdot q^n$ ergibt. Bezeichnet man aber diesen Teil der Jahresleistung mit r_m (Amortisation), den Barwert des nach n Jahren abzutragenden Kapitales $\left(\frac{a \cdot q^n}{q^n}\right)$ mit a, und setzt man diesen Wert in die obige Formel XII. b. ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} r_m &= \frac{a \cdot (q-1)}{q^n - 1} \\ r_m &= \frac{a \cdot 0.0p}{1.0p^n - 1} \end{aligned}\right\}$$

Auf diese Weise ergibt sich der absolute Betrag der jährlichen Tilgungssumme. Soll aber der prozentuale Betrag derselben in gleichem Rechnungsgange direkt ermittelt werden, so hat man, statt des Wertes von a, nur die Zahl 100 einzustellen.

Die Formel XII. c. bezieht sich, wie besonders zu beachten ist, auf das Vorkommen, daß die regelmäßig wiederkehrenden Zahlungen mit den Anforderungen eines ursprünglich angelegten und zu amortisierenden Fonds im Zusammenhange stehen. Diesem Verhältnisse entspricht es, daß unter der Bezeichnung r die Annuitäten im ganzen, also die Zinsen und die Amortisationsraten begriffen sind. In dem hiervon abweichenden Falle, wenn, wie beispielsweise bei fortlaufenden Sparkassen-Einlagen, die Zahlungen nicht an ein gegebenes Grundkapital anschließen, kann an dessen Stelle für die Berechnung der Zahl der Jahre (n) nur der aus dem Betrage der Einlagen bei einem gegebenen Zinsfuße erwachsende Endwert in Frage kommen. Die Rechnung gestaltet sich dann unter Rückgriff auf die Gleichung XII ($a \cdot 1{,}0p^n = A$) nach der Formel [1])

$$n = \frac{\log. \left(\frac{A \cdot 0{,}0p}{r} + 1\right)}{\log. 1{,}0p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{XII. } c_{,}.$$

Aufgabe 141.

Zur Ergänzung der Beispiele, welche sich auf die Formel XII. c. beziehen, soll übrigens in der betreffenden Gruppe eine, das in Betracht gezogene besondere Vorkommen beleuchtende Rechnungs-Aufgabe angeschlossen werden.

Liegt aber der Fall vor, daß die Abtragungen am Anfange eines jeden Jahres stattfinden, so ändern die betreffenden Formeln im Sinne der oben (S. 60) gegebenen Andeutungen ab, und erhält man unter Rückgriff auf die Formel XI und analog dem in der Gleichung XII und in deren Ableitungen ausgedrückten Verhältnisse:

[1]) Die Ableitung der Formeln XII. c, und XIII. c, aus XII und XIII geschieht also:

$$\begin{aligned} A &= \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \\ A \cdot (q-1) &= r \cdot q^n - r \\ r \cdot q^n &= A \cdot (q-1) + r \\ q^n &= \frac{A \cdot (q-1)}{r} + 1 \\ n &= \frac{\log. \left(\frac{A \cdot (q-1)}{r} + 1\right)}{\log. q} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A &= \frac{r \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \\ A \cdot (q-1) &= r \cdot q \cdot q^n - r \cdot q \\ r \cdot q \cdot q^n &= A \cdot (q-1) + r \cdot q \\ q^n &= \frac{A \cdot (q-1)}{r \cdot q} + 1 \\ n &= \frac{\log. \left(\frac{A \cdot (q-1)}{r \cdot q} + 1\right)}{\log. q} \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{aligned} a \cdot q^n &= \frac{r \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \\ a \cdot 1{,}0p^n &= \frac{r \cdot 1{,}0p \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \end{aligned}\right\} \quad \text{XIII. } \textit{Aufgabe 142.}$$

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{n-1} \cdot (q - 1)} \\ a &= \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1} \cdot 0{,}0p} \end{aligned}\right\} \quad \text{XIII. a. } \textit{Aufgabe 143.}$$

$$\left\{\begin{aligned} r &= \frac{a \cdot q^n \cdot (q - 1)}{q \cdot (q^n - 1)} \\ r &= \frac{a \cdot 1{,}0p^n \cdot 0{,}0p}{1{,}0p \cdot (1{,}0p^n - 1)} \end{aligned}\right\} \quad \text{XIII. b. } \textit{Aufgabe 144.}$$

$$\left\{\begin{aligned} n &= \frac{\log. r - \log. [r \cdot q - a \cdot (q - 1)]}{\log. q} + 1 \\ n &= \frac{\log. r - \log. (r \cdot 1{,}0p - a \cdot 0{,}0p)}{\log. 1{,}0p} + 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{XIII. c. [1] } \textit{Aufgabe 145.}$$

Anmerkung. Für den Betrag der Amortisations- oder Tilgungsraten würde sich obiger Darstellung gemäß ergeben:

$$r_m = \frac{a \cdot (q - 1)}{q \cdot (q^n - 1)}$$

$$r_m = \frac{a \cdot 0{,}0p}{1{,}0p \cdot (1{,}0p^n - 1)}$$

Analog den Ausführungen zur Gleichung XII. c. soll hier noch darauf hingewiesen werden, wie sich das Verhältnis (n) in dem Falle von Sparkassen-Einlagen, wenn die Zahlungen am Anfange eines jeden Jahres erfolgen, darstellt nach der Formel:

$$n = \frac{\left(\log. \frac{A \cdot 0{,}0p}{r \cdot 1{,}0p} + 1\right)^{2)}}{\log. 1{,}0p} \quad \text{XIII. } c_1. \ \textit{Aufgabe 146.}$$

Das Beispiel der Anwendung dieser Gleichung findet sich in einem Zusatz zu den Aufgaben der Gruppe XIII. c.

Im Rückblicke auf den Gang der im vorliegenden Abschnitt enthaltenen Ausführungen sei noch daran erinnert, daß der einleitende Teil derselben, reichend über die Seiten 49—53, in welchem die Formeln V—VII entwickelt wurden, lediglich die Bestimmung trug, über die theoretischen Grundlagen des Verfahrens zu orientieren, daß dagegen erst die anschließenden weiteren Darlegungen (Seite 53—65) dazu dienten, direkt

[1] Dieser Formel (XIII. c.) kann übrigens auch die Fassung gegeben werden:

$$n = \frac{\log. r \cdot q - \log. [r \cdot q - a \cdot (q - 1)]}{\log. q}$$

[2] Siehe Fußnote Seite 64.

verwertbare Leitsätze für die Anwendung zu konstruieren, daß daher für praktische Rechnungszwecke nur die Formeln VIII—XIII in Betracht zu ziehen sind.

Sonder-Aufgaben: 147—157.

2. Rechnungs-Aufgaben.

a) Erste Reihe (76—88).

(Anwendung der Formeln VIII—VIII. c.)

Erste Gruppe.

(Gegeben: a, p, r und n. Gesucht: A. Anwendung der Formel VIII:

$$A = a \cdot 1{,}0p^n + \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}.)$$

76. Ein Kapital von 3 500 Mark steht zu 4 Prozent auf Zinseszinsen aus. Wenn nun am Ende eines jeden Jahres noch 150 Mark zugelegt werden: Auf welchen Betrag wird dann das Anfangs-Kapital nach 20 Jahren angewachsen sein?

A. $$A = 3\,500 \times 1{,}04^{20} + \frac{150 \times (1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04}$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333(4)$
$\times 20$
$\log. 1{,}04^{20} = 0{,}3406668$
$\text{num.} \log. 1{,}04^{20} = 2{,}1911231$
$\text{num.} \log. 1{,}04^{20} - 1 = 1{,}1911231$
$\log. (1{,}04^{20} - 1) = 0{,}0759566$
$\log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$

$\log. 3\,500 = 3{,}5440680$
$+ \log. 1{,}04^{20} = 0{,}3406668$
$3{,}8847348$
$\text{num.} = 7\,668{,}93$ . . . 7 668,93 M.

$\log. 150 = 2{,}1760913$
$+ \log. (1{,}04^{20} - 1) = 0{,}0759566$
$2{,}2520479$
$- \log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$
$3{,}6499879$
$\text{num.} = 4\,466{,}71$ . . + 4 466,71 „

$A = \mathbf{12\,135{,}64}$ M.

Wie weit für die Lösung derartiger Aufgaben die Umformung der obenstehenden Gleichung (Vid. Anmerkung auf S. 55) Erleichterung gewährt, kann an dem gegebenen Beispiele gezeigt werden. Darnach würde die Rechnung lauten:

$$A = \left(3\,500 + \frac{150 \times 100}{4}\right) \times 1{,}04^{20} - \frac{150}{0{,}04}$$

$3\,500 + \frac{15\,000}{4} = 3\,500 + 3\,750$ . . . $= 7\,250$

$\times$ num. log. $1{,}04^{20}$ (wie oben ausgeführt $= 2{,}1911231$)

$= 7\,250 \times 2{,}1911231$ . . . . . . $= 15\,885{,}64$

$- \frac{150}{0{,}04} = - \quad 3\,750{,}00$

$A = \mathbf{12\,135{,}64}$ Mark (wie oben).

Der offenbare Vorteil dieser Rechnungsweise besteht also darin, daß dieselbe nur eine Logarithmierung ($1{,}04^{20}$) erfordert.

77. Der Besitzer eines zu $3^1/_2$ Prozent angelegten Vermögens von 5 000 Mark war im Stande, den Betrag dieses Kapitals am Schlusse eines jeden Jahres außer den jährlichen Zinsen um noch 600 Mark zu vermehren. Wenn sich nun diese Anlagen bis zu seinem nach 16 Jahren erfolgten Ableben fortsetzten: Über welche Summe konnten dann seine Erben verfügen?

A. $$A = 5\,000 \times 1{,}035^{16} + \frac{600 \times (1{,}035^{16} - 1)}{0{,}035}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}035 &= 0{,}0149403 \\
&\times 16 \\
&\overline{896418} \\
&149403 \\
\log. 1{,}035^{16} &= 0{,}2390448 \\
\text{num.} \log. 1{,}035^{16} &= 1{,}7339828 \\
\text{num.} \log. 1{,}035^{16} - 1 &= 0{,}7339828 \\
\log. (1{,}035^{16} - 1) &= 0{,}8656859 - 1 \\
\log. 0{,}035 &= 0{,}5440680 - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 5\,000 &= 3{,}6989700 \\
+ \log. 1{,}035^{16} &= 0{,}2390448 \\
&\overline{3{,}9380148} \\
\text{num.} &= 8\,669{,}91 \ldots \quad 8\,669{,}91 \text{ M} \\
\log. 600 &= 2{,}7781513 \\
+ \log. (1{,}035^{16} - 1) &= 0{,}8656859 - 1 \\
&\overline{2{,}6438372} \\
- \log. 0{,}035 &= 0{,}5440680 - 2 \\
&\overline{4{,}0997692} \\
\text{num.} &= 12\,582{,}56 \ldots + 12\,582{,}56 \text{ „} \\
& \qquad A = \mathbf{21\,252{,}47} \text{ M.}
\end{aligned}$$

Nach dem vereinfachten Rechnungsverfahren und zur Kontrolle:

$$A = \left(5\,000 + \frac{600 \times 100}{3{,}5}\right) \times 1{,}035^{16} - \frac{600}{0{,}035}$$

$$\begin{aligned}
5\,000 + \frac{60\,000}{3{,}5} = 5\,000 + 17\,142{,}86 &= 22\,142{,}86 \\
\times \text{num.} \log. 1{,}035^{16} \text{ (wie oben berechnet} &= 1{,}7339828) \\
= 22\,142{,}86 \times 1{,}7339828 \ \ldots\ldots &= 38\,395{,}33 \\
- \frac{600}{0{,}035} &= -17\,142{,}86 \\
&= \mathbf{21\,252{,}47} \text{ Mark (wie oben).}
\end{aligned}$$

78. Um die Mittel zur Bestreitung der Kosten der beruflichen Ausbildung seines zur Zeit 6 jährigen Sohnes bereit halten zu können, übergibt ein Beamter der Sparkasse die Summe von 2 400 Mark zu $3^1/_4$ Prozent auf Zinseszins, mit dem Vorhaben, diesem Betrage am Ende eines jeden Vierteljahres 75 Mark zuzulegen. Bis auf welche Summe würden sich diese Anlagen samt ihren Zinsen an dem Zeitpunkte des Bedarfsfalles, für welchen ein Alter des Sohnes von 18 Jahren angenommen wird, vermehrt haben? (Berechnung nach dem im bürgerlichen Leben gebräuchlichen Verfahren. Vgl. Aufgabe 33.)

A.

$$A = 2\,400 \times \left(1 + 0{,}0\frac{3{,}25}{4}\right)^{4 \times 12} + \frac{75 \times \left(\left(1 + 0{,}0\frac{3{,}25}{4}\right)^{4 \times 12} - 1\right)}{0{,}0\frac{3{,}25}{4}}$$

$\log. 1 + 0{,}0\frac{3{,}25}{4} = \log. 1{,}008125$
$= 0{,}0035144$
$\times 48$
281152
140576
$\log. 1{,}008125^{48} = 0{,}1686912$
$\text{num. log. } 1{,}008125^{48} = 1{,}4746575$
$\text{num. log. } 1{,}008125^{48} - 1 = 0{,}4746575$
$\log. (1{,}008125^{48} - 1) = 0{,}6763804 - 1$
$\log. 0{,}008125 = 0{,}9098234 - 3$

$\log. 2\,400 = 3{,}3802112$
$+ \log. 1{,}008125^{48} = 0{,}1686912$
3,5489024
num. = 3 539,18

$\log. 75 = 1{,}8750613$
$+ \log. (1{,}008125^{48} - 1) = 0{,}6763804 - 1$
1,5514417
$- \log. 0{,}008125 = 0{,}9098234 - 3$
3,6416183
num. = 4 381,45

num. 3 539.18 Mark
+ num. 4 381,45 „
A = **7 920.63** Mark.

Nach der erleichternden Rechnung:

$$A = \left(2\,400 + \frac{75 \times 100}{0{,}8125}\right) \times 1{,}008125^{48} - \frac{75}{0{,}008125}$$

$$= 2\,400 + \frac{7\,500}{0{,}8125} = 2\,400 + 9\,230{,}77 = 11\,630{,}77$$

$\times$ num. log. $1{,}008125^{48}$ (laut obig. Berechnung) = 1,4746575)
= 11 630,77 $\times$ 1,4746575 . . . . = 17 151,40
$- \frac{75}{0{,}008125} = -$ 9 230,77
A = **7 920.63** Mark (wie oben).

79. Bei einer Kreditbank wurde ein Kapital von 7 200 Mark zu $3\frac{3}{4}$ Prozent auf Zinseszinsen angelegt. Wenn nun der Bankgläubiger fortgesetzt regelmäßig am Ende eines jeden Jahres dieser Anlage noch den Betrag von 350 Mark zufügte: Welche Summe hat derselbe von der Bank mit Ablauf von 9 Jahren und 4 Monaten ($9\frac{1}{3}$ Jahren) zurückzufordern? (Anwendung der gemeinüblichen Rechnungsweise. Vgl. Aufgabe 34.)

A.

$$A = 7\,200 \times 1{,}0375^{9} \times 1{,}0125 + \frac{350 \times [(1{,}0375^{9} \times 1{,}0125) - 1]}{0{,}0375}$$

$$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$$
$$\times 9$$
$$\log. 1{,}0375^9 = 0{,}1438929$$
$$\log. 1{,}0125 = 0{,}0053950$$
$$\log. 1{,}0375^9 \times \log. 1{,}0125 = 0{,}1492879$$
$$\text{num.} \log. 1{,}0375^9 \times \log. 1{,}0125 = 1{,}4102233$$
$$\text{num.} \log. (1{,}0375^9 \times \log. 1{,}0125) - 1 = 0{,}4102233$$
$$\log. [(1{,}0375^9 \times \log. 1{,}0125) - 1] = 0{,}6130203 - 1$$
$$\log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$$

$$\log. 7\,200 = 3{,}8573325$$
$$+ \log. 1{,}0375^9 = 0{,}1438929$$
$$+ \log. 1{,}1025 = 0{,}0053950$$
$$4{,}0066204$$
$$\text{num.} = 10\,153{,}60$$

$$\log. 350 = 2{,}5440680$$
$$+[(\log. 1{,}0375^9 \times \log. 1{,}0125) - 1] = 0{,}6130203 - 1$$
$$2{,}1570883$$
$$- \log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$$
$$3{,}5830570$$
$$\text{num.} = 3\,828{,}75$$

num. 10 153,60 Mark
+ num. 3 828,75 „
A = **13 982,35** Mark.

Mit Hilfe der Tafel I:

$$A = 7\,200 \times 1{,}3928134 \times 1{,}025 = 7\,200 \times 1{,}4102233 = 10\,153{,}60$$
$$+ \frac{350 \times 0{,}4102233}{0{,}0375} = \frac{143{,}578155}{0{,}0375} \ldots\ldots = 3\,828{,}75$$
$$\mathbf{13\,982{,}35} \text{ M.}$$

Das gleiche Ergebnis würde man wiederum mit Anwendung der ungeformten Gleichung erhalten. Denn es ist:

$$A = \left[\left(7\,200 + \frac{35\,000}{3{,}75}\right) \times 1{,}0375^9 \times 1{,}0125\right] - \frac{35\,000}{3{,}75}$$
$$= [(7\,200 + 9\,333{,}33) \times 1{,}4102233] - 9\,333{,}33$$
$$= (16\,533{,}33 \times 1{,}4102233) - 9\,333{,}33$$

A = **13 982,35** Mark (wie oben).

Auf Grund der allgemeinen, absolut zutreffenderen Formel (vgl. Aufgabe 34), welche einfach eine Potenzierung der Größe von 1,0375 mit $^{28}/_3$ erfordert, ergibt sich für A ein etwas geringerer (dem $^1/_3$ jährlichen Zinse von 1,2347 statt 1,25 Prozent entsprechender) Wert. Im gegebenen Falle von 13 978,86 Mark, also 3,49 Mark weniger, wie oben berechnet.

Zweite Gruppe.

(Gegeben: A, p, r und n. Gesucht: a. Anwendung der Formel VIII a:

$$a = \frac{A}{1{,}0p^n} - \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p}\Big)$$

80. Es beabsichtigt Jemand, ein Kapital auf Zinseszinsen derart anzulegen, daß dasselbe, wenn er am Ende eines jeden Jahres 450 Mark zulegt, mit Ablauf von 8 Jahren die Summe von 10 000 Mark erreicht. Wie groß muß der Betrag der ersten Anlage sein, sofern eine Verzinsung von 4 Prozent angenommen wird?

A. $$a = \frac{10\,000}{1{,}04^8} - \frac{450 \times (1{,}04^8 - 1)}{1{,}04^8 \times 0{,}04}$$

$$\log 1{,}04 = 0{,}0170333$$
$$\times 8$$
$$\log 1{,}04^8 = 0{,}1362664$$
$$\text{num.} \log 1{,}04^8 = 1{,}3685681$$
$$\text{num.} \log 1{,}04^8 - 1 = 0{,}3685681$$
$$\log (1{,}04^8 - 1) = 0{,}5665177 - 1$$
$$\log 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$$

$$\log 10\,000 = 4{,}0000000$$
$$- \log 1{,}04^8 = 0{,}1362664$$
$$3{,}8637336$$
$$\text{num.} = 7\,306{,}90$$

$$\log 450 = 2{,}6532125$$
$$+ \log (1{,}04^8 - 1) = 0{,}5665177 - 1$$
$$2{,}2197302$$

$$\log 1{,}04^8 = 0{,}1362664$$
$$+ \log 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$$
$$- 0{,}7383264 - 2$$
$$3{,}4814038$$
$$\text{num.} = 3\,029{,}73$$

$$\text{num. } 7\,306{,}90 \text{ Mark}$$
$$- \text{num. } 3\,029{,}73 \text{ „}$$
$$a = \mathbf{4\,277{,}17} \text{ Mark.}$$

Mit Hilfe der Tafel II:

$$a = 10\,000 \times 0{,}7306902 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . = 7\,306{,}90$$
$$- \frac{450 \times 0{,}368569 \times 0{,}7306902}{0{,}04} = \frac{121{,}18939}{0{,}04} = 3\,029{,}73$$
$$\mathbf{4\,277{,}17} \text{ Mark.}$$

81. Wie groß wird das auf Zinseszinsen zu 5 Prozent angelegte Grund-Kapital gewesen sein, welches, nachdem regelmäßig am Ende eines jeden Jahres eine Vermehrung desselben um 124 Mark stattgefunden, mit Ablauf von 15 Jahren bis auf einen Betrag von 6 425 Mark angewachsen war?

A. $$a = \frac{6\,425}{1{,}05^{15}} - \frac{124 \times (1{,}05^{15} - 1)}{1{,}05^{15} \times 0{,}05}$$

$$\log 1{,}05 = 0{,}0211893$$
$$\times 15$$
$$1059465$$
$$211893$$
$$\log 1{,}05^{15} = 0{,}3178395$$
$$\text{num.} \log 1{,}05^{15} = 2{,}0789281$$
$$\text{num.} \log 1{,}05^{15} - 1 = 1{,}0789281$$
$$\log (1{,}05^{15} - 1) = 0{,}0329925$$
$$\log 0{,}05 = 0{,}6989700 - 2$$

$$\log 6\,425 = 3{,}8078731$$
$$- \log 1{,}05^{15} = 0{,}3178395$$
$$3{,}4900336$$
$$\text{num.} = 3\,090{,}53$$

$$\log 124 = 2{,}0934217$$
$$+ \log (1{,}05^{15} - 1) = 0{,}0329925$$
$$2{,}1264142$$

$$\log 1{,}05^{15} = 0{,}3178395$$
$$+ \log 0{,}05 = 0{,}6989700 - 2$$
$$- 1{,}0168095 - 2$$
$$3{,}1096047$$
$$\text{num.} = 1\,287{,}08$$

$$\text{num. } 3\,090{,}53 \text{ Mark}$$
$$- \text{num. } 1\,287{,}08 \text{ „}$$
$$a = \mathbf{1\,803{,}45} \text{ Mark.}$$

82. Es wird mit einer Sparkasse das Abkommen getroffen, daß ihr der Einleger für die Dauer von 12 Jahren am Ende eines jeden Halb-

jahres den Betrag von 50 Mark übergibt, wogegen sie ihm unter der Voraussetzung einer bestimmten ein- und erstmaligen Einzahlung mit Ablauf jener Periode die Summe von 2 500 Mark zur Verfügung stellt. Wie hoch muß die anfängliche Anlage sein, wenn die Sparkasse $3^1/_2$ Prozent berechnet? (Gemeinübliches Verfahren. Vgl. Aufgabe 33.)

A. $$a = \frac{2\,500}{1 + 0{,}0\tfrac{35}{2}^{24}} - \frac{50 \times (1 + 0{,}0\tfrac{35}{2}^{24} - 1)}{1 + 0{,}0\tfrac{35}{2}^{24} \times 0{,}0\tfrac{35}{2}}$$

$\log. 1{,}0175 = 0{,}0075344$
$\times 24$
301376
150688
$\log. 1{,}0175^{24} = 0{,}1808256$
$\text{num.}\log. 1{,}0175^{24} = 1{,}5164413$
$\text{num.}\log. 1{,}0175^{24} - 1 = 0{,}5164413$
$\log. (1{,}0175^{24} - 1) = 0{,}7130209 - 1$
$\log. 0{,}0175 = 0{,}2430380 - 2$

$\log. 2\,500 = 3{,}3979400$
$- \log. 1{,}0175^{24} = 0{,}1808256$
3,2171144
num. = 1 648,59

$\log. 50 = 1{,}6989700$
$+ (\log. 1{,}0175^{24} - 1) = 0{,}7130209 - 1$
1,4119909
$\log. 1{,}0175^{24} = 0{,}1808256$
$- \log. 0{,}0175 = 0{,}2430380 - 2$
$- 0{,}4238636 - 2$
2,9881273
num. = 973,03

num. 1 648,59 Mark
— num. 973,03 „
a = **675,56** Mark.

Dritte Gruppe.

(Gegeben: A, a, p und n. Gesucht: r. Anwendung der Formel VIII. b.:
$$r = \frac{[A - (a \,.\, 1{,}0p^n)] \times 0{,}0p}{1{,}0p^n - 1})$$

83. Ein Kapital von 8 400 Mark wird auf Zinseszins zu $4^1/_2$ Prozent in der Absicht angelegt, dasselbe am Ende eines jeden Jahres um einen so hohen Betrag zu vermehren, daß es mit Ablauf von 11 Jahren samt allen Zinserträgen bis auf die Summe von 20 000 Mark anwächst. Wie groß muß die jährliche Zulage sein, um dies zu erreichen?

A. $$r = \frac{[20\,000 - (8\,400 \times 1{,}045^{11})] \times 0{,}045}{1{,}045^{11} - 1}$$

$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$
$\times 11$
191163
191163
$\log. 1{,}045^{11} = 0{,}2102793$
$\text{num.}\log. 1{,}045^{11} = 1{,}6228534$
$\text{num.}\log. 1{,}045^{11} - 1 = 0{,}6228534$
$\log. (1{,}045^{11} - 1) = 0{,}7943859 - 1$
$\log. 0{,}045 = 0{,}6532125 - 2$

$\log. 8\,400 = 3{,}9242793$
$+ \log. 1{,}045^{11} = 0{,}2102793$
4,1345586
num. = 13 631,97

A = 20 000,00
— 13 631,97
6 368,03

$$\begin{aligned}
\log. 6\,368{,}03 &= 3{,}8040051 \\
+\log. 0{,}045 &= 0{,}6532125 - 2 \\
&\overline{2{,}4572176} \\
-\log.(1{,}045^{11} - 1) &= 0{,}7943859 - 1 \\
&\overline{2{,}6628317} \\
\text{num.} &= 460{,}08 \\
r &= \mathbf{460{,}08}\ \text{Mark.}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$r = [20\,000 - (8\,400 \times 1{,}622853)] \times 0{,}045 \times \frac{1}{0{,}622853}$$
$$= (20\,000 - 13\,631{,}9752) \times 0{,}045 \times 1{,}60551$$
$$= 6\,368{,}025 \times 0{,}045 \times 1{,}60551 = \mathbf{460{,}08}\ \text{Mark.}$$

84. Ein Landwirt, der über eine Ersparnis von 2 750 Mark verfügt, will dieselbe derart anlegen, daß er das Anfangs-Kapital am Ende eines jeden Jahres um einen gewissen Betrag verstärkt und auf diese Weise mit Zuschlag aller Zinsen zum Kapitale einen Reservefonds ansammelt, welcher ihn in den Stand setzt, die Kosten der voraussichtlich nach 25 Jahren notwendig werdenden Herstellung eines Ökonomiegebäudes zu bestreiten. Eine Kreditanstalt übernimmt diese Anlage zu $3^3/_4$ Prozent. Wenn nun das Baukapital innerhalb der gegebenen Frist auf 18 000 Mark anwachsen soll: Wieviel muß der jährliche Zuschuß zu der erstmaligen Einzahlung betragen?

A. $$r = \frac{[18\,000 - (2\,750 \times 1{,}0375^{25})] \times 0{,}0375}{1{,}0375^{25} - 1}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}0375 &= 0{,}0159881 \\
&\quad \times 25 \\
&\overline{\quad 799405} \\
&\quad 319762 \\
\log. 1{,}0375^{25} &= \mathbf{0{,}3997025} \\
\text{num.}\log. 1{,}0375^{25} &= 2{,}5101663 \\
\text{num.}\log. 1{,}0375^{25} - 1 &= 1{,}5101663 \\
\log.(1{,}0375^{25} - 1) &= \mathbf{0{,}1790247} \\
\log. 0{,}0375 &= \mathbf{0{,}5740313} - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 2\,750 &= 3{,}4393327 \\
+\log. 1{,}0375^{25} &= 0{,}3997025 \\
&\overline{3{,}8390352} \\
\text{num.} &= 6\,902{,}96 \\
A &= 18\,000{,}— \\
&- 6\,902{,}96 \\
&\overline{11\,097{,}04}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 11\,097{,}04 &= 4{,}0452072 \\
+\log. 0{,}0375 &= 0{,}5740313 - 2 \\
&\overline{2{,}6192385} \\
-\log.(1{,}0375^{25} - 1) &= 0{,}1790247 \\
&\overline{2{,}4402138} \\
\text{num.} &= 275{,}56 \\
r &= \mathbf{275{,}56}\ \text{Mark.}
\end{aligned}$$

85. Im Besitze einer ersparten Summe von 1 200 Mark beabsichtigt ein Landarbeiter, dieselbe auf Zinseszinsen anzulegen und ihr am Ende eines jeden Jahres noch einen Betrag zuzufügen, welcher hinreicht, um

mit Ablauf von 10 Jahren die ursprüngliche Einzahlung mit Zuschlag aller Zinsen bis auf Höhe eines Kapitales zu vermehren, dessen es zur Erwerbung eines kleinen Anwesens im Werte von 5 500 Mark bedarf. Der Arbeitgeber unterstützt dieses Vorhaben in der Weise, daß er der Spar- und Leihkasse gegenüber, welche nur $3^3/_4$ Prozent vergüten will, auf seine Rechnung eine Erhöhung des Zinsfuses um 1, also auf $4^3/_4$ Prozent übernimmt. Es soll nun nachgewiesen werden, wie hoch sich die jährliche Zulage, und im Zusammenhange mit ihr die Beisteuer des Arbeitgebers belaufen würde.

A. $$r = \frac{[5\,500 - (1\,200 \times 1{,}0475^{10})] \times 0{,}0475}{1{,}0475^{10} - 1}$$

$\log. 1{,}0475 = 0{,}0201540$
$\times 10$
$\log. 1{,}0475^{10} = \mathbf{0{,}2015400}$
$\text{num.} \log. 1{,}0475^{10} = 1{,}5905231$
$\text{num.} \log. 1{,}0475^{10} - 1 = 0{,}5905231$
$\log. (1{,}0475^{10} - 1) = \mathbf{0{,}7712369 - 1}$
$\log. 0{,}0475 = \mathbf{0{,}6766936 - 2}$

$\log. 1\,200 = 3{,}0791812$
$+ \log. 1{,}0475^{10} = 0{,}2015400$
$3{,}2807212$
$\text{num.} = 1\,908{,}63$

$A = 5\,500{,}—$
$- 1\,908{,}63$
$3\,591{,}37$

$\log. 3\,591{,}37 = 3{,}5552601$
$+ \log. 0{,}0475 = 0{,}6766936 - 2$
$2{,}2319537$
$- \log. (1{,}0475^{10} - 1) = 0{,}7712369 - 1$
$2{,}4607168$
$\text{num.} = 288{,}88$
$r = \mathbf{288{,}88}$ Mark.

Wenn der Arbeiter auf die verkehrsmäßige Zinsvergütung von nur $3^3/_4$ Prozent angewiesen geblieben wäre, so hätte seine jährliche Zulage, wie eine Sonderrechnung nach gleichem Verfahren ergeben würde, betragen müssen: 317,32 Mark. Somit beläuft sich die seitens des Arbeitgebers gewährte Jahresprämie auf 317,32 — 288,88 = 28,44 Mark, und die Summe derselben für 10 Jahre: 284,40 Mark. —

Vierte Gruppe.

(Gegeben: A, a, p und r. Gesucht: n. Anwendung der Formel VIII. c.:
$$n = \frac{\log. [(A \,.\, 0{,}0p) + r] - \log. [(a \,.\, 0{,}0p) + r]}{\log. 1{,}0p})$$

86. Ein Gutsbesitzer befaßt sich mit dem Projekte einer Grundstücks-Melioration, welche nach dem vorliegenden Kostenanschlage einen Kapitalaufwand von 15 020 Mark erfordern würde. Da er aber zur Zeit nur über eine zu 4 Prozent ausstehende Summe von 9 250 Mark verfügt und dem Unternehmen ohne Aufnahme einer Schuld näher treten möchte, entschließt er sich dazu, unter Verzicht auf dessen sofortige Ausführung jene Reserve derart heranzuziehen, daß er ihr am Ende eines jeden Jahres 500 Mark,

welche in gleicher Weise verzinst werden können, zulegt. Frage: Nach wieviel Jahren werden diese Anlagen auf den Betrag der erforderlichen 15 020 Mark angewachsen sein?

A. $$n = \frac{\log. [(15\,020 \times 0{,}04) + 500] - \log. [(9\,250 \times 0{,}04) + 500]}{\log. 1{,}04}$$

$$= \frac{\log. (600{,}80 + 500) - \log. (370 + 500)}{\log. 1{,}04}$$

$$= \frac{\log. 1\,100{,}80 - \log. 870}{\log. 1{,}04}$$

$$\log\ 1\,100{,}80 = 3{,}0417084$$
$$-\log. 870 = 2{,}9395193$$
$$0{,}1021891$$
$$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$$
$$n = \frac{1021891}{170333} = \mathbf{6} \text{ (fast ganz genau).}$$

Also nach rund 6 Jahren.

Division logarithmisch behandelt:

$$\log. 0{,}1021891 = 0{,}0094045 - 1$$
$$-\log. 0{,}0170333 = 0{,}2312988 - 2$$
$$\log. n = 0{,}7781057$$
$$\text{num.} = 5{,}9994$$
$$n = \text{rund } \mathbf{6} \text{ Jahre (wie oben).}$$

87. Von einem Dienstboten werden der Sparkasse 250 Mark, welche zu $3^1/_2$ Prozent verzinst werden, übergeben. Der Einleger ist im Stande, diesen einmaligen Betrag am Ende eines jeden Jahres um 45 Mark zu vermehren. Wie viele Jahre hat er diese Zuschüsse fortzusetzen, damit sie mit Einbezug aller Zinserträge die Summe von 1 000 Mark erreichen?

A. $$n = \frac{\log. [(1\,000 \times 0{,}035) + 45] - \log. [(250 \times 0{,}035) + 45]}{\log. 1{,}035}$$

$$= \frac{\log. (35 + 45) - \log. (8{,}75 + 45)}{\log. 1{,}035}$$

$$= \frac{\log. 80 - \log. 53{,}75}{\log. 1{,}035}$$

$$\log. 80 = 1{,}9030900$$
$$-\log. 53{,}75 = 1{,}7303785$$
$$0{,}1727115$$
$$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$$
$$n = \frac{1727115}{149403} = \mathbf{11{,}56}\,.. \text{ Jahre, oder 11 Jahre, 6 Monate und 22 Tage.}$$

Logarithmische Ausführung der Division:

$$\log. 0{,}1727115 = 0{,}2373213 - 1$$
$$-\log. 0{,}0149403 = 0{,}1743593 - 2$$
$$\log. n = 1{,}0629620$$
$$\text{num.} = 11{,}56011\,..$$
$$n = \mathbf{11{,}56} \text{ Jahre (wie oben).}$$

88. Aus dem Anteil an einer Erbschaft wendet der Ortsbürger X. seiner Heimatgemeinde ein Vermögen von 25 000 Mark mit der Bestimmung zu, daß diese der Stiftung aus eigenen Mitteln am Schlusse eines jeden Jahres den Betrag von 900 Mark zulege und diese Verstärkung des Fonds so lange fortsetze, bis derselbe mit Zuschlag der Zinsen zum Kapitale die Summe von 45 000 Mark erreicht hat, deren Jahreszinsen dann ausschließlich zur Förderung gemeinnütziger Zwecke dienen sollen. Wenn nun für die Kapitalanlagen ein Zins von $3^3/_4$ Prozent berechnet werden kann: Nach wieviel Jahren werden sich dieselben bis auf den in Aussicht genommenen Betrag vermehrt haben?

A.

$$n = \frac{\log. [(45\,000 \times 0.0375) + 900] - \log. [(25\,000 \times 0.0375) + 900]}{\log. 1{,}0375}$$

$$= \frac{\log. (1\,687{,}50 + 900) - \log. (937{,}50 + 900)}{\log. 1{,}0375}$$

$$= \frac{\log. 2\,587{,}50 - \log. 1\,837{,}50}{\log. 1{,}0375}$$

$$\log. 2\,587{,}50 = 3{,}4128804$$
$$-\log. 1\,837{,}50 = 3{,}2642273$$
$$0{,}1486531$$
$$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$$
$$n = \frac{1486531}{159881} = \mathbf{9{,}297} \ldots \text{ Jahre.}$$

Also nach rund 9,3 Jahren. (Genauer: 9 Jahre, 3 Monate u. 17 Tage.)

Division logarithmisch ausgeführt:

$$\log. 0{,}1486531 = 0{,}1721740 - 1$$
$$-\log. 0{,}0159881 = 0{,}2037968 - 2$$
$$0{,}9683772$$
$$\text{num.} = 9{,}29774 \ldots$$
$$n = \mathbf{9{,}297} \text{ Jahre (wie oben).}$$

b) Zweite Reihe (89—91).

(Anwendung der Formeln IX—IX. b.)

Den nunmehr in Betracht zu ziehenden Fällen liegt die Voraussetzung zu Grunde, daß die Wert-Anlagen, abweichend von den bisher vorgeführten Aufgaben, aus durchweg übereinstimmenden Größen bestehen, daß sich somit dem anfänglich eingesetzten sogenannten Grundkapitale je am Ende der folgenden Jahre regelmäßig Zulagen gleichen Betrages anschließen.

Da derartige Anlagen im Leben weniger häufig vorkommen mögen, die rechnerische Behandlung derselben sich auch relativ einfach gestaltet, soll hier an die auftauchenden drei Hauptfragen nur mit je einem Beispiele angeknüpft werden.

Erster Fall.

(Gegeben: a, p und n. Gesucht: A. Anwendung der Formel IX:

$$A = \frac{a \cdot (1{,}0p^{n+1} - 1)}{0{,}0p}\Big)$$

89. Einem Kapital von 1 250 Mark, zurzeit auf Zinseszinsen zu $4^1/_2$ Prozent angelegt, wird in der Folge am Ende eines jeden Jahres der gleiche Betrag zugefügt. Auf welche Summe muß dasselbe mit diesen Zuschüssen und dem Zuschlage aller Zinsen am Schlusse des 8 ten Jahres anwachsen?

A. $$A = \frac{1\,250 \times (1{,}045^{8+1} - 1)}{0{,}045}$$

$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$
$\times 9$
$\log. 1{,}045^9 = 0{,}1720467$
$\text{num.} \log. 1{,}045^9 = 1{,}4860955$
$\text{num.} \log. 1{,}045^9 - 1 = 0{,}4860955$
$\log. (1{,}045^9 - 1) = \mathbf{0{,}6867216 - 1}$
$\log. 0{,}045 = \mathbf{0{,}6532125 - 2}$

$\log. 1\,250 = 3{,}0969100$
$+ \log. (1{,}045^9 - 1) = 0{,}6867216 - 1$
$2{,}7836316$
$- \log. 0{,}045 = 0{,}6532125 - 2$
$4{,}1304191$
$\text{num.} = 13\,502{,}65$
$A = \mathbf{13\,502{,}65}$ Mark.

Mit Hilfe der Tafel I:

$$A = \frac{1\,250 \times 0{,}4860951}{0{,}045} = \frac{4\,860{,}951}{8 \times 0{,}045} = \frac{4\,860{,}951}{0{,}36} = \mathbf{13\,502{,}64} \text{ Mark.}$$

Zweiter Fall.

(Gegeben: A, p und n. Gesucht: a. Anwendung der Formel IX. a..

$$a = \frac{A \cdot 0{,}0p}{1{,}0p^{n+1} - 1}\Big)$$

90. Wie hoch wird sich das Grundkapital berechnen, welches bei einer am Schlusse jeden Jahres erfolgenden Zulage gleichen Betrages mit Ablauf von 10 Jahren unter Anrechnung aller Zinserträge bis auf die Summe von 5 000 Mark anwächst, wenn ein Zinsfuß von $3^1/_2$ Prozent angenommen wird?

A. $$a = \frac{5\,000 \times 0{,}035}{1{,}035^{10+1} - 1}$$

$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$
$\times 11$
149403
149403
$\log. 1{,}035^{11} = 0{,}1643433$
$\text{num.} \log. 1{,}035^{11} = 1{,}4599677$
$\text{num.} \log. 1{,}035^{11} - 1 = 0{,}4599677$
$\log. (1{,}035^{11} - 1) = \mathbf{0{,}6627274 - 1}$
$\log. 0{,}035 = \mathbf{0{,}5440680 - 2}$

$\log. 5\,000 = 3{,}6989700$
$+ \log. 0{,}035 = 0{,}5440680 - 2$
$2{,}2430380$
$- \log. (1{,}035^{11} - 1) = 0{,}6627274 - 1$
$2{,}5803106$
$\text{num.} = 380{,}46$
$a = \mathbf{380{,}46}$ Mark.

Mit Hilfe der Tafel I:

$$a = \frac{5\,000 \times 0,035}{0,4599697} = \frac{175}{0,4599697} = \mathbf{380,46} \text{ Mark.}$$

Dritter Fall.

(Gegeben: A, a und p. Gesucht: n. Anwendung der Formel IX. b.:

$$n = \frac{\log. [(A \,.\, 0,0p) + a] - \log. a}{\log. 1,0p} - 1)$$

91. Ein Beamter übergibt der Sparkasse ein Kapital von 350 Mark auf Zinseszinsen zu $3^1/_4$ Prozent, mit dem Vorhaben, dasselbe in der Folge am Ende eines jeden Jahres durch einen Zuschuß gleichen Betrages zu vermehren. Dabei beschäftigt den Einleger die Frage, wie viele Jahre er diese Zuschüsse zu wiederholen hat, damit sich die ursprüngliche Summe verzehnfacht. Wie lautet die Rechnung?

A.
$$n = \frac{\log. [(3\,500 \times 0,0325) + 350] - \log. 350}{\log. 1,0325} - 1$$

$$= \frac{\log. (113,75 + 350) - \log. 350}{\log. 1,0325} - 1$$

$$= \frac{\log. 463,75 - \log. 350}{\log. 1,0325} - 1$$

$$\log. 463,75 = 2,6662839$$
$$- \log. 350 = 2,5440680$$
$$0,1222159$$
$$\log. 1,0325 = 0,0138901$$

$$n = \frac{1222159}{138901} - 1 = \mathbf{7,799} \ldots \text{Jahre, oder}$$

7 Jahre, 9 Monate u. 18 Tage.

Logarithmische Ausführung der Division:

$$\log. 0,1222159 = 0,0871277 - 1$$
$$- \log. 0,0138901 = 0,1427053 - 2$$
$$\log. n = 0,9444224$$
$$\text{num.} = 8,7988$$
$$n = 8.7988 - 1 = 7,7988 \text{ oder rund}$$

7,8 Jahre (wie oben).

Anmerkung. Würden im gegebenen Falle die Zulagen je am Ende eines Vierteljahres und demgemäß in Beträgen von $\frac{350}{4} = 87,5$ Mark geschehen, so fände man bei Anwendung der im Verkehr gebräuchlichen Rechnungsweise (Vgl. Aufgabe 33) eine Zeitdauer von 7,694 Jahren. —

c) Dritte Reihe (93—103).

(Anwendung der Formeln X—X. c.)

Erste Gruppe.

(Gegeben: a, r, p und n. Gesucht: A. Anwendung der Formel X.:

$$A = a \,.\, 1,0p^n - \frac{r \,.\, (1,0p^n - 1)}{0,0p})$$

92. Ein Kapital von 20 000 Mark ist zu $4^1/_2$ Prozent auf Zinseszinsen angelegt. Wenn nun von demselben am Schlusse eines jeden Jahres 1 000 Mark abgehoben werden: Wie groß wird dann der Restbetrag der Anlage nach 25 Jahren sein?

A. $$A = 20\,000 \times 1{,}045^{25} - \frac{1\,000 \times (1{,}045^{25} - 1)}{0{,}045}$$

log. 1,045 = 0,0191163
× 25
955815
382326
log. $1{,}045^{25}$ = 0,4779075
num. log. $1{,}045^{25}$ = 3,0054361
num. log. $1{,}045^{25}$ — 1 = 2,0054361
log. ($1{,}045^{25}$—1) = 0,3022088
log. 0,045 = 0,6532125 — 2

log. 20 000 = 4,3010300
+ log. $1{,}045^{25}$ = 0,4779075
4,7789375
num. = 60 108,72 . . . 60 108,72 M
log. 1 000 = 3,0000000
+ log. ($1{,}045^{25}$—1) = 0,3022088
3,3022088
— log. 0,045 = 0,6532125 — 2
4,6489963
num. = 44 565,24 . . — 44 565,24 „
A = 15 543,48 M.

In Anwendung der oben (S. 55) angegebenen vereinfachenden Formel erhält man:

$$A = \left(20\,000 - \frac{100\,000}{4{,}5}\right) \times 1{,}045^{25} + \frac{100\,000}{4{,}5}$$

$\frac{100\,000}{4{,}5}$ = ... 22 222,22
20 000 — 22 222,22 = — 2 222,22
× num. log. $1{,}045^{25}$ (wie oben berechnet = 3,0054361) = — 2 222,22 × 3,0054361 = — 6 678,74
A = 15 543,48 Mark (wie oben).

93. Wenn von einer 7 850 Mark betragenden, zu 4 Prozent auf Zinseszinsen ausstehenden Schuld mit Ablauf eines jeden Jahres 250 Mark abbezahlt werden: Wie hoch berechnet sich dann die Schuldverpflichtung nach 18 Jahren?

A. $$A = 7\,850 \times 1{,}04^{18} - \frac{250 \times (1{,}04^{18} - 1)}{0{,}04}$$

log. 1,04 = 0,0170333
× 18
1362664
170333
log. $1{,}04^{18}$ = 0,3065994
num. log. $1{,}04^{18}$ = 2,0258132
num. log. $1{,}04^{18}$ — 1 = 1,0258132
log. ($1{,}04^{18}$ — 1) = 0,0110682
log. 0,04 = 0,6020600 — 2

log. 7 850 = 3,8948697
+ log. $1{,}04^{18}$ = 0,3065994
4,2014691
num. = 15 902,64 . . . 15 902,64 M
log. 250 = 2,3979400
+ log. ($1{,}04^{18}$ — 1) = 0,0110682
2,4090082
— log. 0,04 = 0,6020600 — 2
3,8069482
num. = 6 411,33 . . . — 6411,33 „
A = 9 491,31 M.

In diesem Falle würde sich also die Schuld vergrößert haben um 9 491,31 — 7 850 = 1 641,31 Mark.

Nach der bereits angegebenen bequemeren Formel würde sich die Rechnung folgendermaßen gestalten:

$$A = \left(7\,850 - \frac{25\,000}{4}\right) \times 1{,}04^{18} + \frac{25\,000}{4}$$

$\frac{25\,000}{4} =$ 6 250,00

7 850 — 6 250 = 1 600

$\times$ num. log. $1{,}04^{18}$ (wie oben ausgeführt
= 2,0258132) = 1600 $\times$ 2,0258132 = . + 3 241,31

A = **9 491,31** Mark (wie oben).

94. Zum Zwecke der Bestreitung der Kosten der Neuherstellung eines Hofgebäudes kontrahiert ein Gutsbesitzer die Anleihe von 33 500 Mark zu $3^1/_2$ Prozent unter der Bedingung einer am Ende jeden Jahres zu leistenden Rückzahlung von 1 800 Mark. Wenn nun Zins auf Zins gerechnet wird: Wie wird sich dann das Schuldverhältnis am Schlusse des 30 sten Jahres gestalten?

A. $A = 33\,500 \times 1{,}035^{30} - \frac{1\,800 \times (1{,}035^{30} - 1)}{0{,}035}$

log. 1,035 = 0,0149403
$\times$ 30
log. $1{,}035^{30}$ = **0,4482090**
num. log. $1{,}035^{30}$ = 2,8067838
num. log. $1{,}035^{30}$ — 1 = 1,8067838
log. $(1{,}035^{30} - 1)$ = **0,2569062**
log. 0,035 = **0,5440680** — 2

log. 33 500 = 4,5250448
+ log. $1{,}035^{30}$ = 0,4482090
4,9732538
num. = 94 027,27 . . . 94 027,27 M

log. 1 800 = 3,2552725
+ log. $(1{,}035^{30} - 1)$ = 0,2569062
3,5121787
— log. 0,035 = 0,5440680 — 2
4,9681107
num. = 92 920,32 . . — 92 920,32 „

A = **1 106,95** M.

Dieser Betrag bezeichnet also den Rest der Schuld am Schlusse des 30 Jahres. —

Gemäß der bereits zitierten erleichternden Rechnungsweise würde sich ergeben:

$$A = \left(33\,500 - \frac{180\,000}{3{,}5}\right) \times 1{,}035^{30} + \frac{180\,000}{3{,}5}$$

$\frac{180\,000}{3{,}5} =$ 51 428,57

33 500 — 51 428,57 = — 17 928,57

$\times$ num. log. $1{,}035^{30}$ (wie oben berechnet
= 2,8067838) = — 17 928,57 $\times$ 2,8067838 = — 50 321,62

A = **1 106,95** Mark (wie oben).

Zweite Gruppe.

(Gegeben: A, r, p und n. Gesucht: a. Anwendung der Formel X. a.:

$$a = \frac{A}{1{,}0p^n} + \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p}\text{)}$$

95. Von einem zu 5 Prozent auf Zinseszinsen angelegten Kapitale werden während eines Zeitraumes von 12 Jahren regelmäßig je am Ende derselben 300 Mark zurückgezogen. Wie groß muß das ursprüngliche Kapital gewesen sein, wenn mit Ablauf jener Frist noch 2 700 Mark in Forderung stehen?

A.
$$a = \frac{2\,700}{1{,}05^{12}} + \frac{300 \times (1{,}05^{12} - 1)}{1{,}05^{12} \times 0{,}05}$$

log. 1,05 = 0,0211893
× 12
423786
211893
log. $1{,}05^{12}$ = **0,2542716**
num. log. $1{,}05^{12}$ = 1,7958562
num. log. $1{,}05^{12}$ − 1 = 0,7958562
log. ($1{,}05^{12}$ − 1) = **0,9008346 − 1**
log. 0,05 = **0,6989700 − 2**

log. 2 700 = 3,4313638
− log. $1{,}05^{12}$ = 0,2542716
3,1770922
num. = 1 503,46

log. 300 = 2,4771213
+ log.($1{,}05^{12}$ − 1) = 0,9008346 − 1
2,3779559

log. $1{,}05^{12}$ = 0,2542716
+ log. 0,05 = 0,6989700 − 2
− 0,9532416 − 2
3,4247143
num. = 2 658,98

num. 1 503,46 Mark
+ num. 2 658,98 „
a = **4 162,44** Mark.

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$a = (2\,700 \times 0{,}5568374) + \frac{300 \times 0{,}7958563}{1{,}7958563 \times 0{,}05}$$
$$= (2\,700 \times 0{,}5568374) + (6\,000 \times 0{,}7958563 \times 0{,}5568374)$$
$$= [2\,700 + (6\,000 \times 0{,}7958563)] \times 0{,}5568374$$
$$= (2\,700 + 4\,775{,}1378) \times 0{,}5568374$$
$$= 7\,475{,}1378 \times 0{,}5568374 = \mathbf{4\,162{,}44}\ \text{Mark.}$$

96. In der Absicht, sich an einem Unternehmen zu beteiligen, welches im Zeitraume von 10 Jahren einen jährlichen Beitrag von 5 000 Mark erfordert, gedenkt ein Gewerbetreibender das hierfür erforderliche Kapital in der Weise auf Zinseszinsen anzulegen, daß er jenen Anteil regelmäßig am Ende eines jeden Jahres erheben kann und ihm mit Ablauf der ganzen Periode noch die Summe von 2 000 Mark als Reserve zur Verfügung bleibt. Wenn nun eine Kreditkasse die Kapital-Anlage zu $3^3/_4$ Prozent übernehmen will: Wie hoch muß sich deren Betrag berechnen?

A.
$$a = \frac{2\,000}{1{,}0375^{10}} + \frac{5\,000 \times (1{,}0375^{10} - 1)}{1{,}0375^{10} \times 0{,}0375}$$

$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$
$\times 10$
$\log. 1{,}0375^{10} = 0{,}1598810$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^{10} = 1{,}4450438$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^{10} - 1 = 0{,}4450438$
$\log. (1{,}0375^{10} - 1) = 0{,}6484027 - 1$
$\log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$

$\log. 2\,000 = 3{,}3010300$
$- \log. 1{,}0375^{10} = 0{,}1598810$
$3{,}1411490$
$\text{num.} = 1\,384{,}04$

$\log. 5\,000 = 3{,}6989700$
$+ \log. (1{,}0375^{10} - 1) = 0{,}6484027 - 1$
$3{,}3473727$

$\log. 1{,}0375^{10} = 0{,}1598810$
$+ \log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$
$- 0{,}7339123 - 2$
$4{,}6134604$
$\text{num.} = 41\,063{,}92$

num. 1 384,04 Mark
+ num. 41 063,92 „
a = **42 447,96** Mark.

97. Ein vermögender Besitzer will seiner Heimatgemeinde zum Zwecke der Aufforstung einer größeren Fläche Ödlandes eine finanzielle Unterstützung zuwenden. Da das Projekt aus äußeren Gründen während 7 Jahren in gleichen Abschnitten ausgeführt werden soll, mit Ablauf der ganzen Periode aber noch eine Reserve für den Ausbau der Wege, die Anlage von Pflanzschulen, Grenzgräben usw. erforderlich ist, so möchte der Donator es so einrichten, daß er das nötige Kapital einer Kreditkasse auf Zinseszinsen mit der Bestimmung übergibt, daß die Gemeinde am Schlusse eines jeden Jahres den Betrag von 1 750 Mark, und außerdem mit Beendigung aller Anpflanzungen noch 3 500 Mark beziehen soll. — Frage: Wie hoch berechnet sich das Stiftungs-Kapital unter der Voraussetzung eines Zinsertrages von $3\frac{1}{2}$ Prozent?

A. $$a = \frac{3\,500}{1{,}035^7} + \frac{1\,750 \times (1{,}035^7 - 1)}{1{,}035^7 \times 0{,}035}$$

$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$
$\times 7$
$\log. 1{,}035^7 = 0{,}1045821$
$\text{num.} \log. 1{,}035^7 = 1{,}2722783$
$\text{num.} \log. 1{,}035^7 - 1 = 0{,}2722783$
$\log. (1{,}035^7 - 1) = 0{,}4350130 - 1$
$\log. 0{,}035 = 0{,}5440680 - 2$

$\log. 3\,500 = 3{,}5440680$
$- \log. 1{,}035^7 = 0{,}1045821$
$3{,}4394859$
$\text{num.} = 2\,750{,}97$

$\log. 1\,750 = 3{,}2430380$
$+ (\log. 1{,}035^7 - 1) = 0{,}4350130 - 1$
$2{,}6780510$

$\log. 1{,}035^7 = 0{,}1045821$
$+ \log. 0{,}035 = 0{,}5440680 - 2$
$- 0{,}6486501 - 2$
$4{,}0294009$
$\text{num.} = 10\,700{,}42$

num. 2 750,97 Mark
+ num. 10 700,42 „
a = **13 451,39** Mark.

Dritte Gruppe.

(Gegeben: A, a, p und n. Gesucht: r. Anwendung der Formel X. b.:

$$r = \frac{(a \cdot 1{,}0p^n - A) \cdot 0{,}0p}{1{,}0p^n - 1}\Big)$$

98. Der Bauer M. bezieht aus einer Erbschaft die bare Summe von 4 000 Mark. Er möchte diese bei der Spar- und Darlehnskasse auf Zinseszinsen unter dem Vorbehalt deponieren, daß er innerhalb 15 Jahren am Ende eines jeden Jahres einen bestimmten Betrag zur Bestreitung von regelmäßig wiederkehrenden Aufwendungen abhebt und daß ihm mit Ablauf jener Periode noch eine Rücklage von 1 500 Mark erübrigt. Die Kasse vergütet $3^1/_4$ Prozent. Einen wie hohen Jahresbetrag kann sich unter diesen Umständen der Bauer auszahlen lassen?

A. $$r = \frac{(4\,000 \times 1{,}0325^{15} - 1\,500) \times 0{,}0325}{1{,}0325^{15} - 1}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}0325 &= 0{,}0138901 \\
&\times 15 \\
&\overline{\quad 694505} \\
&\underline{\ 138901\quad} \\
\log. 1{,}0325^{15} &= \mathbf{0{,}2083515} \\
\text{num.}\log. 1{,}0325^{15} &= 1{,}6156659 \\
\text{num.}\log. 1{,}0325^{15} - 1 &= 0{,}6156659 \\
\log. (1{,}0325^{15} - 1) &= \mathbf{0{,}7893451 - 1} \\
\log. 0{,}0325 &= \mathbf{0{,}5118834 - 2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 4\,000 &= 3{,}6020600 \\
+ \log. 1{,}0325^{15} &= \underline{0{,}2083515} \\
&\ \ \ 3{,}8104115 \\
\text{num.} &= 6\,462{,}66 \\
\\
&\ \ \ 6\,462{,}66 \\
- A &= \underline{1\,500{,}00} \\
&\ \ \ 4\,962{,}66
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 4\,962{,}66 &= 3{,}6957145 \\
+ \log. 0{,}0325 &= \underline{0{,}5118834 - 2} \\
&\ \ \ 2{,}2075979 \\
- \log. (1{,}0325^{15} - 1) &= \underline{0{,}7893451 - 1} \\
&\ \ \ 2{,}4182528 \\
\text{num.} &= 261{,}97 \\
r &= \mathbf{261{,}97}\ \text{Mark.}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$\begin{aligned}
r &= (4\,000 \times 1{,}6156635 - 1\,500) \times 0{,}0325 \\
&= (6\,462{,}654 - 1\,500) \times 0{,}0325 = 161{,}286255 \\
&\frac{161{,}286255}{0{,}6156635} = \mathbf{261{,}97}\ \text{Mark.}
\end{aligned}$$

99. Von den Zinsen eines zu $3^3/_4$ Prozent angelegten Vermögens von 80 000 Mark erhebt dessen Besitzer am Schlusse eines jeden Jahres eine bestimmte Summe zur Bestreitung der Kosten seines Haushaltes. Nachdem er diese Entnahmen 18 Jahre fortgesetzt hat, berechnet sich sein Kapital auf 83 760 Mark. Frage: Welchen Betrag hat er jährlich abgehoben?

A. $$r = \frac{(80\,000 \times 1{,}0375^{18} - 83\,760) \times 0{,}0375}{1{,}0375^{18} - 1}$$

$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$
$\times 18$
1279048
159881
$\log. 1{,}0375^{18} = 0{,}2877858$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^{18} = 1{,}9399289$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^{18} - 1 = 0{,}9399289$
$\log. (1{,}0375^{18} - 1) = 0{,}9730950 - 1$
$\log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$

$\log. 80\,000 = 4{,}9030900$
$+ \log. 1{,}0375^{18} = 0{,}2877858$
5,1908758
num. = 155 194,32

155 194,32
$-$ A = 83 760,00
71 434,32

$\log. 71\,434{,}32 = 4{,}8539069$
$+ \log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$
3,4279382
$- \log. (1{,}0375^{18} - 1) = 0{,}9730950 - 1$
3,4548432
num. = 2 849,99
r = **2 850** Mark (rund).

Anmerkung. Die in den Beispielen 98 und 99 zur Darstellung gebrachte Rechnungsweise wird selbstverständlich auch auf das Vorkommen anzuwenden sein, daß ein auf Zinseszinsen ausstehendes Schuldkapital innerhalb einer gegebenen Frist durch regelmäßige, den Zins einschließende, am Ende jeden Jahres zu leistende Abzahlungen bis auf einen bestimmten Betrag herabgemindert werden soll. In solchen Fällen wird die jährliche Rückzahlung größer sein müssen, als der einfache Zins vom Kapitale. Hierzu die folgende Aufgabe.

100. Ein Kapital von 8 400 Mark, welches zu 4 Prozent auf Zinseszinsen steht, soll in 8 Jahren so weit abgetragen werden, daß nur noch ein Rest von 1 200 Mark verbleibt. Wie hoch wird sich dann die jährliche Abschlagszahlung belaufen müssen?

A. $$r = \frac{(8\,400 \times 1{,}04^{8} - 1\,200) \times 0{,}04}{1{,}04^{8} - 1}$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$
$\times 8$
$\log. 1{,}04^{8} = 0{,}1362664$
$\text{num.} \log. 1{,}04^{8} = 1{,}3685681$
$\text{num.} \log. 1{,}04^{8} - 1 = 0{,}3685681$
$\log. (1{,}04^{8} - 1) = 0{,}5665177 - 1$
$\log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$

$\log. 8\,400 = 3{,}9242793$
$+ \log. 1{,}04^{8} = 0{,}1362664$
4,0605457
num. = 11 495,97

11 495,97
$-$ A = 1 200,00
10 295,97

$\log. 10\,295{,}97 = 4{,}0126673$
$+ \log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$
2,6147273
$- \log. (1{,}04^{8} - 1) = 0{,}5665177 - 1$
3,0482096
num. = 1 117,40
r = **1 117,40** Mark.

Vierte Gruppe.

(Gegeben: A, a, r und p. Gesucht: n. Anwendung der Formel X. c.:
$$n = \frac{\log. [(A . 0{,}0p) - r] - \log. [(a . 0{,}0p) - r]}{\log. 1{,}0p}\Big)$$

101. Von einem zu $4^1/_2$ Prozent auf Zinseszinsen angelegten Kapitale von 28 000 Mark werden am Ende eines jeden Jahres 2 200 Mark abgehoben bezw. zurückgezahlt. Nach Ablauf von wieviel Jahren wird sich das Anlage-Kapital auf 6 000 Mark vermindert haben?

A.
$$n = \frac{\log. [(6\,000 \times 0{,}045) - 2\,200] - \log. [(28\,000 \times 0{,}045) - 2\,200]}{\log. 1{,}045}$$
oder, da die jährlichen Abzüge mehr als die Zinsen des Kapitales betragen:
$$n = \frac{\log. [2\,200 - (6\,000 \times 0{,}045)] - \log. [2\,200 - (28\,000 \times 0{,}045)]}{\log. 1{,}045}$$
$$= \frac{\log. (2\,200 - 270) - \log. (2\,200 - 1\,260)}{\log. 1{,}045}$$
$$= \frac{\log. 1\,930 - \log. 940}{\log. 1{,}045}$$
$$\log. 1\,930 = 3{,}2855573$$
$$- \log. 940 = 2{,}9731279$$
$$0{,}3124294$$
$$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$$
$$n = \frac{3124294}{191163} = \mathbf{16{,}3436}\,..$$ Jahre, oder 16 Jahre, 4 Monate und 4 Tage.

Wird die Division logarithmisch ausgeführt, so erhält man:
$$\log. 0{,}3124294 = 0{,}4947519 - 1$$
$$- \log. 0{,}0191163 = 0{,}2814038 - 2$$
$$\log. n = 1{,}2133481$$
$$\text{num.} = 16{,}3436\,..$$
$$n = \mathbf{16{,}3436}\,..$$ Jahre (wie oben).

102. Der landwirtschaftlichen Winterschule zu F. wird eine Schenkung von 25 000 Mark mit der Bestimmung gemacht, daß das Kapital auf Zinseszinsen angelegt und daß von dem einfachen Zinsertrage je am Ende des Jahres nur die Hälfte, und zwar so lange entnommen werde, bis das Kapital sich auf den doppelten Betrag der Anlage (50 000 Mark) vermehrt hat, von welchem Zeitpunkte ab die Verwendung desselben wiederum nach besonderer Verfügung stattfinden soll. Wenn nun mit Sicherheit auf eine Verzinsung von $3^3/_4$ Prozent gerechnet werden kann: Nach wieviel Jahren wird das Kapital auf die vorgesehene Höhe angewachsen sein?

A. Im gegebenen Falle beläuft sich der Betrag der Jahreszinsen auf $250 \times 3^3/_4 = 937{,}50$, und die Hälfte desselben auf 468,75 Mark. Darnach ergibt sich:
$$n = \frac{\log. [(50\,000 \times 0{,}0375) - 468{,}75] - \log. [(25\,000 \times 0{,}0375) - 468{,}75]}{\log. 1{,}0375}$$

$$= \frac{\log.(1\,875{,}00 - 468{,}75) - \log.(937{,}50 - 468{,}75)}{\log. 1{,}0375}$$

$$= \frac{\log. 1\,406{,}25 - \log. 468{,}75}{\log. 1{,}0375}$$

$$\begin{aligned} \log. 1\,406{,}25 &= 3{,}1480626 \\ -\log. 468{,}75 &= 2{,}6709413 \\ &\ 0{,}4771213 \\ \log. 1{,}0375 &= 0{,}0159881 \end{aligned}$$

$$n = \frac{4771213}{159881} = \mathbf{29{,}8423} \text{ Jahre; d. i. 29 Jahre, 10 Monate und 3 Tage.}$$

Logarithmische Behandlung der Division:

$$\begin{aligned} \log. 0{,}4771213 &= 0{,}6786288 - 1 \\ -\log. 0{,}0159881 &= 0{,}2037968 - 2 \\ \log. n &= 1{,}4748320 \\ \text{num.} &= 29{,}8423\,.. \\ n &= \mathbf{29{,}8423}\,.. \text{ Jahre (wie oben).} \end{aligned}$$

103. Im Begriffe, das zur Bestreitung eines außergewöhnlichen Betriebsaufwandes erforderliche Kapital von 12 000 Mark anzuleihen, gedenkt der Landwirt P. das Verhältnis zunächst derart einzurichten, daß er, um die Schuld auf den Betrag von 2 000 Mark zu vermindern, am Schlusse jeden Jahres eine Abschlagszahlung von 1 100 Mark leistet. Dabei sieht er sich vor die Frage gestellt, nach wieviel Jahren das Schuldkapital bis auf jene Summe reduziert sein wird, wenn die Darlehnskasse $4^1/_4$ Prozent verlangt. Wie lautet die Rechnung?

A.

$$n = \frac{\log.[(2\,000 \times 0{,}0425) - 1\,100] - \log.[(12\,000 \times 0{,}0425) - 1\,100]}{\log. 1{,}0425}$$

oder, da die jährlichen Zahlungen mehr als die Zinsen des Kapitales betragen, in positiven Werten:

$$n = \frac{\log.[1\,100 - (2\,000 \times 0{,}0425)] - \log.[1\,100 - (12\,000 \times 0{,}0425)]}{\log. 1{,}0425}$$

$$= \frac{\log.(1\,100 - 85) - \log.(1\,100 - 510)}{\log. 1{,}0425}$$

$$= \frac{\log. 1\,015 - \log. 590}{\log. 1{,}0425}$$

$$\begin{aligned} \log. 1\,015 &= 3{,}0064660 \\ -\log. 590 &= 2{,}7708520 \\ &\ 0{,}2356140 \\ \log. 1{,}0425 &= 0{,}0180761 \end{aligned}$$

$$n = \frac{2356140}{180761} = \mathbf{13{,}0345}\,.. \text{ Jahre, oder 13 Jahre und 13 Tage.}$$

Division logarithmiert:

$$\log.\ 0{,}2356140 = 0{,}3722011 - 1$$
$$-\log.\ 0{,}0180761 = 0{,}2571047 - 2$$
$$\log.\ n = 1{,}1150964$$
$$\text{num.} = 13{,}0345\ldots$$
$$n = \mathbf{13{,}0345}\ldots \text{ Jahre (wie oben).}$$

d) Vierte Reihe (104—111).

(Anwendung der Formeln XI—XI. c.

Der nunmehr folgenden Rubrik gehören die Fälle an, in denen ein gegebenes Anlage- oder Grundkapital durch Zuschüsse oder Abzüge, welche am Anfange, statt am Ende, eines jeden Jahres stattfinden, von Änderungen betroffen wird. Die hierdurch bedingte Ablenkung von dem seither beobachteten Verfahren wird zwar, wie leicht erkennbar, das Rechnungsergebnis, nicht aber, wie bereits oben (S. 60—62) angedeutet wurde, die formelle Gestaltung des Rechnungsganges wesentlich beeinflussen. Aus diesem Grunde kann die Heranziehung von Beispielen der genannten Kategorie eine Einschränkung erfahren, derart, daß statt der Vorführung von Gruppen je nur Einzelfälle in Betracht gezogen werden. Der Übersichtlichkeit willen wird dann an einer Trennung derselben lediglich nach dem Vorkommen von Zuschüssen oder Abzügen festzuhalten sein.

aa) Die Veränderungen des Grundkapitales beruhen auf regelmäßigen **Zuschüssen** (104—107).

Erster Fall.

(Gegeben: a, p, r und n. Gesucht: A. Anwendung der Formel XI:

$$A = a \,.\, 1{,}0p^n + \frac{r \,.\, 1{,}0p \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}\Big)$$

104. Der Besitzer eines zu 4 Prozent auf Zinseszinsen angelegten Kapitales von 12 000 Mark ist in der Lage, diesen Betrag am Anfange eines jeden Jahres außer den jährlichen Zinsen noch um die Summe von 600 Mark zu vermehren. Über ein wie großes Kapital wird dann der Besitzer bei regelmäßiger Fortsetzung dieser Anlagen nach $15\frac{1}{2}$ Jahren verfügen können? (Betr. die Berechnung des Halbjahres vid. Aufgabe 34.)

A.

$$A = 12\,000 \times 1{,}04^{15} \times 1{,}02 + \frac{600 \times 1{,}04 \times (1{,}04^{15} - 1) \times 1{,}02}{0{,}04}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}04 &= 0{,}0170333\,(4) \\
&\times 15 \\
&\overline{851665} \\
&170333 \\
\log. 1{,}04^{15} &= 0{,}2555001 \\
\log. 1{,}02 &= 0{,}0086002 \\
\text{num.} \log. 1{,}04^{15} &= 1{,}8009437 \\
\text{num.} \log. 1{,}04^{15} - 1 &= 0{,}8009437 \\
\log. (1{,}04^{15} - 1) &= 0{,}9036021 - 1 \\
\log. 0{,}04 &= 0{,}6020600 - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 12\,000 &= 4{,}0791812 \\
+ \log. 1{,}04^{15} &= 0{,}2555001 \\
+ \log. 1{,}02 &= 0{,}0086002 \\
&\overline{4{,}3432815} \\
\text{num.} &= 22\,043{,}55 \ldots 22\,043{,}55 \text{ M} \\
\log. 600 &= 2{,}7781513 \\
+ \log. 1{,}04 &= 0{,}0170333 \\
+ \log. (1{,}04^{15} - 1) &= 0{,}9036021 - 1 \\
+ \log. 1{,}02 &= 0{,}0086002 \\
&\overline{2{,}7073869} \\
- \log. 0{,}04 &= 0{,}6020600 - 2 \\
&\overline{4{,}1053269} \\
\text{num.} &= 12\,744{,}61 \ldots + 12\,744{,}61 \text{ „} \\
A &= \mathbf{34\,788{,}16} \text{ M.}
\end{aligned}$$

Gemäß der auf S. 61 entwickelten vereinfachenden Formel würde man erhalten:

$$A = \left[\left(12\,000 + \frac{600 \times 1{,}04}{0{,}04}\right) \times 1{,}04^{15} - \frac{600 \times 1{,}04}{0{,}04}\right] \times 1{,}02$$

Mit Hilfe der Tafel I:

$$\begin{aligned}
A &= [(12\,000 + 15\,600) \times 1{,}8009435 - 15\,600] \times 1{,}02 \\
&= [(27\,600 \times 1{,}8009435) - 15\,600] \times 1{,}02 \\
&= (49\,706{,}04 - 15\,600) \times 1{,}02 \\
&= 34\,106{,}04 \times 1{,}02 = \mathbf{34\,788{,}16} \text{ Mark.}
\end{aligned}$$

Zweiter Fall.

(Gegeben: A, p, r und n. Gesucht: a. Anwendung der Formel XI. a.:

$$a = \frac{A}{1{,}0p^n} - \frac{r \,.\, 1{,}0p \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \,.\, 0{,}0p}\Big)$$

105. Auf Grund einer einmaligen Anlage und dann eines je vierteljährlich zu leistenden Zuschusses von 75 Mark möchte ein Beamter durch Vermittlung der Sparkasse in 10 Jahren ein Kapital von 7 500 Mark ansammeln. Wenn nun jene Zuschüsse je am Anfang der einzelnen Quartale erfolgen, und die Kasse $3^1/_2$ Prozent berechnet: Welchen Betrag muß der Beamte, um seinen Zweck zu erreichen, erstmalig anlegen? (Vgl. hinsichtlich der Berechnung für Jahres-Abschnitte die Aufgabe 33.)

A.
$$a = \frac{7\,500}{1{,}0\frac{3{,}5}{4}^{40}} - \frac{75 \times 1{,}0\frac{3{,}5}{4} \times (1{,}0\frac{3{,}5}{4}^{40} - 1)}{1{,}0\frac{3{,}5}{4}^{40} \times 0{,}0\frac{3{,}5}{4}}$$

$$1 + 0{,}0\frac{3{,}5}{4} = 1{,}00875$$
$$\log. 1{,}00875 = 0{,}0037836$$
$$\times 40$$
$$\log. 1{,}00875^{40} = 0{,}1513440$$
$$\text{num. log. } 1{,}00875^{40} = 1{,}4169156$$
$$\text{num. log. } 1{,}00875^{40} - 1 = 0{,}4169156$$
$$\log. (1{,}00875^{40} - 1) = 0{,}6200481 - 1$$
$$\log. 0{,}00875 = 0{,}9420081 - 3$$

$$\log. 7\,500 = 3{,}8750613$$
$$- \log. 1{,}00875^{40} = 0{,}1513440$$
$$3{,}7237173$$
$$\text{num.} = 5\,293{,}19$$

$$\log. 75 = 1{,}8750613$$
$$+ \log. 1{,}00875 = 0{,}0037836$$
$$+ \log. (1{,}00875^{40} - 1) = 0{,}6200481 - 1$$
$$1{,}4988930$$

$$\log. 1{,}00875^{40} = 0{,}1513440$$
$$+ \log. 0{,}00875 = 0{,}9420081 - 3$$
$$- 1{,}0933521 \quad 3$$
$$3{,}4055409$$
$$\text{num.} = 2\,544{,}14$$

num. 5 293,19 Mark
— num. 2 544,14 „
a = **2 749,05** Mark.

Anmerkung. Die vorangestellte Formel XI. a. ließe sich allerdings noch insofern abändern, als auf der rechten Seite derselben der Dividendus 1,0p eliminiert und demgemäß in dem Divisor die entsprechende Potenz um 1 reduziert werden kann. Dadurch würde die gleichwertige Formel entstehen:

$$a = \frac{A}{1{,}0p^n} - \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1} \,.\, 0{,}0p}$$

Für den praktischen Gebrauch dürfte jedoch auf diesem Wege, da derselbe die Ermittlung noch einer besonderen logarithmischen Hilfszahl erfordert, kaum eine wesentliche Erleichterung geschaffen werden.

Dritter Fall.

(Gegeben: A, a, p und n. Gesucht: r. Anwendung der Formel XI. b.:

$$r = \frac{(A - a \,.\, 1{,}0p^n) \,.\, 0{,}0p}{1{,}0p \,.\, (1{,}0p^n - 1)}\Bigg)$$

106. Ein junger Landwirt beabsichtigt, das ihm gehörende Kleingut zu veräußern, um mit dem Überschusse des Erlöses über die auf dem Besitztum lastenden Schulden ein größeres Objekt zu pachten. Dem vorliegenden Angebote gemäß würde sich jener Überschuß auf 11 500 Mark belaufen. Wenn er denselben nun zu 4 Prozent auf Zinseszinsen anlegen und aus einem inzwischen anderweit erzielbaren Einkommen durch regelmäßig am Anfange jeden Jahres zu leistende Zuschüsse verstärken kann: Wie hoch müssen sich diese Zuschüsse berechnen, wenn die gesamte Anlage in 9 Jahren auf ein in Aussicht genommenes Pächterkapital von 25 000 Mark anwachsen soll?

A.
$$r = \frac{[25\,000 - (11\,500 \times 1{,}04^9)] \times 0{,}04}{1{,}04 \times (1{,}04^9 - 1)}$$

$$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$$
$$\times 9$$
$$\log. 1{,}04^9 = 0{,}1532997$$
$$\text{num. log. } 1{,}04^9 = 1{,}4233108$$
$$\text{num. log. } 1{,}04^9 - 1 = 0{,}4233108$$
$$\log. (1{,}04^9 - 1) = 0{,}6266593 - 1$$
$$\log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$$

$$\log. 11\,500 = 4{,}0606978$$
$$+ \log. 1{,}04^9 = 0{,}1532997$$
$$4{,}2139975$$
$$\text{num.} = 16\,368{,}07$$

$$A = 25\,000{,}00$$
$$- 16\,368{,}07$$
$$8\,631{,}93$$

$$\log. 8\,631{,}93 = 3{,}9361079$$
$$+ \log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$$
$$2{,}5381679$$

$$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$$
$$+ \log.(1{,}04^9 - 1) = 0{,}6266593 - 1$$
$$- 0{,}6436926 - 1$$
$$2{,}8944753$$
$$\text{num.} = 784{,}29$$
$$r = \mathbf{784{,}29} \text{ Mark.}$$

Mit Hilfe der Tafel I:

$$r = \frac{[25\,000 - (11\,500 \times 1{,}4233118)] \times 0{,}04}{1{,}04 \times 0{,}4233118} = \frac{(25\,000 - 16\,368{,}08) \times 0{,}04}{0{,}4402443}$$
$$= \frac{8\,631{,}92 \times 0{,}04}{0{,}4402443} = \frac{345{,}28}{0{,}4402443} = \mathbf{784{,}29} \text{ Mark.}$$

Vierter Fall.

(Gegeben: A, a, p und r. Gesucht: n. Anwendung der Formel XI. c.:
$$n = \frac{\log. [(A \,.\, 0{,}0p) + r \,.\, 1{,}0p] - \log. [(a \,.\, 0{,}0p) + r \,.\, 1{,}0p]}{\log. 1{,}0p}\Bigg)$$

107. Einem auf Zinseszinsen zu $3^1/_2$ Prozent angelegten Kapitale von 9 300 Mark beabsichtigt dessen Inhaber in der Folge am Anfange jeden Jahres 250 Mark zuzulegen. Mit Ablauf von wieviel Jahren wird das Kapital bis auf den Betrag von 20 000 Mark angewachsen sein?

A.

$$n = \frac{\log. [(20\,000 \times 0{,}035) + 250 \times 1{,}035] - \log. [(9\,300 \times 0{,}035) + 250 \times 1{,}035]}{\log. 1{,}035}$$
$$= \frac{\log. (700 + 258{,}75) - \log. (325{,}50 + 258{,}75)}{\log. 1{,}035}$$
$$= \frac{\log. 958{,}75 - \log. 584{,}25}{\log. 1{,}035}$$

$$\log. 958{,}75 = 2{,}9817054$$
$$- \log. 584{,}25 = 2{,}7665987$$
$$0{,}2151067$$
$$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$$

$$n = \frac{2151067}{149403} = \mathbf{14{,}4} \text{ Jahre (nahezu), oder:}$$
14 Jahre, 4 Monate u. 24 Tage.

Logarithmische Ausführung der Division:

$$\begin{aligned} \log. 0{,}2151067 &= 0{,}3326539 - 1 \\ -\log. 0{,}0149403 &= 0{,}1743593 - 2 \\ \log. n &= 1{,}1582946 \\ \text{num.} &= 14{,}3977\,.. \\ n &= 14{,}4 \text{ Jahre, rund (wie oben).} \end{aligned}$$

bb) Die Veränderungen des Grundkapitales beruhen auf regelmäßigen **Abzügen**. (108—111.)

Erster Fall.

(Gegeben: a, p, r und n. Gesucht: A. Anwendung der Formel XI.:

$$A = a \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r \,.\, 1{,}0p \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}\Big)$$

108. Von einem auf Zinseszinsen zu $4^1/_2$ Prozent ausstehenden Kapitale im Betrage von 24 000 Mark gedenkt der Besitzer am Beginne eines jeden Halbjahres die Summe von 750 Mark zurückzuziehen. Wie hoch wird sich dann sein Guthaben am Schlusse des 12ten Jahres noch berechnen? (Vgl. auch die Aufgaben 33 und 105.)

A. $$A = 24\,000 \times 1{,}0\tfrac{45}{2}^{24} - \frac{750 \times 1{,}0\frac{45}{2} \times (1{,}0\frac{45}{2}^{24} - 1)}{0{,}0\frac{45}{2}}$$

$$\begin{aligned} 1{,}0\tfrac{45}{2} &= 1{,}0225 \\ \log. 1{,}0225 &= 0{,}0096633 \\ &\times 24 \\ &\overline{386532} \\ &193266 \\ \log. 1{,}0225^{24} &= 0{,}2319192 \\ \text{num. log. } 1{,}0225^{24} &= 1{,}7057651 \\ \text{num. log. } 1{,}0225^{24} - 1 &= 0{,}7057651 \\ \log. (1{,}0225^{24} - 1) &= 0{,}8486602 - 1 \\ \log. 0{,}0225 &= 0{,}3521825 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. 24\,000 &= 4{,}3802112 \\ +\log. 1{,}0225^{24} &= 0{,}2319192 \\ &\overline{4{,}6121304} \\ \text{num.} &= 40\,938{,}36 \;.\;.\;.\; 40\,938{,}36 \text{ M} \\ \log. 750 &= 2{,}8750613 \\ +\log. 1{,}0225 &= 0{,}0096633 \\ +\log. (1{,}0225^{24} - 1) &= 0{,}8486602 - 1 \\ &\overline{2{,}7333848} \\ -\log. 0{,}0225 &= 0{,}3521825 - 2 \\ &\overline{4{,}3812023} \\ \text{num.} &= 24\,054{,}83 \,..\, - 24\,054{,}83 \;, \\ A &= \mathbf{16\,883{,}53} \text{ M} \end{aligned}$$

In Anwendung der auf S. 61 entwickelten vereinfachenden Formel ergibt sich:

$$A = \left(24\,000 - \frac{750 \times 1{,}0225}{0{,}0225}\right) \times 1{,}0225^{24} + \frac{750 \times 1{,}0225}{0{,}0225}$$

$$\frac{750 \times 1{,}0225}{0{,}0225} = \frac{766\,875{,}0}{225} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 34\,083{,}33 \text{ Mark}$$

$$24\,000 - \frac{750 \times 1{,}0225}{0{,}0225} = 24\,000 - 34\,083{,}33$$
$$= -\,10\,083{,}33$$

$\times$ num. log. $1{,}0225^{24}$ (n. ob. Berechn. $= 1{,}7057651$)

$= -\,10\,083{,}33 \times 1{,}7057651 = \;.\;.\;.\;.\;.\; -17\,199{,}80$ „

A = **16 883,53** Mark (w. o.).

Zweiter Fall.

(Gegeben: A, p, r und n. Gesucht: a. Anwendung der Formel XI. a.:

$$a = \frac{A}{1{,}0p^n} + \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1} \cdot 0{,}0p}\Big)$$

109. Behufs Ausführung eines Projektes, welches während eines Zeitraumes von 5 Jahren einen jährlichen Kostenaufwand von 4 000 Mark erfordert, will der Unternehmer ein Kapital auf Zinseszinsen derart anlegen, daß er aus demselben nicht allein jene Jahressumme beziehen, sondern auch mit Ablauf der vorgesehenen Zeitdauer noch über eine Reserve von 1 600 Mark verfügen kann. Wie groß wird das einzuzahlende Kapital sein müssen, wenn die Rückbezüge am Anfange jeden Jahres erfolgen sollen, und die betreffende Bank einen Zins von $4^3/_4$ Prozent vergütet?

A. $$a = \frac{1\,600}{1{,}0475^5} + \frac{4\,000 \times (1{,}0475^5 - 1)}{1{,}0475^{5-1} \times 0{,}0475}$$

$\log. 1{,}0475 = 0{,}0201540$
$\times 5$
$\log. 1{,}0475^5 = 0{,}1007700$
$\log. 1{,}0475^{5-1} = 0{,}0806160$
$\text{num.} \log. 1{,}0475^5 = 1{,}2611594$
$\text{num.} \log. 1{,}0475^5 - 1 = 0{,}2611594$
$\log. (1{,}0475^5 - 1) = 0{,}4169057 - 1$
$\log. 0{,}0475 = 0{,}6766936 - 2$

$\log. 1\,600 = 3{,}2041200$
$- \log. 1{,}0475^5 = 0{,}1007700$
$3{,}1033500$
$\text{num.} = 1\,268{,}67$

$\log. 4\,000 = 3{,}6020600$
$+ \log. (1{,}0475^5 - 1) = 0{,}4169057 - 1$
$3{,}0189657$
$\log. 1{,}0475^{5-1} = 0{,}0806160$
$+ \log. 0{,}0475 = 0{,}6766936 - 2$
$- 0{,}7573096 - 2$
$4{,}2616561$
$\text{num.} = 18\,266{,}53$

$\text{num.} = 1\,268{,}67$ Mark
$+ \text{num.}\ 18\,266{,}53$ „
$a = \mathbf{19\,535{,}20}$ Mark.

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$a = 1600 \times 0{,}7929209 + \frac{4000 \times 0{,}2611599}{1{,}2039713 \times 0{,}0475} = 1\,268{,}67344 + \frac{1\,044{,}6396}{0{,}0571886}$$
$$= 1\,268{,}67 + 18\,266{,}56 = \mathbf{19\,535{,}23}\ \text{Mark.}$$

oder auch, da $\frac{1}{1{,}2039713 \times 0{,}0475} = \frac{1}{0{,}0571880} = 17{,}486$ ist:

$$a = 1\,268{,}67344 + (1\,044{,}6396 \times 17{,}486) = 1\,268{,}67 + 18\,266{,}56$$
$$= \mathbf{19\,535{,}23}\ \text{Mark.}$$

Dritter Fall.

(Gegeben: A, a, p und n. Gesucht: r. Anwendung der Formel XI. b.:

$$r = \frac{(a \cdot 1{,}0p^n - A) \cdot 0{,}0p}{1{,}0p \cdot (1{,}0p^n - 1)}\Big)$$

110. Es erhält Jemand in der Erbauseinandersetzung ein bares Kapital von 15 350 Mark. Dasselbe soll derart auf Zinseszinsen angelegt werden, daß es nach Abzug eines bestimmten, am Beginne eines jeden Jahres zu erhebenden Betrages in der Zeit von 15 Jahren bis auf 20 000 Mark anwächst. Welche Summe darf der Besitzer jährlich beziehen, wenn er auf einen Zins von 5 Prozent rechnen kann?

A. $$r = \frac{(15\,350 \times 1{,}05^{15} - 20\,000) \times 0{,}05}{1{,}05 \times (1{,}05^{15} - 1)}$$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}05 &= 0{,}0211893 \\ &\times 15 \\ &1059465 \\ &211893 \\ \log. 1{,}05^{15} &= 0{,}3178395 \\ \text{num.} \log. 1{,}05^{15} &= 2{,}0789282 \\ \text{num.} \log. 1{,}05^{15} - 1 &= 1{,}0789281 \\ \log. (1{,}05^{15} - 1) &= 0{,}0329925 \\ \log. 0{,}05 &= 0{,}6989700 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. 15\,350 &= 4{,}1861084 \\ + \log. 1{,}05^{15} &= 0{,}3178395 \\ &\overline{4{,}5039479} \\ \text{num.} &= 31\,911{,}55 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &31\,911{,}55 \\ - A = &20\,000{,}00 \\ &\overline{11\,911{,}55} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. 11\,911{,}55 &= 4{,}0759682 \\ + \log. 0{,}05 &= 0{,}6989700 - 2 \\ &\overline{2{,}7749382} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}05 &= 0{,}0211893 \\ + \log. (1{,}05^{15} - 1) &= 0{,}0329925 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- 0{,}0541818 \\ &\overline{2{,}7207564} \\ \text{num.} &= 525{,}72 \\ r &= \mathbf{525{,}72} \text{ Mark.} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$r = \frac{(15\,350 \times 2{,}0789282 - 20\,000) \times 0{,}05}{1{,}05 \times 1{,}0789282} = \frac{11\,911{,}55 \times 0{,}05}{1{,}132874} = \frac{595{,}58}{1{,}132874}$$
$$= \mathbf{525{,}72} \text{ Mark},$$

oder auch: . . . $595{,}58 \times \frac{1}{1{,}132874} = 595{,}58 \times 0{,}88271 = \mathbf{525{,}72}$ Mark.

Anmerkung. Unter Berufung auf die Erklärung zu den Aufgaben 98 und 99 soll daran erinnert werden, daß nach dem hier vorgeführten Rechnungsverfahren auch die Fälle zu behandeln sind, in welchen Schuldkapitalien innerhalb gegebener Frist durch regelmäßig am Anfange jeden Jahres zu leistende Rückzahlungen (Zinsen + Tilgungsraten) bis auf eine bestimmte Summe abgetragen werden sollen. Knüpft man an das Beispiel 110 an und faßt man das genannte Kapital als eine Schuld auf, welche in 15 Jahren bis auf den Betrag von 5000 Mark abzustoßen ist, so berechnet sich mit Benutzung der bereits angegebenen Hilfszahlen aus:

$$r = \frac{(15\,350 \times 1{,}05^{15} - 5\,000) \times 0{,}05}{1{,}05 \times (1{,}05^{15} - 1)}$$
$$r = 1\,187{,}75 \text{ Mark.}$$

Vierter Fall.

(Gegeben: A, a, p und r. Gesucht: n. Anwendung der Formel XI. c.:

$$n = \frac{\log.[(A . 0{,}0p) - r . 1{,}0p] - \log.[(a . 0{,}0p) - r . 1{,}0p]}{\log. 1{,}0p}$$)

111. Ein Landwirt vereinbart mit der Orts-Kreditkasse, daß sie ihm ein Darlehen im Betrage von 16 500 Mark auf Zinseszinsen zu $4^1/_2$ Prozent unter der Bedingung gewährt, daß der Schuldner sich verpflichtet, dasselbe in gleichen, den Zins einschließenden, am Anfange eines jeden Jahres zu zahlenden Raten von 1 200 Mark bis auf die Summe von 5 000 Mark abzutragen. Nach Ablauf welcher Zeit wird diese Verminderung der Schuld eingetreten sein?

A.

$$n = \frac{\log.[(1\,200 \times 1{,}045) - 5000 \times 0{,}045] - \log.[(1\,200 \times 1{,}045) - 16500 \times 0{,}045]}{\log. 1{,}045}$$

$$= \frac{\log.(1\,254 - 225) - \log.(1\,254 - 742{,}50)}{\log. 1{,}045}$$

$$= \frac{\log. 1\,029 - \log. 511{,}50}{\log. 1{,}045}$$

$$\log. 1\,029 = 3{,}0124154$$
$$- \log. 511{,}50 = 2{,}7088456$$
$$0{,}3035698$$
$$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$$

$$n = \frac{3035698}{191163} = \mathbf{15{,}88} \text{ Jahre (rund), oder}$$

15 Jahre, 10 Monate u. 17 Tage.

Division logarithmisch behandelt:

$$\log. 0{,}3035698 = 0{,}4822586 - 1$$
$$- \log. 0{,}0191163 = 0{,}2814038 - 2$$
$$\log. n = 1{,}2008548$$
$$\text{num.} = 15{,}8802 \ldots$$
$$n = \mathbf{15{,}88} \text{ Jahre (wie oben).}$$

Sonder - Aufgaben.

(112—118.)

Für die Anwendung der Formeln VIII—XI (Aufgaben 76—111, S. 65—93) gestalteten sich die Voraussetzungen regelmäßig derart, daß die strikte Benutzung der gegebenen Ansätze auch unmittelbar zum Ziele führte. Nun können aber die einschlagenden Probleme auch abändern, so zwar, daß die Behandlung derselben eine Modifikation der Formeln erheischt oder noch ergänzende bezw. erweiternde Hilfsrechnungen beansprucht. Zur Veranschaulichung dessen mögen hier noch einige Beispiele angereiht werden.

112. Der Besitzer eines zu 4 Prozent auf Zinseszinsen ausstehenden Kapitales von 7 000 Mark war in der Lage, demselben vom 6ten Jahre an am Schlusse jeden Jahres den Betrag von 300 Mark zuzulegen. Wenn nun diese Anlagen sich bis zum Ablauf des 20ten Jahres fortsetzten: Auf welche Summe werden dieselben alsdann angewachsen sein? (Formel VIII.)

A. $A = (7\,000 \times 1{,}04^5 \times 1{,}04^{15}) + \frac{300 \times (1{,}04^{15} - 1)}{0{,}04}$

$= 7\,000 \times 1{,}04^{20} + \frac{300 \times (1{,}04^{15} - 1)}{0{,}04}$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333\,(4)$
$\log. 1{,}04^{20} = 0{,}3406668$
$\log. 1{,}04^{15} = 0{,}2555500$
$\text{num.}\log. 1{,}04^{15} = 1{,}8009437$
$\text{num.}\log. 1{,}04^{15} - 1 = 0{,}8009437$
$\log. (1{,}04^{15} - 1) = 0{,}9036021 - 1$
$\log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$

$\log. 7\,000 = 3{,}8450980$
$+ \log. 1{,}04^{20} = 0{,}3406668$
$4{,}1857648$
num. = 15 337,86 . . . 15 337,86 M

$\log. 300 = 2{,}4771213$
$+ \log. (1{,}04^{15} - 1) = 0{,}9036021 - 1$
$2{,}3807234$
$- \log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$
$3{,}7786634$
num. = 6 007,08 . . + 6 007,08 „
A = 21 344,94 M.

Mit Hilfe der Tafel I:

$A = 7\,000 \times 2{,}1911231 + \frac{300 \times 0{,}8009435}{0{,}04}$

$= 15\,337{,}8617 + (7\,500 \times 0{,}8009435)$
$= 15\,337{,}86 + 6\,007{,}08 =$ **21 344,94** Mark.

113. Es beabsichtigt Jemand, ein Kapital auf Zinseszinsen in der Weise anzulegen, daß er unter Zuhilfenahme einer während der ersten 6 Jahre regelmäßig am Ende jeden Jahres zu leistenden Nachzahlung von 250 Mark mit Ablauf von 10 Jahren über eine Summe von 5 000 Mark verfügen kann. Welcher Betrag wird dann, eine Zinsvergütung von $3\frac{1}{2}$ Prozent vorausgesetzt, erstmalig angelegt werden müssen? (Formel VIII. a)

A. $a = \frac{5\,000}{1{,}035^4 \times 1{,}035^6} - \frac{250 \times (1{,}035^6 - 1)}{1{,}035^6 \times 0{,}035}$

$= \frac{5\,000}{1{,}035^{10}} - \frac{250 \times (1{,}035^6 - 1)}{1{,}035^6 \times 0{,}035}$

$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$
$\log. 1{,}035^{10} = 0{,}1494030$
$\log. 1{,}035^6 = 0{,}0896418$
$\text{num.}\log. 1{,}035^6 = 1{,}2292544$
$\text{num.}\log. 1{,}035^6 - 1 = 0{,}2292544$
$\log. (1{,}035^6 - 1) = 0{,}3603177 - 1$
$\log. 0{,}035 = 0{,}5440680 - 2$

$\log. 5\,000 = 3{,}6989700$
$- \log. 1{,}035^{10} = 0{,}1494030$
$3{,}5495670$
num. = 3 544,60

$\log. 250 = 2{,}3979400$
$+ \log. (1{,}035^6 - 1) = 0{,}3603177 - 1$
$1{,}7582577$
$\log. 1{,}035^6 = 0{,}0896418$
$+ \log. 0{,}035 = 0{,}5440680 - 2$
$- 0{,}6337098 - 2$
$3{,}1245479$
num. = 1 332,13

num. = 3 544,60 Mark
— num. 1 332,13 „
a = **2 212,47** Mark.

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$a = (5\,000 \times 0{,}7089188) - \frac{250 \times 0{,}2292553 \times 0{,}8135006}{0{,}035}$$

$$= 3\,544{,}60 - \frac{250 \times 0{,}186499}{0{,}035} = 3\,544{,}60 - \frac{46{,}62475}{0{,}035}$$

$$= 3\,544{,}60 - 1\,332{,}13 = \mathbf{2\,212{,}47} \text{ Mark.}$$

114. Ein Familienvater will einen ihm zugefallenen Erbanteil von 12 500 Mark auf Zinseszinsen unter dem Vorbehalt anlegen, von demselben nach Ablauf von 4 Jahren zur Bestreitung voraussichtlich eintretender Bedürfnisse seines Haushaltes während 7 Jahren am Schlusse eines jeden Jahres einen so hohen Betrag abzuheben, daß ihm am Ende eines Zeitraumes von 16 Jahren noch 4 500 Mark zur Verfügung bleiben. Die Kreditkasse, welcher er das Kapital anvertraut, vergütet $4^1/_4$ Prozent. Wieviel kann sich der Besitzer während jener 7 Jahre jährlich auszahlen lassen? (Formel X. b.)

A. Im gegebenen Falle ist Folgendes zu erwägen:

Die Wertbewegung des während 4 + 7 Jahren auf Zinseszinsen ausstehenden ursprünglichen Kapitales von 12 500 Mark schreitet während der zweiten Periode von 7 Jahren um den Betrag der Abzüge mit deren Zinszuwachs zurück. In dem dann folgenden letzten abzugsfreien Zeitraum von 5 Jahren vermehrt sich aber das Kapital wieder um den Betrag der Zinseszinsen, und wenn dasselbe während dieser Zeit die Summe von 4 500 Mark erreichen soll, so wird sein Anfangswert am Schlusse des 11ten Jahres $= \frac{4\,500}{1{,}0425^5}$ sein. (Diskontierung.) Darnach muß die genannte Formel in Anwendung auf das vorliegende Beispiel lauten:

$$r = \frac{\left(12\,500 \times 1{,}0425^4 \times 1{,}0425^7 - \frac{4\,500}{1{,}0425^5}\right) \times 0{,}0425}{1{,}0425^7 - 1}$$

$$= \frac{\left(12\,500 \times 1{,}0425^{11} - \frac{4\,500}{1{,}0425^5}\right) \times 0{,}0425}{1{,}0425^7 - 1}$$

$\log 1{,}0425 = 0{,}0180761$
$\log 1{,}0425^{11} = 0{,}1988371$
$\log 1{,}0425^{7} = 0{,}1265327$
$\log 1{,}0425^{5} = 0{,}0903805$
$\text{num.} \log 1{,}0425^{7} = 1{,}3382360$
$\text{num.} \log 1{,}0425^{7} - 1 = 0{,}3382360$
$\log (1{,}0425^{7} - 1) = 0{,}5292198 - 1$
$\log 0{,}0425 = 0{,}6283889 - 2$

$\log 12\,500 = 4{,}0969100$
$+ \log 1{,}0425^{11} = 0{,}1988371$
$4{,}2957471$
$\text{num.} = 19\,758{,}18$

$\log 4\,500 = 3{,}6532125$
$- \log 1{,}0425^{5} = 0{,}0903805$
$3{,}5628320$
$\text{num.} = 3\,654{,}53$

$19\,758{,}18 - 3\,654{,}53 = 16\,103{,}65$

$\log 16\,103{,}65 = 4{,}2069244$
$+ \log 0{,}0425 = 0{,}6283889 - 2$
$2{,}8353133$
$- \log (1{,}0425^{7} - 1) = 0{,}5292198 - 1$
$3{,}3060935$
$\text{num.} = 2\,023{,}45$
$r = \mathbf{2\,023{,}45}$ Mark.

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$r = [(12\,500 \times 1{,}5806536 - 4\,500 \times 0{,}812119) \times 0{,}0425] \times \frac{1}{0{,}3382352}$$
$$= [(19\,758{,}17 - 3\,654{,}5355) \times 0{,}0425] \times 2{,}9565226$$
$$= 16\,103{,}6345 \times 0{,}0425 \times 2{,}9565226 = \mathbf{2\,023{,}46} \text{ Mark.}$$

115. Von einem zu 5 Prozent auf Zinseszinsen übernommenen Anleihen im Betrage von 8 000 Mark soll der Schuldner vereinbarungsgemäß nach Ablauf von 3 Jahren am Ende eines jeden Jahres 800 Mark, und zwar so lange abzahlen, bis die Forderung sich auf $^1/_4$ der ursprünglichen Höhe, also auf 2 000 Mark vermindert hat. Nach wieviel Jahren, von dem Beginne der Abzahlungen an, wird dieser Fall eintreten? (Formel X. c.)

A. Hier muß in Betracht gezogen werden, daß zwei Perioden in Frage kommen, von welchen die erste die Zahl der Jahre von der Kontrahierung der Schuld bis zum Eintritt der ersten Abzahlung, die zweite aber die Zeitdauer umfaßt, in welcher die Schuld sich durch die Abtragungen vermindert. Um unnötige Weiterungen zu vermeiden, ist daher die Rechnung so anzulegen, daß nur der zweite dieser Abschnitte direkt ermittelt wird, ein Verfahren, welches die Prolongation der ursprünglichen Schuld erfordert. Demgemäß hat man:

$$n = \frac{\log [800 - (2\,000 \times 0{,}05)] - \log [800 - (8\,000 \times 1{,}05^3 \times 0{,}05)]}{\log 1{,}05}$$

Den vorerst zu ermittelnden Wert von $8\,000 \times 1{,}05^3$ erhält man also:

$\log 1{,}05 = 0{,}0211893$
$\times 3$
$\log 1{,}05^3 = 0{,}0635679$

$\log 8\,000 = 3{,}9030900$
$+ \log 1{,}05^3 = 0{,}0635679$
$3{,}9666579$
$\text{num.} = 9\,261$

Somit ist:

$$n = \frac{\log.[800 - (2\,000 \times 0{,}05)] - \log.[800 - (9261 \times 0{,}05)]}{\log. 1{,}05}$$

$$= \frac{\log.(800 - 100) - \log.(800 - 463{,}05)}{\log. 1{,}05}$$

$$= \frac{\log. 700 - \log. 336{,}95}{\log. 1{,}05}$$

$$\begin{aligned} \log. 700 &= 2{,}8450980 \\ - \log. 336{,}95 &= 2{,}5275655 \\ &\overline{0{,}3175325} \\ \log. 1{,}05 &= 0{,}0211893 \end{aligned}$$

$$n = \frac{3175325}{211893} = \mathbf{14{,}985}\,..\text{ oder rund } \mathbf{15} \text{ Jahre.}$$

Die logarithmische Behandlung der Division ergibt:

$$\begin{aligned} \log. 0{,}3175325 &= 0{,}5017882 - 1 \\ - \log. 0{,}0211893 &= 0{,}3261167 - 2 \\ \log. n &= 1{,}1756715 \\ \text{num.} &= \mathbf{14{,}985}\,..\text{ Jahre (wie oben).} \end{aligned}$$

116. Von einem vermögenden Anverwandten werden einem im Alter von 7 Jahren stehenden Knaben 4 000 Mark mit der Bestimmung geschenkt, daß dieselben auf Zinseszinsen angelegt und später zur Bestreitung der Kosten des beruflichen Studiums des Empfängers verwendet werden sollen. Das Kapital steht zu $4^1/_2$ Prozent aus. Vom 19ten Altersjahre an besucht der junge Mann während 4 Jahren die Hochschule und entnimmt dem ihm zustehenden Fond am Anfange jeden Jahres die Summe von 1 500 Mark. Wie groß ist der Restbetrag des Kapitales, welcher demselben nach Ablauf dieser Zeit noch verbleibt? (Formel XI.)

A. Die Behandlung dieses Falles geschieht analog den Ausführungen zu den Aufgaben 112 und 113. Darnach hat man:

$$A = 4\,000 \times 1{,}045^{12} \times 1{,}045^4 - \frac{1\,500 \times 1{,}045 \times (1{,}045^4 - 1)}{0{,}045}$$

$$= 4\,000 \times 1{,}045^{16} - \frac{1\,500 \times 1{,}045 \times (1{,}045^4 - 1)}{0{,}045}$$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}045 &= 0{,}0191163 \\ \log. 1{,}045^{16} &= 0{,}3058608 \\ \log. 1{,}045^4 &= 0{,}0764652 \\ \text{num.} \log. 1{,}045^4 &= 1{,}1925187 \\ \text{num.} \log. 1{,}045^4 - 1 &= 0{,}1925187 \\ \log. (1{,}045^4 - 1) &= 0{,}2844730 - 1 \\ \log. 0{,}045 &= 0{,}6532125 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. 4\,000 &= 3{,}6020600 \\ + \log. 1{,}045^{16} &= 0{,}3058608 \\ &3{,}9079208 \\ \text{num.} &= 8\,089{,}48 \;\ldots\; 8\,089{,}48 \text{ M} \\ \log. 1\,500 &= 3{,}1760913 \\ + \log. 1{,}045 &= 0{,}0191163 \\ + \log.(1{,}045^4 - 1) &= 0{,}2844730 - 1 \\ &2{,}4796806 \\ - \log. 0{,}045 &= 0{,}6532125 - 2 \\ &3{,}8264681 \\ \text{num.} &= 6\,706{,}07 \;\ldots - 6\,706{,}07\,.. \\ A &= \mathbf{1\,383{,}41} \text{ M.} \end{aligned}$$

117. Ein Landwirt hat bei der Kreditbank gegen Pfandsicherheit eine Schuld von 25 000 Mark mit der Zinspflicht von $3^1/_2$ Prozent kontrahiert. Behufs Abtragung der Hälfte dieses Anleihens (12 500 Mark) will der Schuldner, um zugleich von einer für die Abschlagszahlungen ihm bewilligten Zinsbegünstigung von $^1/_4$ Prozent Gebrauch zu machen, von dem nächst bevorstehenden Zahltermine an 10 Jahre lang je am Anfange des Jahres die betreffende Rate entrichten. — Wie hoch wird sich diese an sich, und wie hoch mit Einschluß der Zinsen für die bleibende (der Amortisation nicht unterworfene) Schuld belaufen? (Formel XI. b.)

A. Um das Verhältnis rechnerisch darzulegen, ist zu beachten, daß verschiedene Zinsprozente für das ausstehende Kapital und für die Abschlagszahlungen in die Gleichung eingesetzt werden müssen. Bezeichnet man dieselben dort mit p und hier mit p_1, so würde die Formel für den ersten Teil der Aufgabe, also nur bezogen auf das zu amortisierende Kapital, lauten:

$$r = \frac{(a \cdot 1{,}0p^n - \frac{a}{2} \cdot 1{,}0p^n) \cdot 0{,}0p_1}{1{,}0p_1 \cdot (1{,}0p_1^{\,n} - 1)} = \frac{\frac{a}{2} \cdot 1{,}0p^n \cdot 0{,}0p_1}{1{,}0p_1 \cdot (1{,}0p_1^{\,n} - 1)}$$

Und in Übertragung auf den gegebenen Fall:

$$r = \frac{12\,500 \times 1{,}035^{10} \times 0{,}0375}{1{,}0375 \times (1{,}0375^{10} - 1)}$$

$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$
$\times 10$
$\log. 1{,}035^{10} = 0{,}1494030$
$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$
$\log. 1{,}0375^{10} = 0{,}1598810$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^{10} = 1{,}4450438$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^{10} - 1 = 0{,}4450438$
$\log. (1{,}0375^{10} - 1) = 0{,}6484027 - 1$
$\log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$

$\log. 12\,500 = 4{,}0969100$
$+ \log. 1{,}035^{10} = 0{,}1494030$
$+ \log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 -$
$4{,}8203443$
$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$
$+ \log. (1{,}0375^{10} - 1) = 0{,}6484027 - 1$
$- 0{,}6643908 -$
$3{,}1559535$
num. = 1 432,03
r = **1 432,03** Mark

Zur Kontrolle des Verfahrens dient folgende Rechnung:

Der Endwert des Schuldkapitales würde, wenn keine Abschlagszahlung stattfindet, mit Zuschlag der Zinseszinsen nach Ablauf von 10 Jahren betragen:

$25\,000 \times 1{,}035^{10}$ (I) = ... 35 264,94 Mark.

Diese Summe vermindert sich um den Endwert der jährlich geleisteten Zahlungen und zwar:

1. Der Tilgungsbeträge:

$$\frac{1\,432{,}03 \times 1{,}0375 \times (1{,}0375^{10} - 1)}{0{,}0375} \text{ (XIII)} = 17\,632{,}47 \text{ M}$$

2. der Zinsen von der bleibenden Schuld:
$12\,500 \times (1{,}035^{10} - 1)$
$= 17\,632{,}47 - 12\,500 =$ . . . . 5 132,47 M

22 764,94 Mark.

Der Betrag der Restschuld ist also am Schlusse des 10ten Jahres . . . . 12 500,00 Mark.

Das ist aber die Hälfte des ursprünglichen Schuldkapitales.

Die zweite der in der Aufgabe gestellten Fragen verlangt Auskunft darüber, wieviel die gleichzeitig mit den Raten der Amortisation des Kapitales zu entrichtenden jährlichen Abzahlungen an Zinsen von dem bleibenden Anteil der Schuld betragen würden. Zur Beantwortung derselben führt eine einfache Betrachtung:

Der Endwert der Zinsen von dem bleibenden Kapital ist, wie oben gezeigt wurde: 5 132,47 Mark. Soll derselbe nun mit den für die Tilgung der schwebenden Hälfte des Schuldkapitales erforderlichen Raten von 1 432,03 Mark an gleichen Terminen, zu dem gleichen Zinsfuße, vorschüssig in Teilbeträgen abgezahlt werden, so hat man (XIII b):

$$r_1 = \frac{5\,132{,}47 \times 0{,}0375}{1{,}0375 \times (1{,}0375^{10} - 1)} = \frac{192{,}47}{0{,}46173} = \mathbf{416{,}84} \text{ Mark.}$$

Somit wäre der Gesamtbetrag der Zins- und Amortisationsraten: $1\,432{,}03 + 416{,}84 = \mathbf{1\,848{,}87}$ Mark.

Anmerkungen. 1. Ein zusammenfassendes Ergebnis würde man übrigens auch auf direktem Wege erhalten, wenn man von dem Endwert (35 264,94 M), bis auf welchen das gesamte Schuldkapital (25 000 M) durch Zuwachs an Zinseszinsen in 10 Jahren anwächst, das mit Ablauf dieser Frist verbleibende Schuldkapital (12 500 M) in Abzug bringt und dann von dem Betrage der Differenz (22 764,94 M) die Zins- und Tilgungsraten berechnet. Auf diesem Wege ergibt sich:

$$r = \frac{22\,764{,}94 \times 0{,}0375}{1{,}0375 \times (1{,}0375^{10} - 1)} = \frac{853{,}685}{0{,}46173} = \mathbf{1\,848{,}87} \text{ Mark (w. o.).}$$

2. Würde für die Abtragung der Zinsen der gleiche Zinsfuß (3,5 Prozent) wie für die Kapital-Anleihe angenommen, so müßte der Jahresbetrag allerdings etwas höher ausfallen. Man erhielte dann: $12\,500 \times 0{,}035 = 437{,}50$, bei vorschüssiger Zahlung derselben $\frac{437{,}50}{1{,}035} = 422{,}70$ Mark, und schließlich für den Gesamtbetrag der Zins- und Tilgungsraten: $1\,432{,}03 + 422{,}70 = \mathbf{1\,854{,}73}$ Mark.

118. Von zwei auf Zinseszinsen zu 4 Prozent angelegten Kapitalien im Betrage von 6 000 und 50 000 Mark wird das erstere durch regelmäßig am Ende jeden Jahres stattfindende Zulagen von je 400 Mark vermehrt, das letztere dagegen in zeitlich gleicher Weise durch Entnahmen von je 3 000 Mark vermindert. Nach Ablauf von wieviel Jahren werden die beiden ursprünglichen Kapitalien die gleichen Beträge erreicht haben? (Formeln VIII und X.)

A. Die Lösung dieser Aufgabe kann auf einfachem Wege durch Aufstellung einer Gleichung geschehen, in welcher die unbekannte Größe n sich auf den nämlichen End- oder Schlußwert der beiden Kapitalanlagen bezieht. Daher der Ansatz:

$$6\,000 \times 1{,}04^n + \frac{400 \times (1{,}04^n - 1)}{0{,}04} = 50\,000 \times 1{,}04^n - \frac{3\,000 \times (1{,}04^n - 1)}{0{,}04}$$

$$60 \times 1{,}04^n + \frac{4 \times (1{,}04^n - 1)}{0{,}04} = 500 \times 1{,}04^n - \frac{30 \times (1{,}04^n - 1)}{0{,}04}$$

$$60 \times 0{,}04 \times 1{,}04^n + 4 \times (1{,}04^n - 1) = 500 \times 0{,}04 \times 1{,}04^n - 30 \times (1{,}04^n - 1)$$

$$2{,}4 \times 1{,}04^n + 4 \times 1{,}04^n - 4 = 20 \times 1{,}04^n - 30 \times 1{,}04^n + 30$$

$$1{,}04^n \times (2{,}4 + 4) - 4 = 1{,}04^n \times (20 - 30) + 30$$

$$1{,}04^n \times 6{,}4 = (1{,}04^n \times - 10) + 34$$

$$1{,}04^n \times 16{,}4 = 34$$

$$n = \frac{\log.\, 34 - \log.\, 16{,}4}{\log.\, 1{,}04} = \frac{1{,}5314789 - 1{,}2148438}{0{,}0170333} = \frac{3166351}{170333}$$

$= \mathbf{18{,}589}$ Jahre oder (rund): 18 Jahre und 7 Monate.

Eine kontrollierende Sonderrechnung ergibt dann, daß beide Kapitalien mit Ablauf dieser Zeit übereinstimmend den Betrag von rund 23 170 Mark erreicht haben.

e) Fünfte Reihe (119—141).

(Anwendung der Formeln XII—XII. c.)

Erste Gruppe.

(Gegeben: r, p und n. Gesucht: $a \,.\, 1{,}0p^n$. Anwendung der Formel XII.:

$$a \,.\, 1{,}0p^n = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}.)$$

Vorbemerkung. Zur Orientierung über das hier in Frage stehende Verhältnis hat man sich zu vergegenwärtigen, daß der gesuchte, mit $a \,.\, 1{,}0p^n$ bezeichnete Endwert des zu p Prozent während n Jahren auf Zinseszinsen ausstehenden Kapitals a dem Betrage gleich ist, bis auf welchen die am Schlusse eines jeden der n Jahre erfolgenden Zahlungen r (Annuitäten) mit ihren zu p Prozent berechneten Zinseszinsen anwachsen. Benennen wir in der Folge der Einfachheit willen den künftigen End- oder Nachwert der Anlagen — statt mit $a \,.\, 1{,}0p^n$ — mit A.

119. Der Besitzer eines Landgutes hat sich verpflichtet, von den auf diesem haftenden (sich auf 40 000 Mark belaufenden) Schulden regelmäßig am Ende eines jeden Jahres $1\frac{1}{4}$ Prozent = 500 Mark abzutragen. Wenn nun $4\frac{1}{2}$ Prozent Zinseszinsen berechnet werden: Welchen Betrag wird dann der Schuldner mit Ablauf von 15 Jahren abgestoßen haben?

A. $$A = \frac{500 \times (1{,}045^{15} - 1)}{0{,}045}\ [1]$$

[1] Trifft es zu, daß der Betrag der Raten r sich bequem durch den Zinsfuß 0,0p teilen lässet, kann die Rechnung auch noch vereinfacht werden, da es alsdann der Logarithmierung von 0,0p nicht mehr bedarf. Darnach würde man den vor-

$$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$$
$$\times 15$$
$$955815$$
$$191163$$
$$\log. 1{,}045^{15} = 0{,}2867445$$
$$\text{num. log. } 1{,}045^{15} = 1{,}9352831$$
$$\text{num. log. } 1{,}045^{15} - 1 = 0{,}9352831$$
$$\log. (1{,}045^{15} - 1) = 0{,}9709430 - 1$$
$$\log. 0{,}045 = 0{,}6532125 - 2$$

$$\log. 500 = 2{,}6989700$$
$$+ \log. (1{,}045^{15} - 1) = 0{,}9709430 - 1$$
$$2{,}6699130$$
$$- \log. 0{,}045 = 0{,}6532125 - 2$$
$$4{,}0167005$$
$$\text{num.} = 10\,392{,}03$$
$$A = \mathbf{10\,392{,}03} \text{ Mark.}$$

Mit Hilfe der Tafel I:

$$A = \frac{500 \times 0{,}9352824}{0{,}045} = \frac{467{,}6412}{0{,}045} = \mathbf{10\,392{,}03} \text{ Mark.}$$

120. Eine Sparkasse übernimmt Einlagen zu $3^3/_4$ Prozent Zinseszinsen. Welche Forderung an dieselbe hat ein Einleger, nachdem er 12 Jahre lang regelmäßig am Ende jeden Jahres 150 Mark einzahlte?

Anmerkung. Das hier aufgenommene Beispiel zeigt, wie die gegebene Formel auch auf die Fälle anzuwenden ist, in welchen die jährlichen Zahlungen, statt der Abtragung vorhandener Schulden, der Ansammlung von Kapitalien dienen. (Sparkassen-Formel.) —

A.
$$A = \frac{150 \times (1{,}0375^{12} - 1)}{0{,}0375}$$

$$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$$
$$\times 12$$
$$319762$$
$$159881$$
$$\log. 1{,}0375^{12} = 0{,}1918572$$
$$\text{num. log. } 1{,}0375^{12} = 1{,}5554540$$
$$\text{num. log. } 1{,}0375^{12} - 1 = 0{,}5554540$$
$$\log. (1{,}0375^{12} - 1) = 0{,}7446481 - 1$$
$$\log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$$

$$\log. 150 = 2{,}1760913$$
$$+ \log. (1{,}0375^{12} - 1) = 0{,}7446481 - 1$$
$$1{,}9207394$$
$$- \log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$$
$$3{,}3467081$$
$$\text{num.} = 2\,221{,}82$$
$$A = \mathbf{2\,221{,}82} \text{ Mark.}$$

121. Ein Gutspächter blieb während 6 Jahren mit je 400 Mark seines Pachtzinses im Rückstande. Der Verpächter beansprucht für seine

---

liegenden (für den angegebenen Zweck allerdings nicht gerade günstig gearteten) Fall auch wie folgt behandeln können:

$$A = \frac{500}{0{,}045} \times (1{,}045^{15} - 1)$$
$$= \frac{500\,000}{45} \times (1{,}045^{15} - 1)$$
$$= 11\,111{,}111 \times (1{,}045^{15} - 1)$$
$$\log. 11\,111{,}111 = 4{,}0457575$$
$$+ \log. (1{,}045^{15} - 1) = 0{,}9709430 - 1$$
$$4{,}0167005$$
$$\text{num.} = \mathbf{10\,392{,}03} \text{ Mark (wie oben).}$$

Forderung $3\frac{1}{2}$ Prozent Zinseszinsen. Welchen Betrag hat der Pächter am Schlusse des 6ten Jahres nachzuzahlen?

A.
$$A = \frac{400 \times (1{,}035^6 - 1)}{0{,}035}$$

$\log 1{,}035 = 0{,}0149403$	$\log 400 = 2{,}6020600$
$\times 6$	$+\log(1{,}035^6 - 1) = 0{,}3603177 - 1$
$\log 1{,}035^6 = 0{,}0896418$	$1{,}9623777$
$\text{num.}\log 1{,}035^6 = 1{,}2292544$	$-\log 0{,}035 = 0{,}5440680 - 2$
$\text{num.}\log 1{,}035^6 - 1 = 0{,}2292544$	$3{,}4183097$
$\log(1{,}035^6 - 1) = 0{,}3603177 - 1$	$\text{num.} = 2\,620{,}05$
$\log 0{,}035 = 0{,}5440680 - 2$	$A =$ **2 620,05** Mark.

122. In einem Pachtvertrag wurde hinsichtlich einer auszuführenden Drainage die Vereinbarung getroffen, daß beide Kontrahenten die auf 6 780 Mark berechneten Kosten des Unternehmens zu gleichen Teilen tragen. Verpächter und Pächter kamen in der anschlagsweisen Berechnung einer Steigerung des Reinertrags der Grundstücke im Betrage von 8 Prozent des Anlage-Kapitales überein und hatten sich dahin verständigt, daß der Pächter zwar dem Gutsbesitzer einen 5 prozentigen Zins von dessen Anteil zu zahlen, im übrigen aber von seinem eigenen Zuschusse den vollen Ertrag von 8 Prozent und außerdem noch, um seinen Beitrag innerhalb rund 20 Jahren zu amortisieren, den Überschuß-Ertrag des Verpächter-Anteils mit 3 Prozent zu beanspruchen habe. Da jedoch die Pachtung schon nach 14 Jahren abläuft, macht der Pächter an diesem Zeitpunkte die berechtigte Forderung eines Ersatzes für den bis dahin noch nicht amortisierten Betrag seines Kapital-Anteiles geltend. Frage: Wie hoch berechnet sich der Amortisationsfond am Schlusse des 14ten Jahres, und welche Entschädigung hat demgemäß der Verpächter zu leisten?

A. Es handelt sich hier um die Berechnung des Anwachses der Tilgungsquoten von einem Kapital im Betrage von $\frac{6\,780}{2} = 3\,390$ Mark à 3 Prozent = 101,70 Mark. Dieselbe ergibt, wenn man den in Frage stehenden Zwischenwert (statt des gegebenen Endwertes A) mit A_1 bezeichnet, gemäß der Formel XII:

$$A_1 = \frac{101{,}70 \times (1{,}05^{14} - 1)}{0{,}05}$$

$\log 1{,}05 = 0{,}0211893$	$\log 101{,}70 = 2{,}0073210$
$\times 14$	$+\log(1{,}05^{14} - 1) = 0{,}9911957 - 1$
847572	$1{,}9985167$
211893	$-\log 0{,}05 = 0{,}6989700 - 2$
$\log 1{,}05^{14} = 0{,}2966502$	$3{,}2995467$
$\text{num.}\log 1{,}05^{14} = 1{,}9799314$	$\text{num.} = 1\,993{,}18$
$\text{num.}\log 1{,}05^{14} - 1 = 0{,}9799314$	$A_1 =$ **1 993,18** Mark.
$\log(1{,}05^{14} - 1) = 0{,}9911957 - 1$	
$\log 0{,}05 = 0{,}6989700 - 2$	

Hiernach wären dem Pächter noch herauszuzahlen: 3 390.00 — 1 993.18 = **1 396.82** Mark.

Anmerkung. Rechnungen dieser Art lassen sich übrigens auch durch Rückgriff auf die Proportionen lösen. Bezeichnet man nämlich die Zahl der Jahre bis zur völligen Amortisation (hier: 20, genauer: 20.103) mit n, und derjenigen der abgekürzten Frist (hier: 14) mit m, so verhalten sich die betreffenden Endwerte:

$$a \,.\, 1{,}0p^n : a_1 \,.\, 1{,}0p^m = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} : \frac{r \,.\, (1{,}0p^m - 1)}{0{,}0p} = 1{,}0p^n - 1 : 1{,}0p^m - 1$$

Und daher:

$$a_1 \,.\, 1{,}0p^m = \frac{a \,.\, 1{,}0p^n \,.\, (1{,}0p^m - 1)}{1{,}0p^n - 1},$$ oder, da $a_1 \,.\, 1{,}0p^m = A_1$, und $a \,.\, 1{,}0p^n = A$ ist:

$$A_1 = \frac{A \,.\, (1{,}0p^m - 1)}{1{,}0p^n - 1}$$

Nun ist aber im gegebenen Falle: $A = 3390$ Mark und A_1 = dem gesuchten Betrage. Ferner:

$$1{,}0p^m - 1 = 1{,}05^{14} - 1 = 0{,}9799314, \text{ und } 1{,}0p^n - 1 = 1{,}05^{20.103} - 1 = 1{,}66666.$$

Daher: $A_1 = 3\,390 \times \frac{0{,}97993}{1{,}66666} =$ **1 993.18** Mark (wie oben).

123. In Aufgabe 30 wurden die Summen berechnet, bis auf welche die Kapitalanlagen einerseits für einen Scheunen-Massivbau (15 000 Mark), dessen Bestandsdauer auf 180 Jahre veranschlagt ist, andererseits für einen Scheunen-Fachwerkbau (9 000 Mark) gleichen Umfanges und im übrigen gleicher Einrichtung, der nur 60 Jahre vorhält, also in 180 Jahren dreimal erneuert werden müßte, in der gleichen Nutzungszeit bei Berechnung von 3 Prozent Zinseszinsen anwachsen. Wenn sich aber nun die laufenden Aufwendungen durchschnittlich pro Jahr berechnen in Prozenten:

	Für den Massivbau:	Für den Fachwerkbau:
An Reparaturen, bezogen auf den Neuwert (Mittelzahlen nach Block und Engel)	0,38	0,94
An Feuerversicherungsprämien (Für die Gebäude ganz-, für die eingelagerten Erzeugnisse, deren mittlerer Wert auf 14 000 Mark geschätzt ist, halbjährig)	0,20	0,50

und wenn sich ferner bei dem Abbruch der Gebäude nach Abzug der Kosten desselben noch ein Wert an wieder verwendbarem Material von je $^1/_{10}$ des Neubauwertes ergibt: Wie hoch wird sich dann das Verhältnis des Bauaufwandes der beiden Fälle bei Anrechnung von Zinseszinsen zu ebenfalls 3 Prozent bis zum Schlusse der Benutzungszeit von 180 Jahren gestalten?

A. I. Massivbau.

1. Kapitalaufwand mit Zinseszinsen in 180 Jahren, gemäß der Berechnung in Aufgabe 30 . . . . 3 067 519 M
   Davon ab: Material-Abfall bei dem Abbruch . . . 1500 „
   3 066 019 Mark.
2. Reparaturkosten: Jährlich im Durchschnitt 0,38 Prozent von 15 000 Mark = 57 Mark. Dieselben wachsen in 180 Jahren bis auf:
   $$A = \frac{57 \times (1.03^{180} - 1)^{1)}}{0.03} = \ldots \quad 386\,652 \text{ „}$$
3. Feuerversicherungsprämie:
   a) Von dem Gebäude: Mittlerer Wert: 7500 Mark, à 0,2 Prozent = ... 15 M
   b) Von den Vorräten: 14000 Mark, à 0,2 Prozent = 28 Mark, und pro Halbjahr . . . . 14 „
   Zusammen: 29 M
   Der Endwert dieses Betrages ist nach 180 Jahren:
   $$A = \frac{29 \times (1{,}03^{180} - 1)}{0.03} = \ldots \quad 196\,718 \text{ „}$$
   Im ganzen Aufwand: **3649389** Mark.

II. Fachwerkbau.

1. Kapitalaufwand mit Zinseszinsen in 180 Jahren, laut Nachweis in Aufgabe 30 . . . . 2205932 M
   Davon ab: Material-Abfall je 900 Mark:
   a) Vom ersten Bau, prolongiert auf 120 Jahre ($900 \times 1{,}03^{120}$) = . . . 31240
   b) Vom zweiten Bau, prolongiert auf 60 Jahre ($900 \times 1{,}03^{60}$) = ... 5302
   c) vom dritten Bau, am Schlusse . . . 900
   37442 „
   2168490 Mark.
2. Reparaturkosten: Jährlich im Durchschnitt 0,94 Prozent von 9000 Mark = 84,6 Mark. Schlußwert derselben nach 180 Jahren:
   $$A = \frac{84.6 \times (1.03^{180} - 1)}{0.03} \ldots \quad 573873 \text{ „}$$
3. Feuerversicherungsprämie von einem Durchschnittswert des Gebäudes von 4500 Mark und einem Vorrats-Kapital von 14000 Mark nach obigem Rechnungsverfahren:
   $$A = \frac{57{,}5 \times (1.03^{180} - 1)}{0{,}03} = \ldots \quad 390044 \text{ „}$$
   Im ganzen Aufwand: **3132407** Mark.

Es hat daher der Massivbau gegenüber dem Fachwerkbau eine Mehr-Belastung zu tragen von 3649389 — 3132407 = **516982** Mark.

Lediglich bezogen auf das Anlage-Kapital und seine Zinsanforderungen betrug nach Aufgabe 30 der Aufwand für den Fachwerkbau nur 3067519 : 2205932 = 100 : x; x = 71,9 oder rund 72 Prozent von dem Aufwande für den Massivbau.

Mit Einrechnung der laufenden Aufwendungen verengte sich aber dieses Verhältnis auf:

3649389 : 3132407 = 100 : x; x = 85,8 oder rund 86 Prozent des Massivbaues.

[1]) Es ist hier wie in den nachfolgenden ebenmäßigen Ansätzen von der Ausführung der Rechnung Umgang genommen.

Zweite Gruppe.

(Gegeben: r, p und n. Gesucht: a. Anwendung der Formel XII.a.:

$$a = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p}.)$$

Vorbemerkung. In vorliegender Rubrik handelt es sich um den Anfangs- oder den Vor- oder Barwert a eines Kapitales, welches bei p Prozent Zinseszinsen in n Jahren zu dem gleichen Betrage anwächst, wie die regelmäßig am Schlusse eines jeden der n Jahre stattfindenden Zahlungen r mit ihren zu p Prozent berechneten Zinseszinsen. Nun bedeutet aber bekanntlich der End- oder Nachwert nur eine Vervielfachung des Vor- oder Barwertes um den Faktor $1{,}0p^n$. Woraus dann folgt, daß der Vorwert aus der Gleichung XII sich ergeben muß, wenn man diese auf beiden Seiten durch $1{,}0p$ dividiert, auf welchem Wege man zu der hier vorangestellten Formel XII. a. gelangt.

124. Behufs Durchführung einer größeren bautechnischen Anlage beabsichtigt die Gemeinde S. ein Anleihen aufzunehmen, welches durch einen 18 Jahre lang am Ende jeden Jahres zu zahlenden Betrag von 2500 Mark verzinst und getilgt werden soll. — Wie hoch berechnet sich die Summe des Darlehens, welches die Kreditbank bei Beanspruchung von $4^1/_4$ Prozent Zinseszinsen gewähren kann?

A. $$a = \frac{2\,500 \times (1{,}0425^{18} - 1)}{1{,}0425^{18} \times 0{,}0425}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}0425 &= 0{,}0180761 \\
&\quad \times 18 \\
&\quad 1446088 \\
&\quad 180761 \\
\log. 1{,}0425^{18} &= 0{,}3253698 \\
\text{num.} \log. 1{,}0425^{18} &= 2{,}1152892 \\
\text{num.} \log. 1{,}0425^{18} - 1 &= 1{,}1152892 \\
\log. (1{,}0425^{18} - 1) &= 0{,}0473877 \\
\log. 0{,}0425 &= 0{,}6283889 - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 2\,500 &= 3{,}3979400 \\
+ \log. (1{,}0425^{18} - 1) &= 0{,}0473877 \\
&\quad 3{,}4453277 \\
\log. 1{,}0425^{18} &= 0{,}3253698 \\
+ \log. 0{,}0425 &= 0{,}6283889 - 2 \\
&\quad - 0{,}9537587 - 2 \\
&\quad 4{,}4915690 \\
\text{num.} &= 31\,014{,}80 \\
a &= \mathbf{31\,014{,}80} \text{ M.}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$a = \frac{2\,500 \times 1{,}1152862 \times 0{,}4727493}{0{,}0425} = \frac{1318{,}127}{0{,}0425} = \mathbf{31\,014{,}76} \text{ Mark.}$$

125. Bei der Erbübertragung seines Vermögens legt der Erblasser den Beteiligten durch letztwillige Verfügung die Verpflichtung auf, zu Gunsten einer Wohltätigkeits-Anstalt der Gemeinde während 10 Jahren am Schlusse eines jeden Jahres den Betrag von 600 Mark zu zahlen. Die Pflichtigen möchten sich dieserhalb mit der Anstalt durch die Verabfolgung einer Kapitalsumme abfinden, für welche 4 Prozent Zinseszinsen angenommen werden können. Wie hoch wird dann der Betrag der Ablösung sein?

A.
$$a = \frac{600 \times (1.04^{10} - 1)}{1.04^{10} \times 0.04}$$

$\log. 1,04 = 0.0170333$
$\times 10$
$\log. 1,04^{10} = 0,1703330$
$\text{num.} \log. 1,04^{10} = 1.4802430$
$\text{num.} \log. 1,04^{10} - 1 = 0,4802430$
$\log. (1.04^{10} - 1) = 0.6814610 - 1$
$\log. 0,04 = 0,6020600 - 2$

$\log. 600 = 2,7781513$
$+ \log. (1.04^{10} - 1) = 0.6814610 - 1$
2.4596123
$\log. 1,04^{10} = 0,1703330$
$+ \log. 0,04 = 0,6020600 - 2$
$- 0.7723930 - 2$
3.6872193
$\text{num.} = 4\,866.53$
$a = \mathbf{4\,866.53}$ Mark.

126. Auf einem Gewerbebetrieb lastet die Verpflichtung, in einem Zeitraume von 14 Jahren am Schlusse eines jeden Jahres den Betrag von 1 750 Mark zu zahlen. Der Besitzer des Unternehmens möchte die Schuld in der Weise begleichen, daß er nach Ablauf von 5 Jahren eine einmalige Zahlung leistet, durch welche alle weiteren jährlichen Zahlungen abgetragen werden. Wie hoch wird sich diese Tilgungssumme behufs Kompensation der beiderseitigen Anforderungen, Zinseszinsen zu $3^3/_4$ Prozent vorausgesetzt, berechnen?

A. Um hier den richtigen Ansatz zu finden, wird man sich des Inhaltes der „Vorbemerkung" zu den Aufgaben der vorliegenden Gruppe zu erinnern haben. Handelt es sich nämlich um die Gleichstellung einerseits des Endwerts der 14 Jahre hindurch zu leistenden Zahlungen, und andererseits des auf den gleichen Zeitpunkt bezogenen Endwertes der am Schlusse des fünften Jahres zu zahlenden Tilgungssumme, so wird man zu einem zutreffenden Ergebnisse gelangen müssen, wenn man den Endwert A aller am Schlusse der einzelnen Jahre fälligen Beträge auf den 9 Jahre zurückliegenden Zeitpunkt der Abtragung diskontiert und zu diesem Behufe durch 1.0375^9 dividiert. Gegebenen Falles erhält man also:

$$a = \frac{1\,750 \times (1.0375^{14} - 1)}{1,0375^9 \times 0,0375}$$

$\log. 1,0375 = 0,0159881$
$\times 14$
639524
159881
$\log. 1.0375^{14} = 0.2238334$
$\text{num.} \log. 1,0375^{14} = 1,6743004$
$\text{num.} \log. 1,0375^{14} - 1 = 0,6743004$
$\log. (1,0375^{14} - 1) = 0,8288534 - 1$
$\log. 0,0375 = 0.5740313 - 2$
$\log. 1,0375^9 = 0.1438929$

$\log. 1\,750 = 3,2430380$
$+ \log. (1,0375^{14} - 1) = 0,8288534 - 1$
$3,0718914$
$\log. 1,0375^9 = 0,1438929$
$+ \log. 0,0375 = 0,5740313 - 2$
$- 0,7179242 - 2$
4.3539672
$\text{num.} = 22\,592.65$
$a = \mathbf{22\,592.65}$ M.

Dritte Gruppe.

(Gegeben: a, p und n. Gesucht: r. Anwendung der Formel: XII. b.:

$$r = \frac{a \cdot 1{,}0p^n \cdot 0{,}0p}{1{,}0p^n - 1}$$)[1])

127. Einem Gutsbesitzer wird seitens einer Hypothekenbank ein unkündbares, in 34 Jahren zu amortisierendes Darlehen von 18 000 Mark zu $3^3/_4$ Prozent Zinseszinsen gewährt. Wie hoch werden sich die am Ende jeden Jahres zu zahlenden Raten — Zinsen und Tilgungsbeträge absolut und in Prozenten belaufen?

A. $$r = \frac{18\,000 \times 1{,}0375^{34} \times 0{,}0375}{1{,}0375^{34} - 1}$$

$$\begin{array}{rl} \log. 1{,}0375 = 0{,}0159881 & \\ \times 34 & \\ 639524 & \\ 479643 & \\ \log. 1{,}0375^{34} = \mathbf{0{,}5435954} & \\ \text{num.} \log. 1{,}0375^{34} = 3{,}4961928 & \\ \text{num.} \log. 1{,}0375^{34} - 1 = 2{,}4961928 & \\ \log. (1{,}0375^{34} - 1) = 0{,}3972782 & \\ \log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log. 18\,000 = & 4{,}2552725 \\ + \log. 1{,}0375^{34} = & 0{,}5435954 \\ + \log. 0{,}0375 = & 0{,}5740313 - 2 \\ & 3{,}3728992 \\ -\log. (1{,}0375^{34} - 1) = & 0{,}3972782 \\ & 2{,}9756210 \\ \text{num.} = & 945{,}41 \\ r = & \mathbf{945{,}40} \text{ M (rd.)} \end{array}$$

Das sind: $18\,000 : 945{,}40 = 100 : x$; $x = \frac{945{,}40}{180} = 5{,}2522$, d. i. annähernd und rund 5,25 oder $5^1/_4$ Prozent.

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$r = 18\,000 \times \frac{3{,}4961945}{2{,}4961945} \times 0{,}0375 = 675 \times 1{,}40061 = \mathbf{945{,}41} \text{ Mark.}$$

Anmerkungen. Die vorliegende Rechnung bietet übrigens noch Anknüpfungspunkte für weitere beachtenswerte Erhebungen und Erwägungen:

1. Aus dem Abschlusse geht zunächst hervor, daß der Schuldner, da er das Kapital mit rund $5^1/_4 - 3^3/_4 = 1^1/_2$ Prozent zu amortisieren hat, durch diese Zahlungen in 34 Jahren direkt nur $180 \times 1{,}50 \times 34 = 9\,180$ Mark, oder 51 Prozent des Kapitales von 18 000 Mark zur Tilgung liefert, indessen die übrigen 49 Prozent der Schuld aus den angesammelten Zinsen abgetragen werden.

In recht überzeugender Weise lehren aber Beispiele dieser Art die eminente Bedeutung würdigen, welche für die unkündbaren Amortisations-Darlehen gegenüber den gewöhnlichen, zu dauernder Belastung führenden, geschlossenen Hypothekar-Darlehen gerade im Gesichtspunkte der Entschuldung des Grundbesitzes beansprucht werden muß. — Hätte der Grundeigentümer das benötigte Kapital von 18 000 Mark ohne Rücksicht auf die Tilgung zu $3^3/_4$ Prozent aufgenommen, so würde er, wenn die Schuld 34 Jahre stehen blieb, bis zum Ablauf dieser Zeit $180 \times 3{,}75 \times 34 = 22\,950$ Mark, also 4 950 Mark mehr zu zahlen gehabt haben, als das empfangene Kapital beträgt. Indem er dem Annuitäten-Anleihen den Vorzug gab, steigerte sich

---

[1]) Über das Verfahren der Ermittlung von Zins- und Tilgungsraten, welche in Zwischenräumen von je mehreren Jahren fällig, oder aufgeschobene, oder aussetzende und aufgeschobene sind, gibt die Anleitung zur Rentenrechnung nähere Auskunft. (vid. die Formeln XVIII. b und XIX. b, XX. b und XXI. b, XXIV. b und XXV. b, sowie die zugehörigen Beispiele: 171, 172 — 177, 178 — und 189, 190.)

die Zahlungspflicht in 34 Jahren allerdings um $180 \times 1{,}5022 \times 34$[1]) = 9 193 Mark. Mit diesem Mehraufwande hat er aber zugleich die ganze Schuld von 18 000 Mark getilgt! Und die Differenz zwischen dem Schuldkapitale und der Summe der Abzahlungen, d. i. 18 000 — 9 193 = 8 807 Mark, sie wird eben aus den Zinseszinsen der Tilgungsraten, also auf dem Wege einer Aufsparung gedeckt. — Wie ganz anders bei der bleibenden Hypothekarschuld, welche am Ende der ganzen Frist unverändert fortbestanden, ununterbrochen ihren Zins erfordert und den Nachfolger im Grundbesitz mit dem gleichen Betrage belastet haben würde!

2. Soll im gegebenen Falle ermittelt werden, wie sich das Schuldverhältnis an irgend einem Zeitpunkte, beispielsweise mit Ablauf der ersten Hälfte der ganzen Darlehnsfrist, also im 17ten Jahre gestaltet, so ist zu beachten, daß der Schuldner bereits 16mal die Tilgungsrate von $180 \times 1{,}5022 = 270{,}40$ Mark gezahlt hat. Somit berechnet sich deren Summe A_1 in Anwendung der Formel XII, wie folgt:

$$A_1 = \frac{270{,}40 \times (1{,}0375^{16} - 1)}{0{,}0375}$$

Die Ausrechnung ergibt für A_1 : 5 784,60 Mark. Hiernach bleiben noch zu tilgen: 18 000 — 5 785 (rund) = 12 215 Mark. Das gleiche Resultat würde man auch in Anwendung der oben zu Aufgabe 122 (Anmerkung) vorgeführten Proportions-Rechnung erhalten.

3. Wenn gefragt wird, wieviel von der an jenem Zeitpunkte zu zahlenden Zins- und Amortisationsrate ($180 \times 5{,}2522 = 945{,}40$ M) auf die Tilgung entfällt, so hat man einfach von dem gesamten Betrage die Zinsrate, welche das nunmehr bekannte Kapital von 12 215 Mark beansprucht, also $122{,}15 \times 3{,}75 = 458{,}06$ Mark in Abzug zu bringen. Es verbleiben darnach für die Tilgung: 945,40 — 458,06 = 487,34 Mark. Genau die Summe, welche man durch Prolongation der ersten Tilgungsrate (270,40 Mark) auf 16 Jahre ($270{,}40 \times 1{,}0375^{16}$) erhält.

4. In den Text-Ausführungen zu der in Rede stehenden Formel XII. b. (S. 63 u. 64) wurde gezeigt, wie sich die Tilgungsrate r_m berechnet, wenn das Kapital a, der Zinsfuß p und die Dauerzeit der Anlage n bekannt sind. Wenn hiernach im vorliegenden Beispiele ermittelt werden soll, wie hoch sich die Prozente für die Amortisation des zu $3\frac{3}{4}$ Prozent Zinseszinsen darzuleihenden und in 34 Jahren abzutragenden Kapitales belaufen, so hat man einfach anzusetzen:

$$r_m = \frac{100 \times 0{,}0375}{1{,}0375^{34} - 1}$$

Daraus erhält man unter Benutzung des oben bereits angegebenen numerus:

$$\frac{3{,}75}{2{,}4961928} = 1{,}5022 \text{ Prozent (fast ganz genau).}$$

Auf diesem Wege wäre somit auch durch Zuschlag des gegebenen Zinsfußes der Betrag der Annuität im ganzen zu berechnen.

5. Angenommen, die Hypothekenbank beanspruche außer den Zins- und Tilgungsraten noch einen einmaligen Ersatz der ihr erwachsenden Kosten der Kapitalbeschaffung, beispielsweise im Betrage von 1,4 Prozent = 252 Mark, bewillige aber dem Schuldner auf dessen Antrag, daß er die betreffende Summe mit dem Anleihe-Kapital in der gleichen Zeit verzinse und tilge. Alsdann erhöhen sich die Annuitätenzahlungen genau im Verhältnis zu dem um jene Kosten vermehrten Betrage des Anleihens. Die Rechnung würde somit bei Anwendung der abgerundeten Ziffern ergeben:

$$100 : 101{,}4 = 5{,}25 : x;\ x = 5{,}32 \text{ Prozent.}$$

Da aber die Zinsprozente unverändert stehen bleiben, so entfällt der Mehrbetrag auf die Tilgung, welche sich somit auf 5,32 — 3,75 = 1,57 Prozent belaufen, also um 1,57 — 1,50 = 0,07 Prozent steigern würde.

128. Um sich einen Grundstock von Arbeitskräften für seinen Gutsbetrieb tunlichst zu sichern, will der Besitzer des Großgutes H. eine dem

[1]) Anwendung der strenger genauen Prozentzahl für die Tilgungsraten: 5,2522 — 3,7500 = 1,5022.

Bedarfe angemessene Zahl von Ansiedelungsstellen für Landarbeiter in der Weise gründen, daß er den Bewerbern je ein zu erbauendes Einfamilienhaus nebst zugehörigen Wirtschaftsräumen und eine 15 a ($^3/_5$ Morgen) große Fläche anschließenden Kulturlandes auf dem Wege des Verkaufes überträgt. (Innere Kolonisation.) Nach den vorliegenden Veranschlagungen würde eine solche Besitzesstelle den Kapitalwert von 5 040 Mark repräsentieren. Dem Unternehmen kommt zu Statten, daß den Arbeitern Gelegenheit gegeben ist, das über eine mäßige Anzahlung von 10 Prozent der Kaufsumme hinaus erforderliche Kapital durch Vermittlung einer Rentenbank auf dem Anleihenswege zu einem Zinsfuße von nur $3^1/_2$ Prozent und unter der Bedingung einer innerhalb 38 Jahren durchzuführenden Amortisation aufzubringen. -- Frage: Wie hoch berechnen sich unter diesen Voraussetzungen die Annuitäten — jährliche Zinsen und Tilgungsraten —, welche der Erwerber eines Besitztums absolut und in Prozenten zu entrichten hat?

A. Der Taxwert der Ansiedelungsstelle ist . . . . 5 040 Mark
Auf diesen Betrag hat der Arbeiter eine Anzahlung zu leisten von $^1/_{10}$ = ... 504 „
Es beläuft sich also die zu kontrahierende Renten-Schuld auf . . . . 4 536 Mark.

Hiernach hat man:

$$r = \frac{4\,536 \times 1{,}035^{38} \times 0{,}035}{1{,}035^{38} - 1}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}035 &= 0{,}0149403 \\
&\times 38 \\
&1195224 \\
&448209 \\
\log. 1{,}035^{38} &= \mathbf{0{,}5677314} \\
\text{num.}\log. 1{,}035^{38} &= 3{,}6959955 \\
\text{num.}\log. 1{,}035^{38} - 1 &= 2{,}6959955 \\
\log. (1{,}035^{38} - 1) &= \mathbf{0{,}4307192} \\
\log. 0{,}035 &= \mathbf{0{,}5440680 - 2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 4\,536 &= 3{,}6566730 \\
+\log. 1{,}035^{38} &= 0{,}5677314 \\
+\log. 0{,}035 &= 0{,}5440680 - 2 \\
& 2{,}7684724 \\
-\log. (1{,}035^{38} - 1) &= 0{,}4307192 \\
& 2{,}3377532 \\
\text{num.} &= 217{,}65 \\
r &= \mathbf{217{,}65}\ \text{M (rd.)}.
\end{aligned}$$

Die Annuität beträgt somit vom Schuldkapital:

4 536 : 217,65 = 100 : x; x = 4,8 Prozent
Hiervon entfallen auf die Zinsen . . . . 3,5 „
Es belaufen sich also die Amortisationsraten auf . 1,3 Prozent.

Und die Summe aller in 38 Jahren zu entrichtenden Annuitäten ist:

217,65 × 38 = **8 270,70** Mark.

Rechnet man zur Kontrolle die absoluten Beträge der Annuitäten auf deren Vorwert um, so erhält man:

$$a = \frac{217{,}648 \times (1{,}035^{38} - 1)}{1{,}035^{38} \times 0{,}035} = \frac{217{,}648 \times 2{,}696}{3{,}696 \times 0{,}035} = \frac{586{,}779}{0{,}12936} = 4\,536 \text{ Mark.}$$

Anmerkung. Da sich die Darlehnsbedingungen gerade in Bezug auf die Amortisationspflicht im Leben noch sehr verschieden gestalten können, beansprucht die Frage, in welcher Weise Abänderungen an dem Tilgungsmodus auf die Stellung des Rentenschuldners zurückwirken, ein besonderes Interesse. Zur Orientierung

hierüber sollen in Nachfolgendem drei weitere Beispiele herangezogen werden. Der Vergleichbarkeit willen sind dabei die in obenstehender Aufgabe enthaltenen Grundlagen (Schuldkapital: 4 536 Mark, Zeitraum für die völlige Ablösung desselben: 38 Jahre, Zinsfuß: 3.5 Prozent) angenommen. Von einer detaillierten rechnerischen Behandlung der einzelnen Fälle dürfte indessen unter Berufung auf die seitherigen Ausführungen abzusehen sein.

Wenn die Ablösung der Schuld durchgeführt werden soll:	**So berechnen sich:** Die jährlichen Zahlungen:	Die Zins- und Tilgungsraten: Prozent	Die Tilgungsraten: Prozent	Die Summe aller Zins- und Tilgungsbeträge: Mark
I. Innerhalb der Frist von 38 Jahren, und zwar zur einen Hälfte des Betrages in 26, und daran anschließend zur anderen Hälfte in 12 Jahren.	1. Während **26** Jahren: a) Zinsen von $\frac{4\,536}{2} = 2\,268$ Mark zu $3{,}5\,\% = 22{,}68 \times 3{,}5 = \ldots$ 79,38 M b) Zinsen und Tilgungsraten von der ersten Hälfte des Kapitales: $\frac{2\,268 \times 1{,}035^{26} \times 0{,}035}{1{,}035^{26} - 1} = \ldots$ 134,28 „ — 213,66 M	5,92	2,42	8 371,56
	2. Während **12** Jahren: Zinsen und Tilgungsraten von der zweiten Hälfte des Kapitales: $\frac{2\,268 \times 1{,}035^{12} \times 0{,}035}{1{,}035^{12} - 1} = \ldots\ldots$ 234,70 M	10,35	6.85	
II. Nach 5 Jahren einfacher Verzinsung in 33 Jahren.	1. Während **5** Jahren: Zinsen von 4 536 Mark zu 3,5 %: $= 45{,}36 \times 3{,}5 = \ldots\ldots$ 158,76 M			8 513,49
	2. Während **33** Jahren: Zinsen und Tilgungsraten von dem gleichen Kapital: $\frac{4\,536 \times 1{,}035^{33} \times 0{,}035}{1{,}035^{33} - 1} = \ldots\ldots$ 233,93 M	5,16	1,66	
III. Nach Ablauf der gleichen Zinsperiode mit ²/₅ des Betrages in 21, und dann mit ³/₅ (Rest) desselben in 12 Jahren.	1. Während **5** Jahren: Zinsen von 4 536 Mark zu 3,5 % (w. o.) . . . 158,76 M			8 766,18
	2. Während **21** Jahren: a) Zinsen von ³/₅ des Schuldkapitals zu $3{,}5\,\% = 27{,}216 \times 3{,}5 = \ldots$ 95,26 M b) Zinsen und Tilgungsraten von ²/₅ des Schuldkapitales: $\frac{1\,814{,}40 \times 1{,}035^{21} \times 0{,}035}{1{,}035^{21} - 1}$ 123,44 „ — 218,70 M	6,80	3,30	
	3. Während **12** Jahren: Zinsen und Tilgungsraten von ³/₅ des Schuldkapitales: $\frac{2\,721{,}60 \times 1{,}035^{12} \times 0{,}035}{1{,}035^{12} - 1} \ldots\ldots$ 281,64 M	10,35	6,85	

Selbstverständlich belaufen sich die Bar- oder Vorwerte der jährlichen Zahlungen in allen diesen Fällen auf den gleichen Betrag von 4 536 Mark.

Aus der Übersicht geht überzeugend hervor, daß die 3 Arten der Schuldablösung gegenüber dem oben in Berechnung gezogenen ersten Falle (Aufgabe 128) für den Schuldner insofern eine Erleichterung bewirken, als die Zins- und Tilgungs-

beträge in den ersten Perioden des Schuldverhältnisses geringer sind und dann allmählich ansteigen, indessen im ganzen eine nicht unerhebliche Erhöhung des Kapitalaufwandes erfordern, eine Erscheinung, welche ihre Erklärung darin findet, daß eben die Entrichtung nur von Jahreszinsen nicht zugleich auch den Verlauf der Amortisation beeinflußt.

129. Ein Bauernhof-Besitzer, welcher 2 Söhne und 3 Töchter hat, will, daß mit seinem Ableben das Gut ungeteilt von einem seiner Söhne übernommen werde. Da dieser nach den bestehenden erbrechtlichen Bestimmungen ein „Voraus", einen sog. Liegenschaftsvorteil von $^1/_4$ des Verkehrswertes des Grund und Bodens beanspruchen kann, im übrigen aber die Kinder gleichgestellt werden sollen, möchte der fürsorglich gesinnte Vater Vorkehrung dahin treffen, daß der im Gutsbesitz nachrückende Sohn gegen die ihm drohende Gefahr einer durch die Erfüllung der Pflicht der Abfindung der Geschwister eintretenden Überschuldung geschützt werde. Um dies zu erreichen, beabsichtigt er, die auf dem Gute haftende, zu 4 Prozent verzinsliche Schuld soweit zu amortisieren, daß, wenn er nach 20 Jahren sterben müßte, der das Gut antretende Sohn sich nach Abfindung der Miterben mit nicht mehr als 40 Prozent des Aktiv-Kapitales (Verkehrswert des Gutes und Fahrhabe) zu verschulden haben würde.

Wenn nun der Verkehrswert des Gutes sich auf 75000 Mark beläuft, in der Fahrhabe 22500 Mark angelegt sind, und die derzeitigen Schulden 32000 Mark betragen: Wie hoch würde sich dann die am Ende jeden Jahres zu zahlende Amortisationsrate bei Zugrundelegung eines Zinsfußes von 4 Prozent berechnen?

A. Im gegebenen Falle ist zunächst die Größe des zu amortisierenden Kapitales festzustellen. Dieselbe ermittelt sich also:

Der Verkehrswert des Grundbesitzes beträgt	75000 M	
Das Kapital der Fahrhabe ist	22500 „	
Das Brutto-Vermögen beläuft sich also auf		97500 Mark
Hiervon ab die Schulden mit		32000 „
Bleibt ein Rein-Vermögen von.		65500 Mark.

Von diesem Rein-Vermögen erhalten:

Der Gutsübernehmer:

Den Liegenschaftsvorteil von $^1/_4$ = ...	18750 M	
Ein Fünftel des noch verbleibenden Rein-Vermögens, d. i.: $(65500 - 18750) \times 0{,}2 = 46750 \times 0{,}2 =$	9350 „	
Zusammen:		28100 Mark

Die Geschwister:

Vier Fünftel des noch verfügbaren Rein-Vermögens $= 46750 \times 0{,}8 =$	37400 „
Summa wie oben:	65500 Mark.

Der Erb-Anteil des Gutsübernehmers würde also nach 20 Jahren, wenn das Schuldkapital bis dahin regelmäßig verzinst wurde, umfassen:

Das Gut, einschließlich Fahrhabe mit		97 500 Mark
Davon ab:		
Die Abfindungsquoten mit	37 400 —	
Die auf dem Gute haftenden Schulden mit	32 000 —	
		69 400 „
Also: Netto-Erbteil:		28 100 Mark (wie oben).

Wenn nun die Schuldverpflichtungen des Übernehmers (Grundschulden und Abfindungsgelder) betragen: .	69 400 Mark
Das Besitztum aber nach 20 Jahren höchstens belastet sein soll mit 40 Prozent des Vermögens $= 97\,500 \times 0{,}4 =$	39 000 „
So sind innerhalb dieser Zeit abzutragen	30 400 Mark.[1])

Demnach ergibt sich:

$$r = \frac{30\,400 \times 1{,}04^{20} \times 0{,}04}{1{,}04^{20} - 1}$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$	$\log. 30\,400 = 4{,}4828736$
$\times 20$	$+ \log. 1{,}04^{20} = 0{,}3406660$
$\log. 1{,}04^{20} = 0{,}3406660$	$+ \log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$
$\text{num. log. } 1{,}04^{20} = 2{,}1911191$	$3{,}4255996$
$\text{num. log. } 1{,}04^{20} - 1 = 1{,}1911191$	$- \log. (1{,}04^{20} - 1) = 0{,}0759551$
$\log. (1{,}04^{20} - 1) = 0{,}0759551$	$3{,}3496445$
$\log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$	$\text{num.} = 2\,236{,}89$
	$r = $ **2 236,89** Mark.

Davon kommen auf:

Zinsen: 304×4 (Prozent) $=$	1 216,00 Mark	
Tilgung: $2\,236{,}89 - 1216{,}00 =$	1 020,89 „	(3,358 Prozent)
Zusammen:	2 236,89 Mark.	(7,358 Prozent).

Wird die Frage gestellt, wie hoch sich die Verschuldung des Gutsübernehmers dann belaufen würde, wenn der Vater noch 25 Jahre lebt und innerhalb dieser Zeit nicht allein die bestehende Schuld von 32 000 Mark zu 4 Prozent verzinst, sondern auch darüber hinaus noch zur Tilgung

[1]) Das Verhältnis verdeutlicht sich im übrigen also:

Der Hofbesitzer muß von der bestehenden Schuld in 20 Jahren abtragen: 30 400 Mark. (Denkt man sich die jährlichen Tilgungsraten als Sparkassen-Einlagen, so würden dieselben in der gleichen Zeit bei der gleichen Zinsvergütung auf den nämlichen Betrag anwachsen.) Es verbleibt also eine Restschuld von 32 000 — 30 400 = 1 600 Mark. Die nach Ablauf von 20 Jahren eintretende Abfindungspflicht erfordert eine Kapitalaufnahme im Betrage von 37 400 Mark, welche mit jener Restschuld: 37 400 + 1 600 zusammen die vorgesehene Verschuldungsgrenze von 39 000 Mark ergeben.

Oder aber:

Die nach 20 Jahren aufzubringende Abfindungssumme beträgt . .		37 400 Mark
Die vorgesehene Verschuldungsgrenze ist	39 000 M	
Bleibt die auf dem Gute lastende Schuld bis zum Ablauf jenes Zeitraumes fortbestehen mit	32 000 „	
So hätte der Gutsübernehmer noch Raum für weitere Eintragung von nur		7 000 „
Es müssen also in der Zwischenzeit abbezahlt werden		30 400 Mark.

derselben mit $1^3/_4$ Prozent beiträgt, im ganzen also jährlich 1 840 Mark entrichtet, so würde man die Formel X anzuwenden haben. Diese ergibt für den Rest der Schuld:

$$A - A_1 = 32\,000 \times 1{,}04^{25} - \frac{1\,840 \times (1{,}04^{25} - 1)}{0{,}04}$$

log. 1,04 = 0,0170333	log. 32 000 = 4,5051500
× 25	+ log. $1{,}04^{25}$ = 0,4258325
851665	4,9309825
340666	num. = 85 306,56 . . . 85 306,56 M.
log. $1{,}04^{25}$ = 0,4258325	log. 1 840 = 3,2648178
num. log. $1{,}04^{25}$ = 2,6658300	+ log. $(1{,}04^{25} - 1)$ = 0,2216307
num. log. $1{,}04^{25}$ — 1 = 1,6658300	3,4864485
log. $(1{,}04^{25} - 1)$ = 0,2216307	— log. 0,04 = 0,6020600 — 2
log. 0,04 = 0,6020600 — 2	4,8843885
	num. = 76 628,17 . . — 76 628,17 „
	$A - A_1$ = 8 678,39 M.[1]

Vorausgesetzt, daß der Vater innerhalb der 25 Jahre nur die jährlichen Zinsen von dem ursprünglichen Schuldkapital gezahlt hätte, würde dieses bei der Übernahme des Gutes nach wie vor 32 000 Mark betragen. Durch die mittlerweile gezahlten Amortisationen wurde aber die Schuld herabgemindert auf . . . . 8 678 Mark (rund).

Dazu das zur Abfindung der Geschwister erforderliche Kapital von . . . . 37 400 „

Somit würde die Verschuldung bei Übernahme des Gutes sich belaufen auf . . . . 46 078 Mark.

Das sind aber 97 500 : 46 078 = 100 : x; x = 47,26 Prozent des Aktivkapitales.

130. Um sich in den Stand zu setzen, die Mittel bereit zu halten, welche für die voraussichtlich nach 35 Jahren notwendig werdende Neuherstellung eines Ökonomiegebäudes aufzuwenden sind, will der Besitzer für einen Erneuerungsfond derart Sorge tragen, daß er regelmäßig am Ende eines jeden Jahres einen bestimmten Betrag zurückstellt und auf Zinseszinsen anlegt, damit bis zum Ablauf jener Frist das erforderliche Kapital angesammelt werde. Wie hoch müssen sich diese Erneuerungsquoten berechnen, wenn die Kosten des Neubaues 21 500 Mark betragen, und ein Zinsfuß von $3^3/_4$ Prozent in Ansatz gebracht werden kann?

A. Im vorliegenden Falle handelt es sich nicht um die Anforderungen eines ursprünglich angelegten und zu amortisierenden Fonds, sondern um

[1]) Zu dem gleichen Resultate würde man übrigens auch gelangen, wenn man nur von den Tilgungsraten (32 000 × 0,0175 = 560 M.) ausgeht. Hiernach müßte die Rechnung lauten:

$$32\,000 - \frac{560 \times (1{,}04^{25} - 1)}{0{,}04}$$

Die Ausführung ergibt dann: 32 000 — 23 321,61 = 8 678,39 Mark (wie oben).

einen gegebenen Endwert, welchem somit die Bedeutung des Wertes von $a \cdot 1{,}0p^n$ beizulegen ist. Demgemäß wird die Rechnung lauten:

$$r = \frac{21\,500 \times 0{,}0375}{1{,}0375^{35} - 1}$$

$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$
$\times 35$
799405
479643
$\log. 1{,}0375^{35} = 0{,}5595835$
$\text{num.}\log. 1{,}0375^{35} = 3{,}6273000$
$\text{num.}\log. 1{,}0375^{35} - 1 = 2{,}6273000$
$\log. (1{,}0375^{35} - 1) = 0{,}4195097$
$\log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$

$\log. 21\,500 = 4{,}3324385$
$+ \log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$
$2{,}9064698$
$- \log. (1{,}0375^{35} - 1) = 0{,}4195097$
$2{,}4869601$
$\text{num.} = 306{,}87$
$r = \mathbf{306{,}87}$ Mark.

131. Der Neubau einer Stallung verursachte einschließlich aller inneren Ausstattungen einen Kostenaufwand von 15500 Mark. Behufs buchhalterischen Nachweises der notwendigen jährlichen Abschreibungen will der Besitzer, statt die betreffenden Anteile auf dem Wege der Division des zu amortisierenden Baukapitales durch die Zahl der Benutzungsjahre des Gebäudes zu bestimmen, die Zinserträge des Tilgungsfonds in Rechnung ziehen, von der Betrachtung ausgehend, daß dieser ein Kapital darstelle, welches durch Ratenzahlungen angesammelt werde und innerhalb der Amortisationszeit Zinseszinsen abwerfe, ein Hergang, welcher, wie leicht einzusehen, nur die Folge haben muß, daß die Tilgungsquoten, wenn sie mit Ablauf der Nutzungsdauer des Baues gerade den Neuwert desselben erreichen sollen, sich um den auf sie entfallenden Zinseszinsertrag niedriger berechnen werden, als der Quotient, welcher sich aus der einfachen Verteilung des Kapitalwertes auf die Nutzungsjahre ergibt. — Angenommen nun, daß die Bestandesdauer des Baues auf 90 Jahre veranschlagt werden konnte, und bei dem Abbruch abzüglich der Kosten desselben noch ein Wert für wieder verwendbares Baumaterial von 1500 Mark verbleibt: Wie hoch wird sich dann, ein Zinsfuß von $3\frac{1}{2}$ Prozent vorausgesetzt, die jährliche Amortisationsrate oder Erneuerungsquote berechnen?[1])

A. Die schwebende Aufgabe muß, wie leicht erkennbar, ganz nach Art des Beispieles 130 behandelt werden. Der Ansatz wird also sein:

$$r = \frac{(15\,500 - 1\,500) \times 0{,}035}{1{,}035^{90} - 1}$$

[1]) Die vielfach vertretene Auffassung, welche der vorstehenden Aufgabe zugrunde liegt, entbehrt an sich nicht einer gewissen Berechtigung. Es muß indessen im praktischen Gesichtspunkte bezweifelt werden, ob das Verfahren zu vorbehaltlos verwendbaren Ergebnissen führt, weil die Voraussetzungen für die Übertragung der Zinseszinsrechnung auf derartige Fälle nicht in allen Beziehungen zutreffen, namentlich aber, weil die Abnutzung der Gebäude nicht regelmäßig in dem Verhältnisse verläuft, welches nach der angegebenen Rechnungsweise dem in geometrischer Progression erfolgenden Anwachsen der Zinseszinserträge entspricht.

$$\begin{aligned} \log. 1{,}035 &= 0{,}0149403 \\ &\times 90 \\ \log. 1{,}035^{90} &= 1{,}3446270 \\ \text{num.log.}\, 1{,}035^{90} &= 22{,}111949 \\ \text{num.log.}\, 1{,}035^{90} - 1 &= 21{,}111949 \\ \log.(1{,}035^{90} - 1) &= 1{,}3245283 \\ \log. 0{,}035 &= 0{,}5440680 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. 14000 &= 4{,}1461280 \\ +\log. 0{,}035 &= 0{,}5440680 - 2 \\ & \quad 2{,}6901960 \\ -\log.(1{,}035^{90} - 1) &= 1{,}3245283 \\ & \quad 1{,}3656677 \\ \text{num.} &= 23{,}21 \\ r &= \mathbf{23{,}21} \text{ Mark} \\ &= \mathbf{0{,}166} \text{ Prozent} \end{aligned}$$

Soll auf Grund dieses Ergebnisses ermittelt werden, wieviel die Summe aller Abschreibungen an irgend einem Zeitpunkte der Nutzungsdauer, beispielsweise mit Ablauf von 60 Jahren beträgt, und wie hoch sich dann nach Abzug derselben vom Neuwert der sog. Zeitwert des Gebäudes beläuft, so wird man sich (Vgl. Aufg. 122) der Formel XII zu bedienen haben. Man erhält dann:

$$A_1 = \frac{23{,}21 \times (1{,}035^{60} - 1)}{0{,}035}.$$

Die Rechnung ergibt folgendes:

$$\begin{aligned} \log. 23{,}21 &= 1{,}3656677 \\ +\log.(1{,}035^{60} - 1) &= 0{,}8374644 \\ & \quad 2{,}2031321 \\ -\log. 0{,}035 &= 0{,}5440680 - 2 \\ & \quad 3{,}6590641 \\ \text{num.} &= 4561{,}04 \\ A_1 &= \mathbf{4561{,}04} \text{ Mark.} \end{aligned}$$

Dieser Betrag würde der Wertabnahme des Gebäudes entsprechen, so daß dessen Zeitwert sich beliefe auf:

$$14000 - 4561 \text{ (rund)} = \mathbf{9\,439} \text{ Mark.}$$

Anmerkung. Sind die auf die Einheit bezogenen Zinserträge, welche den in verschiedenen Zeiträumen anwachsenden Erneuerungsfonds entsprechen, bekannt, so kann man auch nach dem in Aufgabe 122 (Anmerkung) entwickelten einfacheren Verfahren zu Werke gehen. Im gegebenen Falle war der Zinswert für 90 Jahre: 21,111949, dagegen für 60 Jahre: 6,8780354[1]. Jenem entspricht das Kapital von 14000 Mark. Somit ergibt sich für das Kapital am Ende des 60sten Jahres:

$$21{,}112 : 6{,}878 = 14000 : x;$$

$$x = \frac{96\,292}{21{,}112} = \mathbf{4561} \text{ Mark (wie oben).}$$

132. Eine herrschaftliche Besitzung ist auf Grund der Durchführung einer Separation verpflichtet worden, zu den auf 22000 Mark veranschlagten Kosten der Herstellung einer Kommunalstraße drei Fünftel = 13200 Mark beizutragen, möchte aber diese ihr erwachsende Schuld durch gleiche, je am Schlusse eines Jahres zu zahlende Raten innerhalb $12^1/_2$ Jahren tilgen. Wieviel wird eine solche Rate betragen, wenn $4^1/_4$ Prozent gerechnet werden? (In Bezug auf die Behandlung des Jahres-Bruchteils, s. Aufgabe 34.)

[1]) Nämlich: Log. $1{,}035^{60}$ 0,8964180; num. log. $1{,}035^{60} = 7{,}8780354$; num. log. $1{,}035^{60} - 1 = 6{,}8780354$.

A.

$$r = \frac{13\,200 \times 1{,}0425^{25/2} \times 0{,}0425}{1{,}0425^{25/2} - 1}$$

log. 1,0425 = 0,0180761
0,0180761 : 2
0,0090380(5)
$\times 25$
4519025
1807610
log. $1{,}0425^{25/2}$ = **0,2259512(5)**
num. log. $1{,}0425^{25/2}$ = 1,6824850
num. log. $1{,}0425^{25/2} - 1$ = 0,6824850
log. $(1{,}0425^{25/2} - 1)$ = **0,8340931 − 1**
log. 0,0425 = **0,6283889 − 2**

log. 13 200 = 4,1205739
+ log. $1{,}0425^{25/2}$ = 0,2259512(5)
+ log. 0,0425 = 0,6283889 − 2
2,9749140(5)
−log. $(1{,}0425^{25/2} - 1)$ = 0,8340931 − 1
3,1408209
num. = 1 382,99
r = **1 382,99** Mark.

133.[1]) Für ein Pachtgut soll der Neubau von Scheunen und Stallungen ausgeführt werden. Einer besonderen Vereinbarung gemäß übernimmt der Pächter ein Dritteil der direkten — auf 10 800 Mark berechneten — Kosten mit 3 600 Mark, indessen ihm der Verpächter als Gegenleistung einen über die noch ausstehenden 12 Pachtjahre sich erstreckenden, in halbjährlichen Terminen fälligen Pachtnachlaß bewilligt, dessen Betrag gerade hinreicht, um dem Pächter den Rückbezug seines Kapitaleinsatzes und von diesem zugleich einen Zinsgenuß von $3^1/_2$ Prozent zu sichern. Wie hoch würden sich hiernach die halbjährigen Pachtermäßigungen belaufen? (Hinsichtlich der Jahresabschnitte: Gemeinübliches Verfahren. Vgl. Aufgabe 33.)

A.

$$r = \frac{3\,600 \times 1{,}0\tfrac{35}{2}^{24} \times 0{,}0\tfrac{35}{2}}{1{,}0\tfrac{35}{2}^{24} - 1}$$

log. 1,0175 = 0,0075344
$\times 24$
301376
150688
log. $1{,}0175^{24}$ = **0,1808256**
num. log. $1{,}0175^{24}$ = 1,5164412
num. log. $1{,}0175^{24} - 1$ = 0,5164412
log. $(1{,}0175^{24} - 1)$ = **0,7130209 − 1**
log. 0,0175 = **0,2430380 − 2**

log. 3 600 = 3,5563025
+ log. $1{,}0175^{24}$ = 0,1808256
+ log. 0,0175 = 0,2430380 − 2
1,9801661
−log. $(1{,}0175^{24} - 1)$ = 0,7130209 − 1
2,2671452
num. = 184,99
r = **185** M (rund).

Der Jahresbetrag der Pachtabzüge wäre also: $185 \times 2 = 370$ Mark.

Anmerkung. Wurde man behufs Berechnung der Annuitäten auf die allgemein gültige Formel (S. Aufgabe 33) zurückgreifen, so erhielte man den Ansatz:

$$r = \frac{3\,600 \times 1{,}035^{12} \times 0{,}035}{1{,}035^{12} - 1}$$

Die Berechnung ergibt dann . . . . r = 372,54 Mark.
Und pro Halbjahr . . . . r = 186,27 Mark

[1]) In Anknüpfung an ein ähnliches, von Baurat Wilke (Deutsche landw. Presse 1903, Nr. 5) behandeltes Beispiel.

Vierte Gruppe.

(Gegeben: a, r und p. Gesucht: n. Anwendung der Formel XII. c.:

$$n = \frac{\log. r - \log. [r - (a \,.\, 0{,}0p)]}{\log. 1{,}0p}\Big)$$

134. Um eine zu $4^1/_2$ Prozent verzinsliche Schuld von 25 000 Mark zu amortisieren, hat der Pflichtige am Ende eines jeden Jahres $2^1/_2$ Prozent = 625 Mark zu entrichten. Nach wieviel Jahren wird das Kapital getilgt sein?

A. Der Betrag der Annuitäten ist: 250 × (4.5 + 2.5) = 1 750 Mark. Daher:

$$n = \frac{\log. 1\,750 - \log. [1\,750 - (25\,000 \times 0{,}045)]}{\log. 1{,}045}$$

$$= \frac{\log. 1\,750 - \log. (1\,750 - 1\,125)}{\log. 1{,}045}$$

$$= \frac{\log. 1\,750 - \log. 625}{\log. 1{,}045}$$

$$\frac{1\,750}{625} = 2{,}8$$

$$\log. 2{,}8 = 0{,}4471580$$

$$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$$

$$n = \frac{4471580}{191163} = \mathbf{23{,}3914}$$ Jahre oder: 23 Jahre, 4 Monate und 21 Tage.

Logarithmische Behandlung der Division:

$$\log. 0{,}4471580 = 0{,}6504610 - 1$$

$$- \log. 0{,}0191163 = 0{,}2814038 - 2$$

$$\overline{1{,}3690572}$$

num. = **23,3914** ... Jahre (wie oben).

Anmerkung 1. Vergegenwärtigt man sich, daß das Ergebnis in derartigen Fällen (vgl. übrigens auch die folgenden Beispiele) von dem Verhältnisse zwischen der Annuität im ganzen und der Tilgungsrate bestimmt wird, so erkennt man, wie die absolute Größe dieser Werte auch durch die entsprechenden Prozentbeträge ersetzt werden können, ein Verfahren, welches je nach der Fassung der Aufgabe den Nachweis der Zahl der Jahre nicht unwesentlich erleichtert. Die vorliegende Frage ließe sich darnach auch beantworten, wie folgt:

$$n = \frac{\log. (4{,}5 + 2{,}5) - \log. [(4{,}5 + 2{,}5) - 4{,}5]}{\log. 1{,}045} = \frac{\log. 7{,}0 - \log. 2{,}5}{\log. 1{,}045} = \frac{\log. \frac{7{,}0}{2{,}5}}{\log. 1{,}045} = \frac{\log. 2{,}8}{\log. 1{,}045}$$

Genau entsprechend dem oben vorgeführten Rechnungsgang.

Anmerkung 2. Wenn es sich bei der Ermittlung der Zeitdauer (n) von Wert-Anlagen um eine rechnerische Ausgleichung von Leistungen und Gegenleistungen handelt, in dem Abschlusse aber sich Jahresbruchteile ergeben — Voraussetzungen, welche auch für das vorliegende Beispiel zutreffen —, so wird man, um den dem Jahresbruchteil entsprechenden Abfindungsbetrag festzustellen, die beiderseitigen Leistungen auf den Schluß des letzten Volljahres oder des Jahres, in welches der Bruchteil fällt, zu berechnen haben. In der Differenz der also erhaltenen Werte kommt dann der gesuchte Betrag zum Ausdruck.

Das zu beobachtende Verfahren ist eingehend dargelegt in der Behandlung der Aufgaben 153, 172 und 174.

135. Zur Ausführung von Meliorationen gewährt eine Landeskulturrentenbank die erforderlichen Kapitalien unkündbar gegen Übernahme einer die Kapitaltilgung einschließenden Rente. Angenommen, die betreffenden Schuldscheine (Rentenbriefe) lauten auf 4 Prozent Zins, und die Amortisationsraten betragen $1\frac{1}{2}$ Prozent: Mit Ablauf von wieviel Jahren wird eine Rentenbriefschuld bei regelmäßiger Zahlung der Annuitäten getilgt werden?

A.
$$n = \frac{\log. 5{,}5 - \log. [5{,}5 - (100 \times 0{,}04)]}{\log. 1{,}04}$$
$$= \frac{\log. 5{,}5 - \log. (5{,}5 - 4)}{\log. 1{,}04}$$
$$= \frac{\log. 5{,}5 - \log. 1{,}5}{\log. 1{,}04}$$
$$\frac{5{,}5}{1{,}5} = 3{,}666666$$
$$\log. 3{,}666666 = 0{,}5642714$$
$$- \log. 1{,}04 = 0{,}0170333$$
$$n = \frac{5642714}{170333} = \mathbf{33{,}1275}$$, oder 33 Jahre, 1 Monat und 16 Tage.

Die logarithmische Ausführung der Division ergibt:
$$\log. 0{,}5642714 = 0{,}7514881 - 1$$
$$- \log. 0{,}0170333 = 0{,}2312988 - 2$$
$$1{,}5201893$$
num. = **33,1275** Jahre (wie oben).

136. In einem Gutsbetriebe steht eine Drainage mit dem Betrage ihrer Kosten, welche sich auf 3 338 Mark beliefen, zu Buch. Der Besitzer will an dem Kapitale, für dessen Verzinsung $3\frac{1}{2}$ Prozent berechnet werden, alle Jahre 2 Prozent = 66,76 Mark abschreiben. Eines Zeitraumes von wieviel Jahren (rund) wird es bedürfen, bis das Kapital amortisiert ist?

A. Der Betrag der Annuitäten ist: $33{,}38 \times (3{,}5 + 2{,}0) = 183{,}59$ Mark. Daher:
$$n = \frac{\log. 183{,}59 - \log. [183{,}59 - (33{,}38 \times 3{,}5)]}{\log. 1{,}035}$$
$$= \frac{\log. 183{,}59 - \log. (183{,}59 - 116{,}83)}{\log. 1{,}035}$$
$$= \frac{\log. 183{,}59 - \log. 66{,}76}{\log. 1{,}035}$$
$$\log. 183{,}59 = 2{,}2638490$$
$$- \log. 66{,}76 = 1{,}8245163$$
$$0{,}4393327$$
$$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$$
$$n = \frac{4393327}{149403} = \mathbf{29{,}406}$$ Jahre, oder 29 Jahre, 4 Monate und 26 Tage.

Division logarithmisch ausgeführt:

$$\log. 0{,}4393327 = 0{,}6427936 - 1$$
$$- \log. 0{,}0149403 = 0{,}1743593 - 2$$
$$1{,}4684343$$
$$\text{num.} = \mathbf{29{,}406} \text{ Jahre (wie oben).}$$

Anmerkung. Auch hier wäre gemäß den Andeutungen zu Aufgabe 134 eine Vereinfachung angebracht, nach dem Ansatze:

$$n = \frac{\log. 5{,}5 - \log. 2{,}0}{\log. 1{,}035} = \frac{\log. \frac{5{,}5}{2}}{\log. 1{,}035} = \frac{\log. 2{,}75}{\log. 1{,}035} = \frac{0{,}4393327}{0{,}0149403} = 29{,}406\ldots$$

137. Eine Allmendkorporation hat zum Zwecke der Durchführung von Grundmeliorationen eine Kapitalschuld von 9000 Mark kontrahiert und dem Darleiher, einem benachbarten Gutsherrn, behufs Tilgung derselben die Nutzung einer Hutweide überlassen, welche einen jährlichen Reinertrag von 769 Mark abwirft. Nach wieviel Jahren wird die Schuld durch den Bezug der Nutzungen bei Berechnung eines Zinses von $4\frac{1}{2}$ Prozent abgetragen?

A.
$$n = \frac{\log. 769 - \log. [769 - (9000 \times 0{,}045)]}{\log. 1{,}045}$$
$$= \frac{\log. 769 - (\log. 769 - 405)}{\log. 1{,}045}$$
$$= \frac{\log. 769 - \log. 364}{\log. 1{,}045}$$
$$\log. 769 = 2{,}8859263$$
$$- \log. 364 = 2{,}5611014$$
$$0{,}3248249$$
$$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$$
$$n = \frac{3248249}{191163} = \mathbf{17} \text{ Jahre (rund).}$$

Logarithmische Behandlung der Division:

$$\log. 0{,}3248249 = 0{,}5116494 - 1$$
$$- \log. 0{,}0191163 = 0{,}2814038 - 2$$
$$1{,}2302456$$
$$\text{num.} = \mathbf{17} \text{ Jahre, rund (wie oben).}$$

138. Von seinem zu $4\frac{3}{4}$ Prozent auf Zinseszinsen angelegten Kapitale im Betrage von 40000 Mark ist der Besitzer in der Lage, zur Bestreitung des Aufwandes für seinen Lebensunterhalt am Schlusse eines jeden Jahres 2500 Mark zurückziehen oder abheben zu müssen. Nach Ablauf von wieviel Jahren wird das ganze Anlagekapital durch die regelmäßigen Abzüge aufgebraucht sein?

A.
$$n = \frac{\log. 2500 - \log. [2500 - (40000 \times 0{,}0475)]}{\log. 1{,}0475}$$
$$= \frac{\log. 2500 - \log. (2500 - 1900)}{\log. 1{,}0475}$$
$$= \frac{\log. 2500 - \log. 600}{\log. 1{,}0475}$$

$$\log. 2500 = 3{,}3979400$$
$$-\log. 600 = 2{,}7781513$$
$$0{,}6197887$$
$$\log. 1{,}0475 = 0{,}0201540$$

$$n = \frac{6197887}{201540} = \mathbf{30{,}75} \text{ oder } \mathbf{30^3/_4} \text{ Jahre}$$
(fast ganz genau).

Division logarithmisch ausgeführt:

$$\log. 0{,}6197887 = 0{,}7922437 - 1$$
$$-\log. 0{,}0201540 = 0{,}3043613 - 2$$
$$1{,}4878824$$
$$\text{num.} = \mathbf{30{,}75} \text{ Jahre (rund).}$$

139. Wenn in einer Gutsrechnung von dem Neuwert eines Gebäudes regelmäßig $^1/_2$ Prozent abgeschrieben wird: Innerhalb welcher Frist von Jahren wird dann das Kapital — Anwendung eines Zinsfußes von $3^1/_2$ Prozent vorausgesetzt — amortisiert?

A.
$$n = \frac{\log. 4 - \log. [4 - (100 \times 0{,}035)]}{\log. 1{,}035}$$
$$= \frac{\log. 4 - \log. (4 - 3{,}5)}{\log. 1{,}035}$$
$$= \frac{\log. 4 - \log. 0{,}5}{\log. 1{,}035}$$
$$\frac{4}{0{,}5} = 8$$
$$\log. 8 = 0{,}9030900$$
$$-\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$$
$$n = \frac{9030900}{149403} = \mathbf{60{,}45} \text{ Jahre (rund).}$$

Logarithmische Behandlung der Division:

$$\log. 0{,}9030900 = 0{,}9557310 - 1$$
$$-\log. 0{,}0149403 = 0{,}1743593 - 2$$
$$1{,}7813717$$
$$\text{num.} = \mathbf{60{,}45} \text{ Jahre (wie oben).}$$

140. Die Gemeinde W. will ein von ihr aufgenommenes $4^1/_4$-prozentiges Anleihen von 200000 Mark durch Ratenzahlungen von 3 Prozent, welche nebst den Zinsen je am Ende eines Halbjahres zu entrichten sind, amortisieren. Nach wieviel Jahren wird die Tilgung sich vollzogen haben?

A. Die halbjährlichen Zahlungen betragen: $2000 \times (2{,}125 + 1{,}5) = 2000 \times 3{,}625 = 7250$ Mark, von welchen $2000 \times 2{,}125 = 4250$ Mark auf die Zinsen und $2000 \times 1{,}5 = 3000$ Mark auf die Tilgungsraten entfallen: Daher der Ansatz:

$$n = \frac{\log. 7250 - \log. [7250 - (200000 \times 0{,}02125)}{\log. 1{,}02125}$$

$$= \frac{\log. 7250 - \log. (7250 - 4250)}{\log. 1{,}02125}$$

$$= \frac{\log. 7250 - \log. 3000}{\log. 1{,}02125}$$

$$\log. 7250 = 3{,}8603380$$
$$- \log. 3000 = 3{,}4771213$$
$$0{,}3832167$$
$$\log. 1{,}02125 = 0{,}0091320$$

$$n = \frac{3832167}{91320} = \mathbf{41{,}964}$$ Halbjahre, oder nahezu **21** Jahre.

Division logarithmisch ausgeführt:

$$\log. 0{,}3832167 = 0{,}5834444 - 1$$
$$- \log. 0{,}0091320 = 0{,}9605659 - 3$$
$$1{,}6228785$$

num. $= \mathbf{41{,}964}$ Halbjahre (wie oben).

Vierte Gruppe.

(Zusatz.)

(Gegeben: A, r und p. Gesucht: n. Anwendung der Formel XII. c_1:

$$n = \frac{\left(\log. \frac{A \cdot 0{,}0p}{r} + 1\right)}{\log. 1{,}0p}\Bigg)$$

141. Von seinem Gehalte legt ein Beamter jährlich 300 Mark zurück und übergibt diesen Betrag regelmäßig am Schlusse eines jeden Jahres der Sparkasse, welche $4^3/_4$ Prozent vergütet. Wie viele Jahre muß er diese Einlagen fortsetzen, bis sie sich auf die Summe von 5000 Mark vermehrt haben?

A.

$$n = \frac{\log. \left(\frac{5000 \times 0{,}0475}{300} + 1\right)}{\log. 1{,}0475}$$

$$5000 \times 0{,}0475 = 50 \times 4{,}75 = 237{,}50$$

$$\frac{237{,}50}{300} = \frac{2{,}3750}{3} = 0{,}7916666$$

$$+ 1 = 1{,}7916666$$
$$\log. 1{,}7916666 = 0{,}2532572$$
$$\log. 1{,}0475 = 0{,}0201540$$

$$n = \frac{2532572}{201540} = \mathbf{12{,}566}$$ Jahre, oder 12 Jahre, 6 Monate u. 24 Tage.

Logarithmische Behandlung der Division:

$$\log. 0{,}2532572 = 0{,}4035618 - 1$$
$$- \log. 0{,}0201540 = 0{,}3043613 - 2$$
$$1{,}0992005$$

num. $= \mathbf{12{,}566}$ Jahre (wie oben).

f) Sechste Reihe (142—146).

Anwendung der Formeln XIII—XIII. c.

Analog dem Eingangs der Behandlung der 4. Reihe (S. 86) dargelegten Verfahren soll in nachfolgender Rubrik, anschließend an die 5. Reihe, der Fälle gedacht werden, in welchen die Annuitäten, welche neben der Verzinsung von Anlage-Kapitalien deren Abzahlung bezw. Tilgung oder Amortisation umfassen, am Anfange, statt am Ende eines jeden Jahres geleistet werden. Da dieser Unterschied die Formgestaltung der Rechnung nicht wesentlich alteriert, dürfte es auch hier genügen, die Vorführung von Beispielen innerhalb jeder Art der Fragestellung auf nur eine Aufgabe zu beschränken. Zur weiteren Information kann dann auf die „Vorbemerkung" zu den Beispielen der 5. Reihe (S. 100) Bezug genommen werden.

Erster Fall.

(Gegeben: r, p und n. Gesucht: $a . 1{,}0p^n$ bezw. A. Anwendung der Formel XIII: $A = \frac{r . 1{,}0p . (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$)

142. Ein Bauer hat bei der Landes-Hypothekenbank ein zu $3^3/_4$ Prozent verzinsliches Kapital von 10000 Mark unter der Bedingung aufgenommen, von demselben am Anfange jeden Jahres außer den Zinsen eine Tilgungsrate von $^1/_2$ Prozent zu zahlen. Welche Summe hat der Schuldner mit Ablauf von 30 Jahren abgetragen, wenn er innerhalb dieser Zeit seinen Verpflichtungen pünktlich nachgekommen war, und wie hoch berechnet sich dann der Rest des Schuldkapitales?

A. $$A = \frac{50 \times 1{,}0375 \times (1{,}0375^{30} - 1)}{0{,}0375}$$

$\log. 1{,}0375 = \mathbf{0{,}0159881}$
$\times 30$
$\log. 1{,}0375^{30} = 0{,}4796430$
$\text{num.}\log. 1{,}0375^{30} = 3{,}0174700$
$\text{num.}\log. 1{,}0375^{30} - 1 = 2{,}0174700$
$\log. (1{,}0375^{30} - 1) = \mathbf{0{,}3048071}$
$\log. 0{,}0375 = \mathbf{0{,}5740313 - 2}$

$\log. 50 = 1{,}6989700$
$+ \log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$
$+ \log.(1{,}0375^{30} - 1) = 0{,}3048071$
$2{,}0197652$
$- \log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$
$3{,}4457339$
num. $= 2\,790{,}83$
$A = \mathbf{2\,790{,}83}$ Mark.

Der Rest des Schuldkapitales beträgt somit: 10000,00 — 2790,83 = **7209,17** Mark.

Mit Hilfe der Tafel I:

$$A = \frac{50 \times 1{,}0375 \times 2{,}0174714}{0{,}0375} = 1\,333{,}333 \times 1{,}0375 \times 2{,}0174714$$
$$= 1\,333{,}333 \times 2{,}0931266 = \mathbf{2\,790{,}83} \text{ Mark.}$$

Zweiter Fall.

(Gegeben: r, p und n. Gesucht a. Anwendung der Formel XIII. a.:

$$a = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1} \cdot 0{,}0p})$$

143. Um den Kreis seiner Wirksamkeit zu erweitern, will ein genossenschaftliches Unternehmen eine Anleihe bis auf Höhe des Betrages kontrahieren, für dessen auf 20 Jahre vorgesehene Tilgung es die am Anfange jeden Jahres zahlbaren Annuitäten von 1 000 Mark sicherstellen kann. Wie groß ist das Kapital, welches der Darleiher bei Beanspruchung von $4^1/_4$ Prozent Zinsen gewähren kann?

A.

$$a = \frac{1\,000 \times (1{,}0425^{20} - 1)}{1{,}0425^{20-1} \times 0{,}0425}$$

$\log. 1{,}0425 = 0{,}0180761$

$\log. 1{,}0425^{19} = 0{,}3434459$

$\log. 1{,}0425^{20} = 0{,}3615220$

$\text{num.}\log. 1{,}0425^{20} = 2{,}2989100$

$\text{num.}\log. 1{,}0425^{20} - 1 = 1{,}2989100$

$\log. (1{,}0425^{20} - 1) = 0{,}1135791$

$\log. 0{,}0425 = 0{,}6283889 - 2$

$\log. 1\,000 = 3{,}0000000$

$+ \log. (1{,}0425^{20} - 1) = 0{,}1135791$

$3{,}1135791$

$\log. 1{,}0425^{19} = 0{,}3434459$

$+ \log. 0{,}0425 = 0{,}6283889 - 2$

$- 0{,}9718348 - 2$

$4{,}1417443$

$\text{num.} = 13\,859{,}40$

$a = \mathbf{13\,859{,}40}$ M.

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$a = \frac{1000 \times 1{,}2989063 \times 0{,}4534765}{0{,}0425} = \frac{1\,298{,}9063 \times 0{,}4534765}{0{,}0425}$$

$$= \mathbf{13\,859{,}40} \text{ Mark},$$

oder auch, da $\frac{1{,}0425^{20} - 1}{1{,}0425^{19}} = \frac{1{,}2989063}{2{,}2051859} = 0{,}589024$ ist:

$$\frac{1000}{0{,}0425} \times 0{,}589024 = 23\,529{,}41 \times 0{,}58902 = \mathbf{13\,859{,}39} \text{ Mark.}$$

Dritter Fall.

(Gegeben: a, p und n. Gesucht: r. Anwendung der Formel XIII. b.:

$$r = \frac{a \cdot 1{,}0p^n \cdot 0{,}0p}{1{,}0p \cdot (1{,}0p^n - 1)})$$

144. Zum Zwecke der Herstellung eines neuen Schulgebäudes nimmt eine Gemeinde bei der Landes-Kreditkasse ein Anleihen von 75 000 M zu 4 Prozent Zins gegen die Verpflichtung auf, die Schuld innerhalb 25 Jahren durch gleiche, am Anfange eines jeden Jahres zu zahlende Raten abzutragen. Frage: Wie hoch berechnet sich die jährliche Ratenzahlung?

A.

$$r = \frac{75\,000 \times 1{,}04^{25} \times 0{,}04}{1{,}04 \times (1{,}04^{25} - 1)}$$

$$\log. 1{,}04 = \mathbf{0{,}0170333(4)}$$
$$\log. 1{,}04^{25} = \mathbf{0{,}4258335}$$
$$\text{num.}\log. 1{,}04^{25} = 2{,}6658362$$
$$\text{num.}\log. 1{,}04^{25} - 1 = 1{,}6658362$$
$$\log. (1{,}04^{25} - 1) = \mathbf{0{,}2216323}$$
$$\log. 0{,}04 = \mathbf{0{,}6020600 - 2}$$

$$\begin{aligned} \log. 75\,000 &= 4{,}8750613 \\ + \log. 1{,}04^{25} &= 0{,}4258335 \\ + \log. 0{,}04 &= 0{,}6020600 - 2 \\ &\overline{3{,}9029548} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}04 &= 0{,}0170333 \\ + \log. (1{,}04^{25} - 1) &= 0{,}2216323 \\ & - 0{,}2386656 \\ & \overline{3{,}6642892} \\ \text{num.} &= 4\,616{,}25 \\ r &= \mathbf{4\,616{,}25} \text{ Mark.} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Tafel I:

$$r = \frac{3\,000 \times 2{,}6658363}{1{,}04 \times 1{,}6658363} = \frac{7\,997{,}5098}{1{,}7324697} = \mathbf{4\,616{,}25} \text{ Mark,}$$

$$\text{oder auch: } \frac{3\,000}{1{,}04} \times \frac{2{,}6658363}{1{,}6658363} = 2\,884{,}62 \times 1{,}600299 = \mathbf{4\,616{,}25} \text{ Mark.}$$

Vierter Fall.

(Gegeben: a, r und p. Gesucht n. Anwendung der Formel XIII. c.:

$$n = \frac{\log. r - \log. (r \,.\, 1{,}0p - a \,.\, 0{,}0p)}{\log. 1{,}0p} + 1 \Big)$$

145. Es hat Jemand ein Kapital von 52 000 Mark zu $4^1/_4$ Prozent auf Zinseszinsen angelegt, nimmt aber von demselben, da die Zinsen (520 × 4,25 = 2 210 Mark) zur Bestreitung seines Unterhaltes nicht ausreichen, den hierfür nötigen Betrag von 3 000 Mark am Anfange eines jeden Jahres zurück. Nach wieviel Jahren wird das Kapital, wenn diese Bezüge regelmäßig stattfinden, gänzlich verbraucht sein?

A. $$n = \frac{\log. 3\,000 - \log. (3\,000 \times 1{,}0425 - 52\,000 \times 0{,}0425)}{\log. 1{,}0425} + 1$$

$$n = \frac{\log. 3\,000 - \log. (3\,000 \times 1{,}0425 - 520 \times 4{,}25)}{\log. 1{,}0425} + 1$$

$$= \frac{\log. 3\,000 - \log. (3\,127{,}5 - 2\,210{,}0)}{\log. 1{,}0425} + 1$$

$$= \frac{\log. 3\,000 - \log. 917{,}5}{\log. 1{,}0425} + 1$$

$$\begin{aligned} \log. 3\,000 &= 3{,}4771213 \\ - \log. 917{,}5 &= 2{,}9626061 \\ & \overline{0{,}5145152} \\ \log. 1{,}0425 &= 0{,}0180761 \end{aligned}$$

$$n = \frac{5145152}{180761} = 28{,}4638 + 1 = \mathbf{29{,}4638} \text{ Jahre}$$

oder: 29 Jahre, 5 Monate und 17 Tage.

Logarithmische Division:

$$\begin{aligned} \log. 0{,}5145152 &= 0{,}7113982 - 1 \\ -\log. 0{,}0180761 &= 0{,}2571047 - 2 \\ &\overline{\quad 1{,}4542935 \quad} \end{aligned}$$

num. = 28,4638 + 1 = **29,4638** .. Jahre (wie oben).

Vierter Fall.

(Zusatz.)

(Gegeben: A, r und p. Gesucht n. Anwendung der Formel XIII. c_1.:

$$n = \frac{\left(\log. \frac{A \,.\, 0{,}0p}{r \,.\, 1{,}0p} + 1\right)}{\log. 1{,}0p}\Bigg)$$

146. Aus der Vermietung einer Liegenschaft bezieht deren Besitzer alljährlich die praenumerando eingehende Summe von 600 Mark. Wenn nun dieser Betrag am Anfange jeden Jahres bei einer Sparkasse zu $3^1/_2$ Prozent angelegt wird: Nach wieviel Jahren wird derselbe bis auf 10000 Mark angewachsen sein?

A.
$$n = \frac{\log. \left(\frac{10\,000 \times 0{,}035}{600 \times 1{,}035} + 1\right)}{\log. 1{,}035}$$

$$= \frac{\log. \frac{350}{621} + 1}{\log. 1{,}035}$$

$$= \frac{\log. 1{,}5636071}{\log. 1{,}035}$$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}5636071 &= 0{,}1941277 \\ -\log. 1{,}035 &= 0{,}0149403 \end{aligned}$$

$$n = \frac{1941277}{149403} = \mathbf{12{,}9935}$$ oder rund **13** Jahre.

In logarithmischer Ausführung der Division:

$$\begin{aligned} \log. 0{,}1941277 &= 0{,}2880875 - 1 \\ -\log. 0{,}0149403 &= 0{,}1743593 - 2 \\ &\overline{\quad 1{,}1137282 \quad} \end{aligned}$$

num. = **12,9935** . . Jahre (wie oben).

Sonder-Aufgaben.

(147—157.)

Die Voraussetzungen für die Anwendung der Formeln XII und XIII (Aufgaben 119—146, S. 100—125) können nun allerdings, ähnlich wie es bei den Reihen 1—4 der Fall, in dem Sinne variieren, daß die rechnerische Behandlung der betreffenden Aufgaben noch gewisse Beihilfen erfordert. Zur Verdeutlichung dessen mögen hier noch einige Beispiele angeschlossen werden.

147. Jemand legt von seinem Einkommen am Ende jedes zweiten Jahres den Betrag von 500 Mark zurück und übergibt denselben der Sparkasse, welche $4\frac{1}{2}$ Prozent vergütet. Wie hoch berechnet sich die gesamte Ersparnis am Schlusse des 20ten Jahres?

A. Es ist hier zu beachten, daß die Wert-Einheit einer Einlage bis zum Schlusse des ersten Jahres auf 1,045, und des zweiten Jahres auf $1{,}045^2$, somit der am Ende des zweiten Jahres eingelegte Betrag von 500 Mark bis zum Ende des 4ten Jahres auf $500 \times 1{,}045^2$, dieser samt seinem dann stattfindenden weiteren Zuschusse von 500 Mark bis zum Ende des 6ten Jahres auf $500 \times 1{,}045^4 + 500 \times 1{,}045^2$ anwächst, und daß die folgenden Zunahmen fortschreitend in gleichem Verhältnisse verlaufen. Wendet man auf die solchermaßen entstehende Progression die früher (vgl. Formel VI—VIII) entwickelte Behandlung an, und berücksichtigt man, daß, während dort der Zinsfaktor 1,0p betrug, im vorliegenden Falle für den Zeitraum von je 2 Jahren ein Zinsfaktor bezw. eine Wert-Einheit von $1{,}0p^2$ einzusetzen ist, so wird die Rechnung lauten müssen:

$$A = \frac{500 \times (1{,}045^{20} - 1)}{1{,}045^2 - 1}\ [1]$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}045 &= 0{,}0191163 \\
\log. 1{,}045^{20} &= 0{,}3823260 \\
\text{num.} \log. 1{,}045^{20} &= 2{,}4117150 \\
\text{num.} \log. 1{,}045^{20} - 1 &= 1{,}4117150 \\
\log. (1{,}045^{20} - 1) &= \mathbf{0{,}1497470} \\
\log. 1{,}045^2 &= 0{,}0382326 \\
\text{num.} \log. 1{,}045^2 &= 1{,}0920253 \\
\text{num.} \log. 1{,}045^2 - 1 &= 0{,}0920253 \\
\log. (1{,}045^2 - 1) &= \mathbf{0{,}9639072 - 2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 500 &= 2{,}6989700 \\
+\log.(1{,}045^{20} - 1) &= 0{,}1497470 \\
&\quad 2{,}8487170 \\
-\log.(1{,}045^2 - 1) &= 0{,}9639072 - 2 \\
&\quad 3{,}8848098 \\
\text{num.} &= 7670{,}26 \\
A &= \mathbf{7670{,}26}\ \text{Mark.}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Tafel I:

$$A = \frac{500 \times 1{,}411714}{0{,}092025} = \frac{705{,}857}{0{,}092025} = \mathbf{7670{,}27}\ \text{Mark.}$$

148. Behufs Übernahme einer Liegenschaft soll deren Käufer vertragsmäßig 13000 Mark bar und dann während 7 Jahren am Anfange eines jeden Jahres 1500 Mark bezahlen. Frage: Zu welchem Preise

---

[1]) Früheren Ausführungen gemäß (vgl. S. 54) stellt sich das Verhältnis folgendermaßen dar:

$$\begin{aligned}
A &= 500 \times (1{,}045^{20-2} + 1{,}045^{20-4} + 1{,}045^{20-6} + \ldots\ldots + 1{,}045^{20-16} + 1{,}045^{20-18} + 1) \\
&= 500 \times (1 + 1{,}045^{20-18} + 1{,}045^{20-16} + \ldots\ldots + 1{,}045^{20-6} + 1{,}045^{20-4} + 1{,}045^{20-2}) \\
&= \frac{(500 \times 1{,}045^{20-2} \times 1{,}045^2) - 500}{1{,}045^2 - 1} \\
&= \frac{(500 \times 1{,}045^{20}) - 500}{1{,}045^2 - 1} \\
&= \frac{500 \times (1{,}045^{20} - 1)}{1{,}045^2 - 1}
\end{aligned}$$

wurde der Grundbesitz erworben, wenn für die Nachzahlungen Zinseszinsen zu 4 Prozent beansprucht werden? (Formel: XIII. a.)

A. Die hier gestellte Aufgabe unterscheidet sich von ihrer Vorgängerin der gleichen Gruppe (Beispiel 143) nur dadurch, daß der Vorwert der jährlichen Zahlungen an einen gegebenen Anfangswert anschließt und diesen zur gesamten Wert-Anlage ergänzt. Darnach hat man:

$$a = 13000 + \frac{1500 \times (1{,}04^7 - 1)}{1{,}04^{7-1} \times 0{,}04}$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$
$\log. 1{,}04^7 = 0{,}1192331$
$\text{num.} \log. 1{,}04^7 = 1{,}3159309$
$\text{num.} \log. 1{,}04^7 - 1 = 0{,}3159309$
$\log. (1{,}04^7 - 1) = \mathbf{0{,}4995921 - 1}$
$\log. 1{,}04^6 = \mathbf{0{,}1021998}$
$\log. 0{,}04 = \mathbf{0{,}6020600 - 2}$

$\log. 1500 = 3{,}1760913$
$+ \log. (1{,}04^7 - 1) = 0{,}4995921 - 1$
$2{,}6756834$

$\log. 1{,}04^6 = 0{,}1021998$
$+ \log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$
$- 0{,}7042598 - 2$
$3{,}9714236$
num. = 9363,18
Dazu die Barzahlung mit: 13000,00
a = **22363,18** Mark.

149. Ein junger Mann empfängt als Beihilfe zur Bestreitung der Kosten seiner beruflichen Ausbildung ein Darlehen von 6000 Mark unter folgenden Bedingungen: Gewährung des Kapitales in gleichen, auf 5 Jahre zu verteilenden Beträgen, Verabfolgung je am Anfange des Jahres, Fristerstreckung für Beginn der Zahlung von Zinsen und Tilgungsraten bis zum Ablauf von 5 Jahren, Zeitdauer für die Amortisation: 10 Jahre, Zahlungen am Ende eines jeden Jahres, Zinsfuß $4^1/_4$ Prozent. Wie hoch wird sich dann eine jährliche Rate belaufen?

A. Die Fragestellung erfordert zunächst Auskunft über den Betrag A, bis auf welchen das Kapital nach 5 Jahren angewachsen sein wird. Ist dieser bekannt, dann handelt es sich noch um die Ermittlung der Annuitäten r, welche bis zum Ablauf der folgenden 10 Jahre zu entrichten sind. Die Rechnung ergibt nach Formel XIII:

$$A = \frac{1200 \times 1{,}0425 \times (1{,}0425^5 - 1)}{0{,}0425}$$

$\log. 1{,}0425 = \mathbf{0{,}0180761}$
$\times 5$
$\log. 1{,}0425^5 = 0{,}0903805$
$\text{num.} \log. 1{,}0425^5 = 1{,}2313471$
$\text{num.} \log. 1{,}0425^5 - 1 = 0{,}2313471$
$\log. (1{,}0425^5 - 1) = \mathbf{0{,}3642641 - 1}$
$\log. 0{,}0425 = \mathbf{0{,}6283889 - 2}$

$\log. 1200 = 3{,}0791812$
$+ \log. 1{,}0425 = 0{,}0180761$
$+ \log. (1{,}0425^5 - 1) = 0{,}3642641 - 1$
$2{,}4615214$
$- \log. 0{,}0425 = 0{,}6283889 - 2$
$3{,}8331325$
num. = 6809,77
A = **6809,77** Mark.

Dieser Betrag der Schuld soll in 10 Jahren getilgt werden. Daher nach Formel XII. b.:

$$r = \frac{6\,809{,}77 \times 1{,}0425^{10} \times 0{,}0425}{1{,}0425^{10} - 1}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}0425 &= 0{,}0180761 \\
&\quad \times 10 \\
\log. 1{,}0425^{10} &= \mathbf{0{,}1807610} \\
\text{num.} \log. 1{,}0425^{10} &= 1{,}5162156 \\
\text{num.} \log. 1{,}0425^{10} - 1 &= 0{,}5162156 \\
\log. (1{,}0425^{10} - 1) &= \mathbf{0{,}7128311 - 1} \\
\log. 0{,}0425 &= \mathbf{0{,}6283889 - 2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 6\,809{,}77 &= 3{,}8331325 \\
+ \log. 1{,}0425^{10} &= 0{,}1807610 \\
+ \log. 0{,}0425 &= \underline{0{,}6283889 - 2} \\
& 2{,}6422824 \\
- \log.(1{,}0425^{10} - 1) &= \underline{0{,}7128311 - 1} \\
& 2{,}9294513 \\
\text{num.} &= 850{,}06 \\
r &= \mathbf{850{,}06} \text{ Mark.}
\end{aligned}$$

Anmerkung. Die vorliegende Aufgabe ließe sich allerdings dadurch vereinfachen, daß man die beiden in Betracht fallenden Gleichungen (XIII und XII. b) kombiniert und dann zusammenzieht. Auf diesem Wege erhält man:

$$r = \frac{\frac{1\,200 \times 1{,}0425 \times (1{,}0425^5 - 1)}{0{,}0425} \times 1{,}0425^{10} \times 0{,}0425}{1{,}0425^{10} - 1}$$

$$= \frac{1\,200 \times 1{,}0425^{11} \times (1{,}0425^5 - 1)}{1{,}0425^{10} - 1}$$

Die weitere Ausführung ergibt dann:

$$r = \frac{1\,200 \times 1{,}5806536 \times 0{,}2313471}{0{,}5162156} = \frac{438{,}8153574}{0{,}5162156} = \mathbf{850{,}06} \text{ Mark (w. o.).}$$

Ein für die Behandlung aller ähnlich gestalteten Fälle wohl zu beachtendes Verfahren!

150. Bei Kontrahierung eines in 25 Jahren zu tilgenden Hypothekar-Anleihens von 80 000 Mark wurde für dessen Verzinsung $3\frac{3}{4}$ Prozent, für die Verzinsung der Amortisationsraten dagegen nur $3\frac{1}{2}$ Prozent bedungen. Wieviel beträgt in diesem Falle eine Rate, Zahlungen am Ende eines jeden Jahres vorausgesetzt? (Formel XII. b.)

A. Nach der Formel XII ist:

$$a \,.\, 1{,}0p^n = \frac{r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Im gegebenen Falle ist aber $a = 80\,000$, und der Zinsfaktor für $a = 1{,}0375$, während der Zinsfaktor für die Ratenzahlung (rechte Seite der Gleichung) 1,035 beträgt. Demgemäß muß die Rechnung für r entsprechend der abgeleiteten Formel XII. b. lauten:

$$r = \frac{80\,000 \times 1{,}0375^{25} \times 0{,}035}{1{,}035^{25} - 1}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}0375 &= 0{,}0159881 \\
\log. 1{,}0375^{25} &= \mathbf{0{,}3997025} \\
\log. 1{,}035 &= 0{,}0149403 \\
\log. 1{,}035^{25} &= 0{,}3735075 \\
\text{num.} \log. 1{,}035^{25} &= 2{,}3632381 \\
\text{num.} \log. 1{,}035^{25} - 1 &= 1{,}3632381 \\
\log. (1{,}035^{25} - 1) &= \mathbf{0{,}1345717} \\
\log. 0{,}035 &= \mathbf{0{,}5440680 - 2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 80\,000 &= 4{,}9030900 \\
+ \log. 1{,}0375^{25} &= 0{,}3997025 \\
+ \log. 0{,}035 &= \underline{0{,}5440680 - 2} \\
& 3{,}8468605 \\
- \log.(1{,}035^{25} - 1) &= \underline{0{,}1345717} \\
& 3{,}7122888 \\
\text{num.} &= 5\,155{,}71 \\
r &= \mathbf{5\,155{,}71} \text{ Mark.}
\end{aligned}$$

151. Ein Landwirt empfing bei Übernahme des väterlichen Besitztums zum Zwecke der Abfindung von Miterben ein in 30 Jahren zu amortisierendes Darlehen von 45 000 Mark, dessen Verzinsung und Tilgung eine am Ende jeden Jahres zu entrichtende Rate von 3 005,10 Mark erfordert. Nachdem der Schuldner diese Raten 18 Jahre lang gezahlt hat, sieht er sich in der Lage, den Rest der Schuld in einem Betrage abzustoßen. Für die Verzinsung des Kapitales wurden $4\frac{1}{2}$ Prozent, für diejenige der Ratenzahlungen 4 Prozent beansprucht. Welche Summe hat der Pflichtige an jenem Termine behufs Ablösung der Schuld zu entrichten?

A. In diesem Falle kommt es offenbar nur auf einen Vergleich der Beträge an, welche sich für den End- oder Nachwert einerseits des ursprünglichen Kapitales (ohne die Abzahlungen), andererseits der geleisteten Ratenzahlungen am Schlusse des 18ten Jahres ergeben.[1])

Der Anwachs des Schuldkapitales würde sich berechnen aus:

$$45\,000 \times 1{,}045^{18}$$

$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$

$\log. 1{,}045^{18} = \mathbf{0{,}3440934}$

$$\begin{aligned} \log. 45\,000 &= 4{,}6532125 \\ + \log. 1{,}045^{18} &= 0{,}3440934 \\ \hline &\ 4{,}9973059 \end{aligned}$$

$$\text{num.} = 99\,381{,}54 = \mathbf{99\,381{,}54} \text{ Mark.}$$

Die bis zu der gleichen Zeit bereits bezahlten Zins- und Tilgungsraten belaufen sich nach Formel XII auf:

$$\frac{3\,005{,}10 \times (1{,}04^{18} - 1)}{0{,}04}$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333(4)$

$\log. 1{,}04^{18} = 0{,}3066001$

$\text{num.}\log. 1{,}04^{18} = 2{,}0258160$

$\text{num.}\log. 1{,}04^{18} - 1 = 1{,}0258160$

$\log. (1{,}04^{18} - 1) = \mathbf{0{,}0110694}$

$\log. 0{,}04 = \mathbf{0{,}6020600 - 2}$

$$\begin{aligned} \log. 3\,005{,}10 &= 3{,}4778589 \\ + \log. (1{,}04^{18} - 1) &= 0{,}0110694 \\ \hline &\ 3{,}4889283 \\ - \log. 0{,}04 &= 0{,}6020600 - 2 \\ \hline &\ 4{,}8868683 \\ \text{num.} &= 77\,067{,}00 \\ &= \mathbf{77\,067{,}00} \text{ Mark.} \end{aligned}$$

Darnach beträgt der Rest der Schuld, nachdem die 18te Ratenzahlung geleistet wurde:

$$\mathbf{99\,381{,}54 - 77\,067{,}00 = 22\,314{,}54} \text{ Mark.}$$

Mit Hilfe der Tafel I:

$$A - A_1 = (45\,000 \times 2{,}2084788) - \frac{3\,005{,}10 \times 1{,}0258165}{0{,}04}$$

$$= 99\,381{,}55 - \frac{3\,082{,}6811}{0{,}04}$$

$$99\,381{,}55 - 77\,067{,}02 = \mathbf{22\,314{,}53} \text{ Mark.}$$

---

[1]) Wegen der Verschiedenheit des Zinsfußes für das Kapital und die Ratenzahlungen ist die in pos. 2 der „Anmerkungen" zu Aufgabe 127 dargelegte einfachere Rechnungsweise direkt nicht anwendbar.

152. Auf einem Gutsbetriebe lastet ein zu 4 Prozent verzinsliches Schuldkapital von 12 500 Mark, welches in 20 Jahren durch gleiche, am Ende jeden Jahres zu zahlende Raten abzutragen ist. Der Anleiher möchte aber in der Folge das Kapital in einmaliger Zahlung zurückgeben. Mit Ablauf von wieviel Jahren kann das geschehen?

A. Der hier verlangte Nachweis erfordert die Beantwortung der Frage, nach wieviel Jahren die Barwerte einerseits des Betrages der zurückzuzahlenden Schuld, und andererseits der in 20 Jahren zu leistenden Ratenzahlungen gleich sein werden.

Bezeichnet man die gesuchte Zahl der Jahre mit n_1, so ist der entsprechende Barwert a der Schuld $(A) = \frac{A}{1{,}0p^{n_1}}$, indessen der Betrag einer jährlichen Rate (r) sich auf $\frac{A}{n}$ beläuft.

Darnach bestimmt sich das gesuchte Verhältnis in Anwendung der Formel XII. a. wie folgt:

$$\frac{12\,500}{1{,}04^{n_1}} = \frac{\frac{12\,500}{20} \times (1{,}04^{20} - 1)}{1{,}04^{20} \times 0{,}04}$$

Dividiert man auf beiden Seiten durch 12 500, so kommt:

$$\frac{1}{1{,}04^{n_1}} = \frac{\frac{1}{20} \times (1{,}04^{20} - 1)}{1{,}04^{20} \times 0{,}04}$$

Hieraus folgt dann weiter:

$$\frac{1}{1{,}04^{n_1}} = \frac{1{,}04^{20} - 1}{20 \times 1{,}04^{20} \times 0{,}04}$$

$$1{,}04^{n_1} = \frac{20 \times 1{,}04^{20} \times 0{,}04}{1{,}04^{20} - 1}$$

$$n_1 = \frac{\log.(20 + \log. 1{,}04^{20} + \log. 0{,}04) - \log.(1{,}04^{20} - 1)}{\log. 1{,}04}$$

$\log. 1{,}04 = \mathbf{0{,}0170333}$

$\log. 1{,}04^{20} = \mathbf{0{,}3406660}$

$\text{num.} \log. 1{,}04^{20} = 2{,}1911191$

$\text{num.} \log. 1{,}04^{20} - 1 = 1{,}1911191$

$\log.(1{,}04^{20} - 1) = \mathbf{0{,}0759551}$

$\log. 0{,}04 = \mathbf{0{,}6020600 - 2}$

$\log. 20 = 1{,}3010300$

$+ \log. 1{,}04^{20} = 0{,}3406660$

$+ \log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$

$0{,}2437560$

$- \log.(1{,}04^{20} - 1) = 0{,}0759551$

$0{,}1678009$

$$n_1 = \frac{1678009}{170333} = \mathbf{9{,}8513} \text{ Jahre, oder 9 Jahre, 10 Monate und 6 Tage.}$$

Anmerkung. Macht man die Probe auf diese Rechnung, so erhält man sowohl für die nach 9,85 Jahren zu zahlende Schuld, wie für die während 20 Jahren zu zahlenden Raten den gleichen Barwert von rund 8 491 Mark, welche in der angegebenen Zeit genau auf die Summe von 12 500 Mark anwachsen. Bringt man von dieser den Endwert der seitens des Gläubigers in dem Zeitraum bis zur Abzahlung des Kapitales zu beanspruchenden Raten = 7 369,30 Mark in Abzug, so bleiben

noch 5130,70 Mark. Und dies ist genau der Barwert der Raten, welche der Gläubiger noch für die letzte Periode von 10,15 Jahren zu beziehen haben würde. Der Ausgleich zwischen Gläubiger und Schuldner wäre also vollständig.

153. Es hat Jemand eine zu $3^1/_2$ Prozent auf Zinseszinsen ausstehende Schuld von 35 000 Mark in Beträgen von 4 000 Mark, welche am Ende jeden Jahres gezahlt werden, zu verzinsen und abzutragen. Nach wieviel Jahren wird die Tilgung erreicht sein, und wieviel hat der Schuldner, wenn die Zeitdauer mit einem Jahresbruchteil abschließt, noch im letzten Jahre zu zahlen? (Formel XII. c. und XII.)

A.
$$n = \frac{\log. 4\,000 - \log. [4\,000 - (35\,000 \times 0{,}035)]}{\log. 1{,}035}$$
$$= \frac{\log. 4 - \log. [4 - (35 \times 0{,}035)]}{\log. 1{,}035}$$
$$= \frac{\log. 4 - \log. (4 - 1{,}225)}{\log. 1{,}035}$$
$$= \frac{\log. 4 - \log. 2{,}775}{\log. 1{,}035}$$

$$\log. 4 = 0{,}6020600$$
$$- \log. 2{,}775 = 0{,}4432630$$
$$0{,}1587970$$
$$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$$
$$n = \frac{1587970}{149403} = \mathbf{10{,}6288}$$ Jahre oder 10 Jahre, 7 Monate und 17 Tage.

Der Anwachs des Schuldkapitales von 35 000 Mark ist in 10 Jahren: $35\,000 \times 1{,}035^{10} =$ . . . . 49 370,90 M.

Der Betrag, bis auf welchen die Zinsen und Tilgungsquoten mit Ablauf des 10ten Jahres angewachsen sein werden, berechnet sich gemäß der Formel XII. also:
$$\frac{4\,000 \times (1{,}035^{10} - 1)}{0{,}035}$$

$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$
$\log. 1{,}035^{10} = 0{,}1494030$
$\text{num.} \log. 1{,}035^{10} = 1{,}4105971$
$\text{num.} \log. 1{,}035^{10} - 1 = 0{,}4105971$
$\log. (1{,}035^{10} - 1) = \mathbf{0{,}6134159 - 1}$
$\log. 0{,}035 = \mathbf{0{,}5440680 - 2}$

$\log. 4\,000 = 3{,}6020600$
$+ \log. (1{,}035^{10} - 1) = 0{,}6134159 - 1$
$3{,}2154759$
$- \log. 0{,}035 = 0{,}5440680 - 2$
$4{,}6714079$
num. = 46 925,39 .... 46 925,39 „

Somit verbleibt am Ende des 10ten Jahres noch eine Restschuld von: **2445,51** M, welche genau gleich ist dem Barwerte einer nach 0,6288 Jahren zahlbaren Rate von 4 000 Mark.[1])

Soll aber die Restschuld erst am Schlusse des 11ten Jahres abgetragen werden, so steigert sich dieselbe um den Betrag der Jahreszinsen auf: $2\,445{,}52 \times 1{,}035 = \mathbf{2\,531{,}11}$ Mark.

---

[1]) Gemäß der Formel XII. a.:
$$a = \frac{4\,000 \times (1{,}035^{0{,}6288} - 1)}{1{,}035^{0{,}6288} \times 0{,}035} = 2\,445{,}51.$$

154. Bei der Erb-Übernahme des elterlichen Gutes bezieht ein Landwirt aus dem Reinvermögen von 115 000 Mark einen Vorzugs-Anteil von 25 600 Mark und außerdem in der Auseinandersetzung mit 2 Geschwistern eine der gleich bemessenen Quoten der Hinterlassenschaft, wogegen ihm bei Antritt des Besitztums die Pflicht der Abfindung der Miterben verbleibt. Fragen:

1. Wie hoch berechnet sich:
   a) Das Reinvermögen des Gutsübernehmers?
   b) Die von diesem zum Zwecke des Erbauskaufs zu kontrahierende Schuld, absolut und in Prozenten vom Gutswerte?

2. Um einer Steigerung der Schuldbelastung des Gutes für den nächsten Erbgang vorzubeugen, gedenkt der Eigentümer ein Amortisations-Anleihen zu kontrahieren und das Verhältnis derart einzurichten, daß das Kapital, für welches ein Zinsfuß von $3^3/_4$ Prozent beansprucht wird, in 30 Jahren abgetragen ist: Wieviel Prozent vom Anleihens-Kapital und wieviel Prozent von seinem eigenen schuldenfreien Vermögen muß der Gutsübernehmer aufwenden, um die Tilgung der Schuld innerhalb der gegebenen Zeit durchzuführen?

A. Ad 1. a) Das reine Vermögen des Gutsübernehmers beläuft sich auf:

$$25\,600 + \frac{115\,000 - 25\,600}{3} = 25\,600 + \frac{89\,400}{3} = 25\,600 + 29\,800$$
$$= 55\,400 \text{ Mark.}$$

Ad 1. b) Die Abfindungsschuld beträgt: $2 \times 29\,800 = 59\,600$ Mark. Das sind: $115\,000 : 59\,600 = 100 : x$; $x = 52$ Prozent (rund) vom Gutswerte.

Ad 2. Der Betrag der Tilgungsquoten berechnet sich (vgl. Anmerkung zur Formel XII. S. 63) wie folgt:

$$\frac{59\,600 \times 0{,}0375}{1{,}0375^{30} - 1}$$

log. 1,0375 = 0,0159881	log. 59 600 = 4,7752463
log. $1{,}0375^{30}$ = 0,4796430	+ log. 0,0375 = 0,5740313 − 2
num. log. $1{,}0375^{30}$ = 3,0174700	3,3492776
num.log. $1{,}0375^{30}$ − 1 = 2,0174700	−log. ($1{,}0375^{30}$ − 1) = 0,3048071
log. ($1{,}0375^{30}$ − 1) = **0,3048071**	3,0444705
log. 0,0375 = **0,5740313 − 2**	num. = **1 107,82** Mark.

Dieser Betrag macht:

Vom Anleihens-Kapital: (59 600 : 1 107,82 = 100 : x) 1,86 Prozent.

Vom gesamten schuldenfreien Vermögen:

(55 400 : 1 107,82 = 100 : x) . . . . 2,00 Prozent.

Anmerkung. Die Zinsen im Betrage von 2 235 Mark belaufen sich im einen Falle auf 3,75, im anderen Falle auf $\frac{2\,235}{554} = 4{,}03$ Prozent.

155. [1]) Der Besitzer eines mit Wirtschaftsgebäuden unzureichend ausgestatteten Landgutes will dieses auf 20 Jahre verpachten. Auf Grund

[1]) In Anknüpfung an ein ähnliches, von Baurat Wilke in Nr. 5 d. J. 1903 der „Deutsche landw. Presse" behandeltes Beispiel.

näherer Information hat er sich vergewissert, daß, wenn die Baulichkeiten bis zu dem für einen geordneten Betrieb erforderlichen Umfange vorhanden wären, auf einen jährlichen Pachtzins von 4 500 Mark zu rechnen sei, ferner aber, daß für die Neuherstellung der nötigen Gebäude ein Kapital von 37 500 Mark aufgewendet werden müßte. In Anbetracht dessen sieht sich der Eigentümer vor folgende Fragen gestellt:

1. Auf ein wie großes Kapital würde der bei vollständiger Ausstattung des Gutes mit Gebäuden erzielbare Pachtertrag bei Zugrundelegung eines Zinsfußes von 4 Prozent bis zum Schlusse der Pachtzeit anwachsen?

2. Wenn der Verpächter die Neubauten herstellen lässet, dagegen vom Pächter die Verzinsung des Kapitales mit 4 Prozent und die Bestreitung der Unterhaltskosten der Gebäude mit 1 Prozent, zusammen mit 5 Prozent verlangt: Wie verteilt sich dann der sub 1 berechnete Endwert des jährlichen Pachtzinses einerseits auf die Gebäude- und andererseits auf die Landnutzung?

3. Wie würden sich in Anwendung des also gegebenen Maßstabes die beiderseitigen Ansprüche gestalten, wenn der Pächter die Kosten des Neubau's und des jährlichen Unterhalts desselben, letztere wiederum mit 1 Prozent, übernimmt?

Über diese Fragen soll rechnerische Auskunft gegeben werden. (Bruchteile von Mark außer Betracht.)

A. Ad 1. Der Endwert der jährlichen Pachtzinsen wird nach 20 Jahren (Formel XII) betragen:

$$\frac{4\,500 \times (1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04}$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333\,(4)$
$\log. 1{,}04^{20} = 0{,}3406668$
$\text{num.}\log. 1{,}04^{20} = 2{,}1911231$
$\text{num.}\log. 1{,}04^{20} - 1 = 1{,}1911231$
$\log. 1{,}04^{20} - 1 = 0{,}0759566$[1]
$\log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$[1]

$\log. 4\,500 = 3{,}6532125$
$+\log.(1{,}04^{20} - 1) = 0{,}0759566$
$3{,}7291691$
$-\log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$
$5{,}1271091$
num. = ... **134001 M.**

Ad 2. Die Nutzung des Gebäude-Kapitales erfordert — abgesehen von der Erneuerungsquote — einen Jahresaufwand von $\frac{37\,500}{100} \times 5 = 1\,875$ Mark, welche in 20 Jahren gemäß der Formel XII anwachsen auf:

$$\frac{1\,875 \times (1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04}$$

[1]) Die hier vorgeführten logarithmischen Hilfszahlen sind auch in den unter pos. 3 anschließenden Begleit-Aufgaben anzuwenden. Übrigens kann man sich für letztere noch eine Erleichterung verschaffen, indem man entweder die beiden konkurrierenden Logarithmen 0,0759566 und 0,6020600 — 2 von einander subtrahiert und die Differenz = 1,4738966 zu dem Logarithmus der Raten addiert, oder auch, indem man nur die Potenz $1{,}04^{20}$ logarithmisch ermittelt und dann sich des direkten Verfahrens bedient (vgl. die Bemerkung zu Aufgabe 76). In letzterem Falle wäre nur der num. log. $1{,}04^{20} - 1 = 1{,}1911231$ durch 0,04 zu dividieren und der Quotient = 29,77808 zu benutzen, um in den Vergleichs-Rechnungen einfach durch Multi-

Die abgekürzte Rechnung (vgl. die Fußnote) ergibt:
$1875 \times 29,77808 =$ . . . . 55 834 M.
Oder, in Anwendung einer Proportion:
$45 : 18,75 = 134001 : x; \; x = 55834$ M.

Nach Abzug der Kosten der Gebäudenutzung von dem auf 4 500 Mark berechneten Pachtzinse verbleiben von diesem noch 4 500 — 1 875 = 2 625 Mark, welche ihrerseits nach 20 Jahren einen Endwert erreichen von:

$$\frac{2625 \times (1,04^{20} - 1)}{0,04}$$

$= 2625 \times 29,77808 =$ . . . . 78 167 „
Oder, nach dem vorliegenden Verhältnisse:
$45 : 26,25 = 134001 : x; \; x = 78167$ M.

Zusammen: **134 001** M
(wie oben).

Ad 3. Angenommen, der Pächter übernehme die Neubaukosten, so hat man zunächst deren Nachwert am Schlusse des 20ten Jahres festzustellen. Der Betrag desselben ist nach Formel I:

$$37500 \times 1,04^{20}$$

Das macht: $\log. 37500 = 4,5740313$
$+ \log. 1,04^{20} = 0,3406668$
$4,9146981$
num. = ... 82 167 M.

Hierzu kommt aber noch der jährliche Aufwand für den Unterhalt der Gebäude mit 1 Prozent = 375 Mark, deren Endwert am gleichen Zeitpunkte sich beläuft auf:

$$\frac{375 \times (1,04^{20} - 1)}{0,04}$$

$= 375 \times 29,77808 =$ . . . . 11 167 „
Oder, nach der Proportions-Rechnung:
$45 : 3,75 = 134001 : x; \; x = 11167$ M.

Zusammen: **93 334** M.

Die Endwerte der Aufwendungen, welche der Pächter macht, betragen also weniger, als diejenigen der Pachtzinsen, welche der Besitzer bei vollständiger Ausstattung des Gutes mit Gebäuden zu beziehen hat:

134 001 — 93 334 = 40 667 Mark.

Dieser Minderbetrag entspricht aber gemäß der Formel XII. b. einer jährlichen Ratenzahlung von:

$$\frac{40667 \times 0,04}{1,04^{20} - 1}.$$

plikation desselben mit der Jahresrate das gesuchte Kapital zu bestimmen. Unter den gegebenen Voraussetzungen kann außerdem auch die Proportions-Rechnung herangezogen werden.

für welche sich somit ergeben:

$$
\begin{aligned}
\log. 40\,667 &= 4{,}6092421 \\
+ \log. 0{,}04 &= 0{,}6020600 - 2 \\
&\overline{3{,}2113021} \\
- \log. 1{,}04^{20} - 1 &= 0{,}0759566 \\
&\overline{3{,}1353455} \\
\text{num.} &= \mathbf{1\,366}\ \text{Mark (rund).}
\end{aligned}
$$

Und dies ist der Betrag, bis auf welchen der jährlich zu zahlende Pachtzins **herabgesetzt** werden müßte.

Anmerkung. Die hier im Sinne der Wilke'schen Betrachtungsweise ausgeführte Rechnung ließe sich nun allerdings wesentlich vereinfachen, derart, daß an Stelle der Prolongation der konkurrierenden Beträge von deren Vorwert ausgegangen und schließlich (zur Frage 3) nur die jährliche Rate ermittelt wird, welche die innerhalb der Pachtzeit zu vollziehende Amortisation des Gebäudekapitales erfordert. Auf diesem Wege gelangt man (unter Ausschaltung der nicht mehr zu behandelnden Frage 1) zu folgendem Ergebnisse:

2. Der im Falle der vollständigen Ausstattung des Gutes mit Gebäuden erzielbare jährliche Pachtpreis berechnet sich auf . . . . . . 4 500 Mark
   Werden die Kosten der Herstellung der Bauten vom Verpächter aufgebracht, so hat derselbe alljährlich an Zinsen und Unterhaltsaufwand zu berechnen: 37 500 × 0,05 = ... 1 875 „
   Es verbleiben also für die Landpacht i. e. S.: **2 625** Mark

3. Übernimmt der Pächter vorlagsweise die Kosten der Neubauten und dann diejenigen des Aufwandes für deren Unterhaltung, so umfassen seine Entschädigungs-Ansprüche p. Jahr:

   a) Amortisation des Anlage-Kapitals von 37 500 Mark (Formel XII. b.):

$$r = \frac{37\,500 \times 1{,}04^{20} \times 0{,}04}{1{,}04^{20} - 1} = \frac{1500 \times 1{,}04^{20}}{1{,}04^{20} - 1} = \frac{1500 \times 2{,}191}{1{,}191} = \frac{3286{,}50}{1{,}191} = 2\,759 \text{ Mark}$$

   b) Jährliche Kosten des Unterhalts der Gebäude à 1 Prozent = . 375 „
   Zusammen: **3 134** Mark.

Somit vermindert sich der jährliche Pachtzins auf 4 500 — 3 134 = **1 366** Mark (w. o.).

156. Es hat Jemand eine Schuld von 22 500 Mark mit der Verpflichtung übernommen, dieselbe durch halbjährliche Ratenzahlungen von je 600 Mark zu verzinsen und zu amortisieren. Für die ersten 9 Jahre ist ein Zinsfuß von $3\frac{1}{2}$ Prozent, für die Folgezeit aber von $4\frac{1}{2}$ Prozent vereinbart. Der Schuldner will die Tilgungsfrist abkürzen, indem er mit Ablauf der 9 Jahre einen so großen Teil des Kapitales zurückzahlt, daß ihm die Pflicht zur Entrichtung der halbjährlichen Raten nur noch für weitere 12 Jahre verbleibt. Wie groß wird dann der Betrag der Abzahlung an jenem Zeitpunkte sein müssen?

A. Geht man davon aus, daß, wenn eine völlige Abtragung des Schuldkapitales stattfindet, dessen Barwert gleich demjenigen aller Ratenzahlungen ist, daß es aber im gegebenen Falle eines Minderbetrages der letzteren darauf ankommen muß, diesen festzustellen und dann auf den Zeitpunkt des zu leistenden Zuschusses zu beziehen (prolongieren), so ist ersichtlich, daß die vorliegende Aufgabe sich in mehrere, rechnungsmäßig zu beantwortende Fragen gliedert. Sie lauten:

1. Wie hoch beläuft sich der Barwert der Raten von je 600 Mark für:
   a) Die erste Reihe, zahlbar in 9 Jahren an 18 halbjährlichen Terminen, Zinsfuß $3^1/_2$ Prozent (Formel XII. a.)?
   b) Die zweite Reihe, zahlbar in 12 Jahren an 24 halbjährlichen Terminen. Zinsfuß $4^1/_2$ Prozent, bezogen (diskontiert) auf den 9 Jahre zurückliegenden Zeitpunkt der Übernahme der Schuld, Zinsfuß $3^1/_2$ Prozent (Formeln XII. a. und II.)?
2. Wieviel beträgt die Summe der also berechneten Barwerte weniger als die Schuld von 22500 Mark?
3. Auf welche Summe wird dieser Minderbetrag bis zum Ablauf der ersten 9 Jahre anwachsen (Formel I)? (Behandlung der Aufgabe hinsichtlich der Jahresbruchteile nach dem gemeinüblichen Verfahren).

Ad 1. a)

$$a = \frac{600 \times [(1 + 0{,}0\tfrac{35}{2}^{2\times 9}) - 1]}{(1 + 0{,}0\tfrac{35}{2}^{2\times 9}) \times 0{,}0\tfrac{35}{2}} = \frac{600 \times (1{,}0175^{18} - 1)}{1{,}0175^{18} \times 0{,}0175}$$

$\log. 1{,}0175 = 0{,}0075344$
$\log. 1{,}0175^{18} = \mathbf{0{,}1356912}$
$\text{num.log.}\, 1{,}0175^{18} = 1{,}3665302$
$\text{num.log.}\, 1{,}0175^{18} - 1 = 0{,}3665302$
$\log. (1{,}0175^{18} - 1) = \mathbf{0{,}5641095 - 1}$
$\log. 0{,}0175 = \mathbf{0{,}2430380 - 2}$

$\log. 600 = 2{,}7781513$
$+ \log. (1{,}0175^{18} - 1) = 0{,}5641095 - 1$
$2{,}3422608$

$\log. 1{,}0175^{18} = 0{,}1356192$
$+ \log. 0{,}0175 = 0{,}2430380 - 2$
$- 0{,}3786572 - 2$
$3{,}9636036$
$\text{num.} = 9196{,}10$
$a = \mathbf{9196{,}10}$ Mark.

Ad 1. b)

$$a_1 = \frac{600 \times [(1 + 0{,}0\tfrac{45}{2}^{2\times 12}) - 1]}{(1 + 0{,}0\tfrac{45}{2}^{2\times 12}) \times 0{,}0\tfrac{45}{2} \times 1{,}035^9} = \frac{600 \times (1{,}0225^{24} - 1)}{1{,}0225^{24} \times 0{,}0225 \times 1{,}035^9}$$ [1])

$\log. 1{,}0225 = 0{,}0096633$
$\log. 1{,}0225^{24} = \mathbf{0{,}2319192}$
$\text{num.log.}\, 1{,}0225^{24} = 1{,}7057651$
$\text{num.log.}\, 1{,}0225^{24} - 1 = 0{,}7057651$
$\log. (1{,}0225^{24} - 1) = \mathbf{0{,}8486602 - 1}$
$\log. 0{,}0225 = \mathbf{0{,}3521825 - 2}$
$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$
$\log. 1{,}035^9 = \mathbf{0{,}1344627}$

$\log. 600 = 2{,}7781513$
$+ \log. (1{,}0225^{24} - 1) = 0{,}8486602 - 1$
$2{,}6268115$

$\log. 1{,}0225^{24} = 0{,}2319192$
$+ \log. 0{,}0225 = 0{,}3521825 - 2$
$+ \log. 1{,}035^9 = 0{,}1344627$
$- 0{,}7185644 - 2$
$3{,}9082471$
$\text{num.} = 8095{,}56$
$a_1 = \mathbf{8095{,}56}$ Mark.

[1]) Der Barwert beläuft sich am Ende der ersten 9 Jahre auf 11033,40 Mark. Die Diskontierung desselben auf den Zeitpunkt der Übernahme der Schuld geschah hier, statt durch Aufstellung einer Sonderrechnung, durch Erweiterung des Divisors in der Formel um $1{,}035^9$.

Ad 2. Die Summe der beiden Barwerte a und a_1 ist 9 196,10 + 8 095,56 = 17 291,66 Mark. Das macht aber weniger als der Betrag der Schuld: 22 500 — 17 291,66 = 5 208,34 Mark.

Ad. 3. Dieser Minderbetrag wird nun mit Ablauf der ersten 9 Jahre einen Wert erreicht haben von: $5\,208{,}34 \times 1{,}035^9$ (Formel I). Das sind aber:

$$\begin{aligned} \log. 5\,208{,}34 &= 3{,}7166994 \\ + \log. 1{,}035^9 &= 0{,}1344627 \\ & 3{,}8511621 \\ \text{num.} &= \mathbf{7\,098{,}42} \text{ Mark.} \end{aligned}$$

Diese wären also am Ende der ersten 9 Jahre an den Gläubiger auszuzahlen.

Anmerkung. Soll die Probe auf die Richtigkeit der vorgeführten Rechnung gemacht werden, so hat man nur zu untersuchen, ob der mit Ablauf der ersten 9 Jahre noch restierende Betrag der Schuld durch die weiteren Ratenzahlungen von 600 Mark innerhalb eines Zeitraumes von genau 24 Halbjahren getilgt würde. Im vorliegenden Falle ergibt sich unter Berufung auf Formel X zunächst folgendes:

Das ursprüngliche Schuldkapital von 22 500 Mark wächst in den ersten 9 Jahren auf: $22\,500 \times 1{,}035^9 = 22\,500 \times 1{,}3629$ . . 30 665,25 Mark

Hiervon kommen in Abzug:

1. Der Wert der bis zum Abschlusse dieser Periode gezahlten Raten: $9\,196{,}10 \times 1{,}035^9 = 9\,196{,}10 \times 1{,}3629 =$ . . . 12 533,36 M.
2. Der Betrag der nach 9 Jahren geleisteten einmaligen Abzahlung (w. o.) . . . . 7 098,42 „

Zusammen: 19 631,78 „

Es bleiben also noch abzutragen: 11 033,47 Mark

Nun berechnet sich in der Tat der Vorwert der 24 Halbjahre laufenden Raten von 600 Mark (nach Formel XII. a) auf:

$$\frac{600 \times (1{,}0\tfrac{45}{2}^{24} - 1)}{1{,}0\tfrac{45}{2}^{24} \times 0{,}0\tfrac{45}{2}} = 11\,033{,}47 \text{ Mark (w. o.)}$$

Oder auch die Zahl der Halbjahre, innerhalb deren die Tilgung dieses Kapitales sich vollzieht (nach Formel XII. c) auf:

$$\frac{\log. 600 - \log. \left[600 - \left(11\,033{,}47 \times 0{,}0\tfrac{45}{2}\right)\right]}{\log. 1{,}0\tfrac{45}{2}} = 24.$$

157. Behufs Etablierung eines gewerblichen Unternehmens wird eine Schuld von 36 000 Mark kontrahiert. Dieselbe soll durch die auf 3 500 Mark veranschlagten jährlichen Reinerträge des Betriebes getilgt werden, indessen der Gläubiger an Zinseszinsen $4^1/_2$ Prozent beansprucht. Wenn nun jene Jahreserträge erst mit Ablauf von 4 Jahren, vom Zeitpunkte der Einrichtung des Unternehmens an gerechnet, regelmäßig wiederkehren: Nach wieviel Jahren wird dann die Schuld durch sie amortisiert werden?

A. In diesem Falle ist zu beachten, daß das ursprüngliche Schuldkapital von 36 000 Mark, da dasselbe während der ersten 4 Jahre keine Reinerträge abwirft, innerhalb dieses Zeitraumes um den Betrag der Zinseszinsen anwächst, und die dann einsetzende Amortisation sich auf den also vermehrten Fond beziehen muß. Hiernach erhält man zunächst für den Endwert des Kapitales nach 4 Jahren (Formel I):

$$A = 36\,000 \times 1{,}045^4$$
$$\log. 36\,000 = 4{,}5563025$$
$$+ \log. 1{,}045^4 = 0{,}0764652$$
$$4{,}6327677$$
$$\text{num.} = 42\,930{,}67 \text{ Mark.}$$

Die weitere Rechnung ergibt für die Zahl der Jahre n, während deren die Reinerträge diese Summe erreichen (Formel XII. c.):

$$n = \frac{\log. 3\,500 - \log. [3\,500 - (42\,930{,}67 \times 0{,}045)]}{\log. 1{,}045}$$
$$= \frac{\log. 3\,500 - \log. (3\,500 - 1\,931{,}88)}{\log. 1{,}045}$$
$$= \frac{\log. 3\,500 - \log. 1\,568{,}12}{\log. 1{,}045}$$
$$\log. 3\,500 = 3{,}5440680$$
$$- \log. 1\,568{,}12 = 3{,}1953794$$
$$0{,}3486886$$
$$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$$
$$n = \frac{3486886}{191163} = 18{,}24 \text{ Jahre (nahezu).}$$

Darnach ist aber die Zahl der Jahre, nach welchen das Schuldkapital getilgt sein wird: $18{,}24 + 4 = 22{,}24 = 22$ Jahre, 2 Monate und 27 Tage.

Anmerkung. Das hier dargelegte Verhältnis ließe sich übrigens auch durch Rückgriff auf die Formel XII nachweisen. Bezeichnet man nämlich die Zahl der Jahre, während deren das Kapital noch keine Reinerträge abwirft, mit m, und die Zahl der Jahre, während deren die Reinerträge bezogen werden, mit n, so ist der Endwert des Schuldkapitales nach m + n Jahren:

$$36\,000 \times 1{,}045^m \times 1{,}045^n$$

Denkt man sich nun die Tilgung vollzogen, so muß dieser Endwert gleich demjenigen aller Ratenzahlungen sein, und hat man dann:

$$36\,000 \times 1{,}045^m \times 1{,}045^n = \frac{3\,500 \times (1{,}045^n - 1)}{0{,}045}$$
$$36\,000 \times 0{,}045 \times 1{,}045^m \times 1{,}045^n = 3\,500 \times 1{,}045^n - 3\,500$$
$$3\,500 = 3\,500 \times 1{,}045^n - (36\,000 \times 0{,}045 \times 1{,}045^m \times 1{,}045^n)$$
$$3\,500 = [3\,500 - (36\,000 \times 0{,}045 \times 1{,}045^m)] \times 1{,}045^n$$
$$1{,}045^n = \frac{3\,500}{3\,500 - (36\,000 \times 0{,}045 \times 1{,}045^m)}$$
$$n = \frac{\log. 3\,500 - \log. [3\,500 - (36\,000 \times 0{,}045 \times 1{,}045^m)]}{\log. 1{,}045}$$
$$= \frac{\log. 3\,500 - \log. (3\,500 - 1\,931{,}88)}{\log. 1{,}045}$$
$$= \frac{\log. 3\,500 - \log. 1\,568{,}12}{\log. 1{,}045} = 18{,}24 \text{ Jahre.}$$

Und die Gesamtzahl der Jahre (m + n), nach welchen die Schuld getilgt sein wird: $18{,}24 + 4 = 22{,}24$ (wie oben).

Das nämliche Ergebnis würde man natürlich auch erhalten, wenn man von dem Barwerte ausgeht und demgemäß die Formel XII. a. anwendet. Es wäre somit anzusetzen:

$$36\,000 = \frac{3\,500 \times (1{,}045^n - 1)}{1{,}045^m \times 1{,}045^n \times 0{,}045}$$

In der weiteren Ausführung erhält man dann die gleiche Anzahl von Jahren (m + n).

Dritter Abschnitt.

Die Rentenrechnung.

A. Allgemeines.

Unter „Rente" begreift man im Allgemeinen jede in Geldwert ausgedrückte, nach bestimmten Zeitabschnitten (periodisch) wiederkehrende Einnahme. Die wirtschaftlichen und rechtlichen Grundlagen, auf welchen derartige Einnahmen beruhen, können jedoch noch sehr verschieden sein. In diesem Gesichtspunkte gliedern sich die Renten zunächst nach zwei Richtungen, und zwar in:

1. Renten, welche aus dem Betriebe je einzelner wirtschaftlicher Unternehmungen hervorgehen und sich als Erfolge planmäßigen Aufwandes von Erwerbsmitteln darstellen (Betriebsrenten), und

2. Renten, welche einzelnen Personen oder einer Gemeinschaft von Personen auf Grund von Kauf- oder Leih- bezw. Miet-Verträgen, Statuten, Stiftungen, Realrechten, gesetzlichen Bestimmungen usw. zufließen und somit besondere Beziehungen voraussetzen, in welchen sich die Rentenempfänger zu außerhalb stehenden Kreisen befinden. (Feste oder bedungene bezw. Vertrags-Renten.)

Hinsichtlich der ersteren Reihe ist zu beachten, daß der objektive Reinertrag eines Gewerbes in dem Überschusse des aus der kombinierten Wirkung von Güter- und Arbeitsvermögen innerhalb eines gegebenen Zeitabschnittes hervorgehenden Wertes der reproduzierten Sachgüter über den Wert der verbrauchten Sachgüter besteht. Da nun, wie das insbesondere für die Verhältnisse des Betriebes der Bodenkultur durch den Grundbesitzer zutrifft, das gewerbliche Unternehmen auf die Anwendung von immobilem Vermögen, von Betriebskapital und von Unternehmerarbeit angewiesen ist, so müssen in dem gesamten Reinertrage des Betriebes auch diese Erwerbsmittel anteilig vertreten sein. Ihre Anteile an dem Reinertrage sind aber Renten. Somit ist in dem jährlichen Reinertrage enthalten: Eine Grund- oder Boden- oder Landrente, oder — bezogen auf den Bestand an Grund und Boden einschließlich aller bautechnischen Anlagen —: eine Grundrente i. w. S. oder Gutsrente, sodann eine Rente von dem Betriebskapital, kurzweg Kapitalrente, und

eine Rente von der Unternehmerarbeit. Die Frage, wie gegebenen Falles der gesamte Reinertrag rechnerisch zu zerlegen, also die auf jedes der beteiligten Erwerbsmittel entfallende Quote desselben zu bestimmen sei, gehört der Betriebslehre an und muß daher an dieser Stelle unerörtert bleiben. Der objektive, je mehrere Renten umfassende Reinertrag eines Gewerbes deckt sich nicht regelmäßig mit dem Einkommen aus dem Betriebe. Bekanntlich kehren die Renten aus den einem wirtschaftlichen Unternehmen anvertrauten Erwerbsmitteln nicht in zeitlich durchweg gleichen Beträgen wieder, weil sie, abgesehen von der Art der Einrichtung und Leitung des Betriebes, unter dem Einflusse des Wechsels der äußeren Produktionsbedingungen und insbesondere der Marktlage stehen.

Ein wesentlich anderes Bild ergibt sich aus der Betrachtung der zweiten Reihe von Renten. Die Fälle, welche dem für diese aufgestellten allgemeinen Kriterium gemäß hierher zu zählen sind, kommen im Verkehrsleben sehr häufig vor. Zur Orientierung hierüber nur einige Beispiele:

Wenn der Eigentümer eines Grundstücks oder Landgutes dessen Nutzung auf eine bestimmte Reihe von Jahren verpachtet, so bezieht er in dem Pachtpreise eine Rente. Das Gleiche gilt für die Vermietung von gewerblichen Anlagen und von Wohngebäuden, für die Verpachtung von Wasserkräften, von Nebennutzungen aus Waldbeständen, von Jagdrechten usw. Auch die Einnahmen aus Aktien, Staatspapieren, sowie die regelmäßigen Bezüge von Zinsen aus nicht rückzahlbaren Kapitalien können unter den Begriff der Renten geordnet werden. Für den Fiskus haben die Einkünfte an Steuern, für die von ihrem Dienste zurücktretenden Beamten die Pensionen, für die Glieder einer Waldkorporation die Anteile an den Erträgen der Holznutzung, für den zehntberechtigten Gutsherrn die Bezüge von Naturalabgaben die Bedeutung von Renten. Ebenso haftet die Rentennatur an der Einnahme von Ratenzahlungen, welche regelmäßig zum Zwecke der Ablösung von dinglichen Rechten und von Servituten oder zur Tilgung von Darlehnskapitalien entrichtet werden.

In dem Rahmen derartiger Beziehungen taucht nun aber auch noch das besondere Vorkommen auf, daß Personen auf dem Vertragswege den Anspruch auf eine innerhalb eines bestimmten Zeitraumes oder während ihrer Lebensdauer regelmäßig nach gewissen Zeitabschnitten beziehbare Geld-Einnahme durch das Opfer einer einmaligen oder in bestimmten Raten erfolgenden Zahlung erwerben. (Rentenversicherung.) Derartige, durch die Lebensversicherungs- und Rentenanstalten auf Grund einer Gegenleistung (Mise) des Versicherungsnehmers garantierte Renten sind die sogenannten Lebens-, Leib- oder Altersrenten, auch wohl Renten i. e. S. oder eigentliche Renten genannt. Hierher gehört auch die Versicherung von Leibrenten mit Rückgewähr des um den Betrag der bezogenen Renten reduzierten Kapitales im Todesfalle, ebenso von Renten, welche für den Fall des Todes der Versicherten an überlebende Personen (beispielsweise behufs Versorgung von Witwen und Waisen) zahlbar werden.

Außerhalb der also gezogenen Grenzen wird indessen von der Rentenrechnung noch Gebrauch gemacht im Bereiche der Versicherung einer einmalig zu zahlenden Summe, sei es, daß dieselbe bei dem Tode des Versicherungsnehmers oder dann fällig wird, wenn dieser ein bestimmtes Alter

erreicht hat (Kapitalversicherung), insofern die regelmäßigen Prämien-Einnahmen als Renten aufgefaßt werden können, welche der Versicherungsgeber durch Übernahme der Garantie für die Kapitalzahlung bezieht. Und das Gleiche gilt selbstverständlich für jede Versicherung gegen die Gefahr von Einbußen an Güter- oder an Arbeitsvermögen, welche durch nicht vorherzusehende Begebenheiten entstehen können. (Feuer-, Hagel-, Vieh-, Hypotheken-, Transport-, Unfall- usw. Versicherung.)

Im übrigen kommen bei Rentenbezügen noch Unterschiede hinsichtlich der Zeitdauer überhaupt, der zeitlichen Verteilung der Empfangs-Termine und des gegenseitigen Verhältnisses der einzelnen Rentenbeträge vor. Erstrecken sich die Einkünfte, wie beispielsweise bei den Versicherungen, über bestimmt umschriebene Zeitgrenzen bezw. eine endliche Zahl von Jahren, so hat man es mit einer sog. *Zeit-* oder *Jahresrente*, anderen Falles, wenn dieselben, wie bei Nutzungen aus Grundbesitz, aus dinglichen Rechten (Zehnten, Grundzinsen usw.) und Aktiv-Servituten bezw. auch deren (nicht amortisablen) Ablösungen, für eine nicht abgemessene, also eine unbegrenzte Reihe von Jahren erfolgen, mit einer *immerwährenden* oder *ewigen* Rente zu tun. Je nachdem die Bezüge am Anfange oder am Ende der festgesetzten Zeitabschnitte erfolgen, nennt man die Renten *vorschüssige* oder *nachschüssige*. Der Rentenlauf kann unmittelbar nach dem Abschlusse eines Übereinkommens beginnen, oder auch erst später nach einer bestimmten Zeitfrist einsetzen. In letzterem Falle spricht man von einer *aufgeschobenen* Rente. Unter sonst gleichen Bedingungen kommen aber auch noch Unterschiede in der Dauer der Zeitabschnitte vor, nach welchen die Ratenzahlungen fällig werden. So hat man *Monats-*, *Vierteljahres-*, *Halbjahres-*, *Jahres-* und *mehrjährliche Termine*. Die bedungenen Renten kehren zwar in der Großzahl der Fälle in *gleichen (konstanten)* *Beträgen* wieder. Doch gibt es in dieser Beziehung auch Ausnahmen, derart, daß der Betrag der Einzelzahlungen *zeitlich gleichmäßig, progressiv oder regressiv, abändert*.

Wie aus den einleitenden Bemerkungen zu der Rubrik b des Abschnitts 2 der Zinseszinsrechnung (S. 35) und im weiteren Verlaufe aus der Entwicklung der Formeln XII – XIII (S. 62 – 65) hervorgeht, sind die kalkulatorischen Grundlagen der Zinseszinsrechnung in mehrfacher Hinsicht auch auf das Verfahren der Rentenrechnung übertragbar, und tatsächlich können manche Aufgaben, welche dieser angehören, ohne weiteres durch Heranziehung bereits bekannter Formeln behandelt werden. Jedenfalls haben Kenntnis und Übung in der Zinseszinsrechnung die Bedeutung von Beihilfen, aus welchen die Rentenrechnung wesentliche Erleichterungen schöpft. Die nunmehr folgenden, durch Beispiele ergänzten Erörterungen werden die Richtigkeit dieser Betrachtung bestätigen.

B. Die Zeitrenten.

Das Verfahren.

1. Entwicklung der Formeln.[1])

a) Jahresrenten.

aa) Nachschüssige.

Um die nächstliegende Frage zu beantworten, wie sich der End- oder Nachwert A berechnet, bis auf welchen die Raten r einer durch n Jahre laufenden nachschüssigen Rente mit Einbeziehung der Zinseszinsen von p Prozent anwachsen, wird man einfach an die Darlegungen anknüpfen können, welche zur Entwicklung der Formel VIII der Zinseszinsrechnung (S. 54 und 55) geführt haben. Dort wurde bereits gezeigt, wie in dem Verlaufe der Wertbewegung zeitlich gleichmäßig wiederkehrender Einnahme-Zuschüsse eine geometrische Progression zum Ausdruck kommt. Setzt man in dieser für den Quotienten 1,0p die Bezeichnung q ein, so erhält man:

$$A = r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + r \cdot q^{n-3} + \ldots\ldots + r \cdot q^2 + r \cdot q + r$$

Und in umgekehrter Reihenfolge geschrieben:

$$A = r + r \cdot q + r \cdot q^2 + \ldots\ldots + r \cdot q^{n-3} + r \cdot q^{n-2} + r \cdot q^{n-1}$$

Nach den Ausführungen zu den Formeln VI und VII ergibt sich aber für den summarischen Wert der Glieder dieser Reihe:

$$\left.\begin{array}{l} A = \dfrac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex] A = \dfrac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \text{XIV. (XII.)}$$

Aufgaben 158 und 159.

Genau übereinstimmend mit der Formel XII.

Handelt es sich darum, den Bar- oder Vorwert a festzustellen, welchen die Raten r einer n Jahre hindurch zu beziehenden Rente bei Anrechnung der Zinseszinsen von p Prozent besitzen, so kann man, wie es bei der Entwicklung der Formeln-Reihe XII (S. 63) geschehen, das Verfahren der Ableitung aus der ersten Gleichung anwenden, indem man davon ausgeht, daß der auf Zinseszinsen anstehende Barwert a in der gleichen Zahl von Jahren und bei dem gleichen Zinsfuße auf die nämliche Summe A anwächst, wie die je am Ende der einzelnen Jahre fälligen Raten r mit ihren Zinseszinsen. Da nun dieser Endwert A gemäß der Formel I $= a \cdot q^n$ bezw. $a \cdot 1{,}0p^n$, und der ihm gleiche Wert der Raten nach der obigen Formel XIV $= \dfrac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ bezw. $\dfrac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$ ist, so ergibt sich:

[1]) Im Hinblick auf die strikte gegenseitige Abgrenzung der hier in Betracht kommenden Fälle ist der nachfolgenden Übersicht — in mehrfacher Beziehung abweichend von der mehr zusammenhängenden Darstellung in der Rubrik C der Zinseszinsrechnung — von vornherein eine die Orientierung erleichternde, in besonderen Überschriften zum Ausdruck gebrachte Gliederung zu Grunde gelegt worden.

$$\left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{r \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)} \\ a = \dfrac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p} \end{array}\right. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{XIV. a (XII. a.)}$$[1] *Aufgaben 163 und 164.*

Durchaus gleichlautend mit der Formel XII. a.

Auf Grund der Formel XIV ist man nun auch weiter im Stande, von den konkurrierenden vier Größen, wenn deren drei, und zwar entweder a, q (1,0p) und n, oder aber a, q (1,0p) und r gegeben sind, je die vierte, also r oder n, zu bestimmen. Anleitung hierzu gibt das Verfahren, welches bei Behandlung der Formeln-Reihe XII (S. 63, Fußnote) beobachtet wurde. Darnach erhält man in Übereinstimmung mit den Formeln XII. b. und XII. c.:

$$\left\{\begin{array}{l} r = \dfrac{a \cdot q^n \cdot (q - 1)}{q^n - 1} \\ r = \dfrac{a \cdot 1{,}0p^n \cdot 0{,}0p}{1{,}0p^n - 1} \end{array}\right. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{XIV. b. (XII. b.)}$$[2] *Aufgaben 167 und 168.*

---

[1]) Will man die gesuchte Gleichung, statt sie aus der Formel XIV abzuleiten, direkt auf Grundlage einer Progression konstruieren, so ist folgendes zu beachten: Es ist der Barwert:

Der am Ende des ersten Jahres fälligen Rate $= \dfrac{r}{1{,}0p}$;

der „ „ „ zweiten „ „ „ $= \dfrac{r}{1{,}0p^2}$,

„ „ „ „ dritten „ „ „ $= \dfrac{r}{1{,}0p^3}$ usw.

Und am Schlusse der Bezugsperiode beläuft sich die vorvorletzte Rate auf $\dfrac{r}{1{,}0p^{n-2}}$, die vorletzte auf $\dfrac{r}{1{,}0p^{n-1}}$, und die letzte auf $\dfrac{r}{1{,}0p^n}$. Bezeichnet man der Abkürzung willen den Quotienten $\dfrac{1}{1{,}0p}$ mit $\dfrac{1}{q}$, so gestaltet sich die Reihe also:

$$a = \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \frac{r}{q^3} + \ldots\ldots + \frac{r}{q^{n-2}} + \frac{r}{q^{n-1}} + \frac{r}{q^n}.$$

Die Summe aller Glieder derselben ist gemäß den Darlegungen zu den Formeln VI und VII:

$$a = \frac{\left(\dfrac{r}{q^n} \cdot \dfrac{1}{q}\right) - \dfrac{r}{q}}{\dfrac{1}{q} - 1},$$

eine Gleichung, welche sich noch weiter zusammenziehen lässet und dann — da $\dfrac{r}{q^n} \cdot \dfrac{1}{q} = \dfrac{r}{q^{n+1}}$, ferner $\dfrac{r}{q^{n+1}} - \dfrac{r}{q} = \dfrac{r - r \cdot q^n}{q^{n+1}}$, und $\dfrac{1}{q} - 1 = \dfrac{1 - q}{q}$ — ergibt:

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{(q - 1) \cdot q^n} \text{ (wie oben).}$$

[2]) Hinsichtlich der praktischen Verwertung dieser Formel ist daran zu erinnern, daß man dieselbe ohne weiteres auch auf die Fälle übertragen kann, in welchen der End- oder der Nachwert A der betreffenden Rente gegeben ist, indem dieser einfach

$$\left\{\begin{array}{l} n = \dfrac{\log. r - \log. [r - a.(q-1)]}{\log. q} \ldots\ldots \\ n = \dfrac{\log. r - \log. [r - (a.0{,}0p)]}{\log. 1{,}0p} \ldots\ldots \end{array}\right\}$$ XIV. c. (XII. c.) *Aufgaben 172 und 173.*

bb) Vorschüssige.

Durchaus analog den seitherigen Nachweisen gestalten sich diejenigen für Renten, deren Raten am Anfange eines jeden Jahres fällig werden.

Um vorerst zu zeigen, wie sich der End- oder Nachwert A einer unter sonst gleichen Bedingungen laufenden vorschüssigen Rente ermittelt, wird man auf die Darlegungen Bezug nehmen können, welchen die Aufstellung der Formel XI (S. 60—61) zu Grunde liegt. Darnach würde die Progression in Betracht kommen:

$$A = r.q^n + r.q^{n-1} + r.q^{n-2} + \ldots + r.q^3 + r.q^2 + r.q$$

In umgekehrter Reihenfolge:

$$A = r.q + r.q^2 + r.q^3 + \ldots + r.q^{n-2} + r.q^{n-1} + r.q^n$$

Wird nach der Formel VI (S. 51—52) summiert, so erhält man:

$$A = \frac{(r.q^n.q) - r.q}{q-1}, \text{ oder:}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{r.q.(q^n - 1)}{q-1} \ldots\ldots \\ A = \dfrac{r.1{,}0p.(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \ldots\ldots \end{array}\right\}$$ XV. (XIII.) *Aufgaben 160—162.*

Gleichlautend mit der Formel XIII.

Hinsichtlich der Bestimmung des Bar- oder Vorwertes a ist zu beachten, daß sich derselbe aus der vorstehenden Gleichung gemäß dem zur Formel XIV. a. angegebenen Verfahren ableiten lässet, indem man an Stelle von A den gleichwertigen Ausdruck $a.q^n$ bezw. $a.1{,}0p^n$ einsetzt. Woraus dann folgt:

$$\left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{r.(q^n - 1)}{q^{n-1}.(q-1)} \ldots\ldots \\ a = \dfrac{r.(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1}.0{,}0p} \ldots\ldots \end{array}\right\}$$ XV. a. (XIII. a.)[1] *Aufgaben 165 und 166.*

Übereinstimmend mit Formel XIII. a.

---

an die Stelle des ihm gleichwertigen Ausdrucks $a.q^n$ bezw. $a.1{,}0p^n$ gesetzt wird. (Vgl. hierzu die Aufgaben 130 und 131 der Zinseszinsrechnung.)

[1] Wird jedoch verlangt, daß das Verhältnis direkt mittelst Heranziehung der Progression zur Darstellung gebracht werde, so hat man sich zu vergegenwärtigen, daß die Gestaltung der Reihe, weil eben die Raten schon je am Jahresanfang fällig werden, mit dem Gliede r beginnt und mit dem Gliede $\frac{r}{q^{n-1}}$ abschließt, im Übrigen

Ebenso ergibt sich auf dem oben bereits näher bezeichneten Wege:

$$r = \frac{a \cdot q^n \cdot (q - 1)}{q \cdot (q^n - 1)} \quad \ldots \ldots \ldots$$
$$r = \frac{a \cdot 1{,}0p^n \cdot 0{,}0p}{1{,}0p \cdot (1{,}0p^n - 1)} \quad \ldots \ldots \ldots$$

XV. b. (XIII. b.)[1] *Aufgaben 169—171.*

$$n = \frac{\log. r - \log. [r \cdot q - a \cdot (q - 1)]}{\log. q} + 1 \quad \ldots$$
$$n = \frac{\log. r - \log. (r \cdot 1{,}0p - a \cdot 0{,}0p)}{\log. 1{,}0p} + 1 \quad \ldots$$

XV. c. (XIII. c.)[2] *Aufgaben 174 und 175.*

---

aber genau derjenigen des Falles aa (vgl. Fußnote zur Formel XIV. a. S. 143) gleich ist. Darnach hat man bei einem Quotienten von $\frac{1}{q}$:

$$a = r + \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \ldots + \frac{r}{q^{n-3}} + \frac{r}{q^{n-2}} + \frac{r}{q^{n-1}}.$$

Und wenn man die rechtsseitigen Glieder der Gleichung nach Formel VII. summiert:

$$a = \frac{\left(\frac{r}{q^{n-1}} \cdot \frac{1}{q}\right) - r}{\frac{1}{q} - 1},$$

woraus man nach weiterer Reduktion erhält:

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{n-1} \cdot (q - 1)} \quad \text{(wie oben).}$$

[1]) S. Fußnote [2] S. 143/144.

[2]) 1. Gleichwertig mit der Formel XV. c. ist gemäß der Fußnote zu XIII. c. (S. 65) die Gleichung:

$$n = \frac{\log\ r \cdot q - \log. [r \cdot q - a \cdot (q - 1)]}{\log. q}$$

Eine andere Art der Auslösung ist folgende:

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{n-1} \cdot (q - 1)}$$
$$a \cdot q^{n-1} \cdot (q - 1) = r \cdot (q^n - 1)$$
$$a \cdot q^{n-1} \cdot (q - 1) = r \cdot q^n - r$$
$$a \cdot q^n \cdot q^{-1} \cdot (q - 1) - r \cdot q^n \quad = - r$$
$$q^n \cdot [a \cdot q^{-1} \cdot (q - 1) - r] = - r$$
$$q^n \cdot \left[\frac{a \cdot (q - 1)}{q} - r\right] = - r$$
$$q^n = \frac{- r}{\frac{a \cdot (q - 1)}{q} - r}$$
$$n = \frac{\log. r - \log. \left[r - \frac{a \cdot (q - 1)}{q}\right]}{\log\ q}$$

2. Ist statt des Anfangswertes a der Nachwert A gegeben, so deckt sich das Verfahren mit der Anwendung der Sparkassen-Formel XIII. c_1 (S. 65). — Vid. die Aufgabe 146.

b) Renten, deren Raten je an bestimmten Teilabschnitten des Jahres fällig sind.

Die seither zur Darstellung gebrachten Gleichungen XIV und XV ändern im Grunde genommen nur wenig ab, wenn der Fall vorliegt, daß die Raten einer Zeitrente am Ende oder am Anfange je eines bestimmten Teilabschnittes oder Bruchteils des Jahres (statt je eines ganzen Jahres) einlaufen. Worin die Abweichungen bestehen, kann aus den Erörterungen zur Aufgabe 33 der Zinseszinsrechnung (S. 19) ersehen werden. Im Übrigen soll es sich hier nur um das gemeinüblich angewandte, wenn auch, wie a. a. O. gezeigt wurde, den strengsten Anforderungen an Genauigkeit nicht entsprechende Verfahren handeln.

Bezeichnet man den in Betracht kommenden Bruchteil des Jahres — wie z. B. $^1/_{12}$ — $^1/_4$ — $^1/_2$ usw. — mit $\frac{1}{m}$, und die Zahl der Jahre, während deren die Rente bezogen wird, mit n, so ist die Zahl der innerhalb dieses Zeitraumes überhaupt fälligen Raten $= m \,.\, n$. Der auf den Jahresbruchteil bezogene Zinsfaktor, welcher die Benennung $q_{\prime}$ führen soll, wird dann bei einem Zinsfuße p gleichbedeutend mit $1{,}0\frac{p}{m}$.

Überträgt man nun die Formeln XIV und XV auf dieses Verhältnis, so hat man:

aa) Nachschüssige.

$$A = \frac{r \,.\, (q_{\prime}^{m.n} - 1)}{q_{\prime} - 1} \qquad A = \frac{r \,.\, (1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1)}{0{,}0\frac{p}{m}}$$

XVI. *Aufgaben 176 und 177.*

$$a = \frac{r \,.\, (q_{\prime}^{m.n} - 1)}{q_{\prime}^{m.n} \,.\, (q_{\prime} - 1)} \qquad a = \frac{r \,.\, (1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1)}{1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} \,.\, 0{,}0\frac{p}{m}}$$

XVI. a. *Aufgaben 180 und 181.*

$$r = \frac{a \,.\, q_{\prime}^{m.n} \,.\, (q_{\prime} - 1)}{q_{\prime}^{m.n} - 1} \qquad r = \frac{a \,.\, 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} \,.\, 0{,}0\frac{p}{m}}{1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1}$$

XVI. b. *Aufgaben 184 und 185.*

$$n = \frac{\log. r - \log. [r - a \,.\, (q_{\prime} - 1)]}{\log. q_{\prime}} \,.\, \frac{1}{m} \qquad n = \frac{\log. r - \log. [r - (a \,.\, 0{,}0\frac{p}{m})]}{\log. 1{,}0\frac{p}{m}} \,.\, \frac{1}{m}$$

XVI. c. *Aufgaben 188 und 189.*

bb) Vorschüssige.

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{r \cdot q_p \cdot (q_p^{m \cdot n} - 1)}{q_p - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \\ A &= \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m} \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{\,m \cdot n} - 1\right)}{0{,}0\frac{p}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{XVII.}$$

Aufgaben 178 und 179.

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{r \cdot (q_p^{m \cdot n} - 1)}{q_p^{m \cdot n - 1} \cdot (q_p - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots \\ a &= \frac{r \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{\,m \cdot n} - 1\right)}{1{,}0\frac{p}{m}^{\,m \cdot n - 1} \cdot 0{,}0\frac{p}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{XVII. a.}$$

Aufgaben 182 und 183.

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{a \cdot q_p^{m \cdot n} \cdot (q_p - 1)}{q_p \cdot (q_p^{m \cdot n} - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots \\ r &= \frac{a \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{\,m \cdot n} \cdot 0{,}0\frac{p}{m}}{1{,}0\frac{p}{m} \cdot \left(1{,}0\frac{p}{m}^{\,m \cdot n} - 1\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{XVII. b.}$$

Aufgaben 186 und 187.

$$\left.\begin{aligned} n &= \left(\frac{\log. r - \log. [r \cdot q_p - a \cdot (q_p - 1)]}{\log. q_p} + 1\right) \cdot \frac{1}{m} \quad \ldots \\ n &= \left(\frac{\log. r - \log. \left[r \cdot 1{,}0\frac{p}{m} - \left(a \cdot 0{,}0\frac{p}{m}\right)\right]}{\log. 1{,}0\frac{p}{m}} + 1\right) \cdot \frac{1}{m} \quad . \end{aligned}\right\} \text{XVII. c.}^{1)}$$

Aufgaben 190 und 191.

c) Renten, deren Raten in Zwischenräumen von je mehreren Jahren fällig sind. (Aussetzende Renten.)

aa) Nachschüssige.

Handelt es sich um den Nachweis des End- oder Nachwertes A, bis auf welchen die Raten r einer nachschüssigen, je nach b Jahren fälligen Rente bei q Prozent Zinsen in n Jahren anwachsen, so hat man analog dem zur Aufgabe 147 (S. 126) dargelegten Verfahren von einer Progression auszugehen, deren Quotient $= q^b$ ist, und somit lautet:

$$A = r \cdot q^{n-b} + r \cdot q^{n-2b} + r \cdot q^{n-3b} + \ldots\ldots + r \cdot q^{2b} + r \cdot q^{b} + r$$

Rückwärts gelesen:

$$A = r + r \cdot q^{b} + r \cdot q^{2b} + \ldots\ldots + r \cdot q^{n-3b} + r \cdot q^{n-2b} + r \cdot q^{n-b}$$

---

1) Eine gleichwertige Formel ist:

$$n = \frac{\log. r \cdot q_p - \log. [r \cdot q_p - a \cdot (q_p - 1)]}{\log. q_p} \cdot \frac{1}{m}$$

Wird nun nach Formel VII summiert, so erhält man:

$$A = \frac{(r \cdot q^{n-b} \cdot q^b) - r}{q^b - 1}, \text{ oder:}$$

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^b - 1} \ldots \ldots \ldots \\ A &= \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^b - 1} \ldots \ldots \ldots \end{aligned} \right\} \text{XVIII. } \textit{Aufgabe 192.}$$

Um aber den Bar- oder Vorwert a der unter gleichen Bedingungen laufenden Rente zu ermitteln, wird man gemäß dem zur Formel XIV dargelegten Verfahren einfach den Weg der Ableitung aus der Gleichung XVIII verfolgen können, indem man an Stelle des Endwertes A den ihm gleichwertigen Ausdruck $a \cdot q^n$ bezw. $a \cdot 1{,}0p^n$ einsetzt. Man erhält dann:

$$\left\{ \begin{aligned} a &= \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q^b - 1)} \ldots \ldots \ldots \\ a &= \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \cdot (1{,}0p^b - 1)} \ldots \ldots \ldots \end{aligned} \right\} \text{XVIII. a.[1] } \textit{Aufgabe 194.}$$

Anmerkung. Trifft es sich, daß die Zahl der n Jahre durch diejenige der b Jahre nicht ohne Rest geteilt werden kann, so ermittelt man in der bereits bekannten Weise den End- oder Nachwert A bezw. den Bar- oder Vorwert a zunächst für den Zeitpunkt, da die letzte Rate fällig wird, und berechnet dann im einen Falle den Betrag, bis auf welchen der gefundene Endwert in der noch ausstehenden (weniger als b Jahre umfassenden) Zeit anwächst, im anderen Falle aber den Barwert des auf den Rest der n Jahre entfallenden Ratenbezuges, und addiert denselben zu demjenigen, welcher sich für die geschlossene Reihe der Raten ergibt.

Dieses Verfahren ist unter sonst gleichen Voraussetzungen auch auf die vorschüssigen Renten der gegebenen Rubrik anzuwenden.

---

[1]) Die Richtigkeit dieses Ergebnisses ist übrigens gleichfalls auf dem Wege der direkten Ermittlung nachzuweisen, wenn man von der Aufstellung der betreffenden Progression mit dem Quotienten $\frac{1}{q^b}$ ausgeht. Dieselbe gestaltet sich nämlich, wie folgt:

$$a = \frac{r}{q^b} + \frac{r}{q^{2b}} + \frac{r}{q^{3b}} + \ldots + \frac{r}{q^{\frac{n-2b}{b} \cdot b}} + \frac{r}{q^{\frac{n-b}{b} \cdot b}} + \frac{r}{q^{\frac{n}{b} \cdot b}}$$

$$= \frac{r}{q^b} + \frac{r}{q^{2b}} + \frac{r}{q^{3b}} + \ldots + \frac{r}{q^{n-2b}} + \frac{r}{q^{n-b}} + \frac{r}{q^n}$$

In Anwendung des bekannten Verfahrens der Summierung (Formel VII) ergibt sich hieraus:

$$a = \frac{\frac{r}{q^n} \cdot \frac{1}{q^b} - \frac{r}{q^b}}{\frac{1}{q^b} - 1},$$

eine Gleichung, welche sich wiederum zusammenziehen lässet in:

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q^b - 1)} \text{ (wie oben).}$$

Aus der Formel XVIII. a. ergibt sich aber nach dem wiederholt dargelegten Verfahren der Ableitung weiter:

$$r = \frac{a \cdot q^n \cdot (q^b - 1)}{q^n - 1} \quad \ldots\ldots$$

$$r = \frac{a \cdot 1{,}0p^n \cdot (1{,}0p^b - 1)}{1{,}0p^n - 1} \quad \ldots\ldots$$

XVIII. b.
Aufgabe 196.

$$n = \frac{\log. r - \log. [r - a \cdot (q^b - 1)]}{\log. q} \quad \ldots\ldots$$

$$n = \frac{\log. r - \log. [r - a \cdot (1{,}0p^b - 1)]}{\log. 1{,}0p} \quad \ldots\ldots$$

XVIII. c.
Aufgabe 198.

bb) Vorschüssige.

Um den End- oder Nachwert A einer unter sonst gleichen Bedingungen laufenden vorschüssigen Rente zu berechnen, wird man, wie bei dem Verfahren sub aa die betreffende Progression, und zwar mit dem Quotienten q^b, heranzuziehen haben. Dieselbe lautet:

$$A = r \cdot q^n + r \cdot q^{n-b} + r \cdot q^{n-2b} + \ldots + r \cdot q^{3b} + r \cdot q^{2b} + r \cdot q^b$$

In umgekehrter Reihenfolge:

$$A = r \cdot q^b + r \cdot q^{2b} + r \cdot q^{3b} + \ldots + r \cdot q^{n-2b} + r \cdot q^{n-b} + r \cdot q^n$$

Wird diese Reihe nach der Formel VI oder VII summiert, so kommt:

$$A = \frac{r \cdot q^n \cdot q^b - r \cdot q^b}{q^b - 1}, \text{ oder:}$$

$$A = \frac{r \cdot q^b \cdot (q^n - 1)}{q^b - 1} \quad \ldots\ldots$$

$$A = \frac{r \cdot 1{,}0p^b \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^b - 1} \quad \ldots\ldots$$

XIX.
Aufgabe 193.

Auf dem Wege der Ableitung aus dieser Formel erhält man dann, wenn für den Endwert A der gleichwertige Ausdruck $a \cdot q^n$ eingestellt wird:

$$a = \frac{r \cdot q^b \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q^b - 1)}, \text{ oder:}$$

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{n-b} \cdot (q^b - 1)} \quad \ldots\ldots$$

$$a = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-b} \cdot (1{,}0p^b - 1)} \quad \ldots\ldots$$

XIX. a.[1]
Aufgabe 195.

---

[1]) Diese Gleichung kann auf dem bereits mehrfach erörterten Wege direkt in Anknüpfung an die geometrische Reihe entwickelt werden. Legt man nämlich den Quotienten $\frac{1}{q^b}$ zu Grunde, so hat man:

$$a = r + \frac{r}{q^b} + \frac{r}{q^{2b}} + \frac{r}{q^{3b}} + \ldots + \frac{r}{q^{n-3b}} + \frac{r}{q^{n-2b}} + \frac{r}{q^{n-b}}$$

Anmerkung. Liegt der Fall vor, daß die Zahl der n Jahre durch diejenige der b Jahre nicht ohne Rest teilbar ist, so kommt behufs Berechnung von A und von a das in der Anmerkung zur Formel XVIII. a angegebene Verfahren zur Anwendung.

Gemäß dem unter den vorausgegangenen Rubriken vorgeführten Nachweise ergibt sich nun ferner aus der Formel XIX. a.:

$$\left\{\begin{array}{l} r = \dfrac{a \cdot q^{n-b} \cdot (q^b - 1)}{q^n - 1} \dots\dots\dots \\ r = \dfrac{a \cdot 1{,}0p^{n-b} \cdot (1{,}0p^b - 1)}{1{,}0p^n - 1} \dots\dots\dots \end{array}\right\} \text{XIX. b.} \quad \textit{Aufgabe 197.}$$

$$\left\{\begin{array}{l} n = \dfrac{\log. r - \log. [(r - a) \cdot q^b + a]}{\log. q} + b \dots\dots \\ n = \dfrac{\log. r - \log. [(r - a) \cdot 1{,}0p^b + a]}{\log. 1{,}0p} + b \dots\dots \end{array}\right\} \text{XIX. c.}^{1)} \quad \textit{Aufgabe 199.}$$

Die Summierung ergibt nach einer der bekannten Verfahrungsweisen, beispielsweise nach der zur Formel VI gehörigen Darstellung:

$$a = \frac{\dfrac{r}{q^n} - r}{\dfrac{1}{q^b} - 1},$$

eine Gleichung, welche nach gehöriger Reduktion hinführt auf:

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{n-b} \cdot (q^b - 1)} \quad \text{(wie oben).}$$

[1]) Die Formel entwickelt sich in diesem Falle also:

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{n-b} \cdot (q^b - 1)}$$

$$a \cdot q^{n-b} \cdot (q^b - 1) = r \cdot q^n - r$$

$$a \cdot (q^b - 1) = \frac{r \cdot q^n}{q^{n-b}} - \frac{r}{q^{n-b}}$$

$$a \cdot (q^b - 1) = r \cdot q^b - \frac{r}{q^{n-b}}$$

$$\frac{r}{q^{n-b}} = r \cdot q^b - a \cdot (q^b - 1)$$

$$\frac{r}{q^{n-b}} = (r - a) \cdot q^b + a$$

$$q^{n-b} = \frac{r}{(r - a) \cdot q^b + a}$$

$$n - b = \frac{\log. r - \log. [(r - a) \cdot q^b + a]}{\log. q}$$

$$n = \frac{\log. r - \log. [(r - a) \cdot q^b + a]}{\log. q} + b$$

Gleichwertige Formeln sind:

$$n = \frac{\log. r \cdot q^b - \log. [(r - a) \cdot q^b + a]}{\log. q}.$$

d) Aufgeschobene Jahresrenten.

aa) Nachschüssige.

Ist die Aufgabe gestellt, den End- oder Nachwert A einer nachschüssigen Jahresrente zu ermitteln, welche erst mit Ablauf eines Zeitraumes von v Jahren beginnt, deren Raten r aber von da an während n Jahren bezogen werden, so würde man wiederum von einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten q, bezw. dem Zinsfaktor 1,0p, auszugehen haben. Wird hierbei aber berücksichtigt, daß es an dem Nachwerte einer durch n Jahre laufenden Rente absolut nichts ändert, wenn die Raten derselben, statt schon von dem Zeitpunkte der Begründung des Rechtsanspruches an, erst später mit Ablauf von v Jahren beziehbar werden, so ist auch ohne Weiteres ersichtlich, daß auf den gegebenen Fall vorbehaltlos die oben entwickelte allgemeine Formel XIV (XII) für nachschüssige Jahresrenten angewendet werden kann, welche lautete:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{r\,.\,(q^n - 1)}{q - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A &= \frac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}\text{XX.}\\ \text{(XIV. XII.)}\end{matrix}$$

Anders liegt jedoch das Verhältnis, wenn die Berechnung des Bar- oder Vorwertes a einer unter sonst gleichen Voraussetzungen laufenden Rente in Frage steht.

Da der Endwert A gleich dem Produkte aus dem Barwerte a und der n ten Potenz des Zinsfaktors q, also $= a\,.\,q^n$ bezw. $a\,.\,1{,}0p^n$ ist, so hat man behufs Ermittlung des Barwertes a, wie bereits wiederholt gezeigt wurde, den Ausdruck für den Endwert $a\,.\,q^n$ (Formel XX) durch q^n zu dividieren. Im gegebenen Falle erweitert sich nun aber der Zeitraum, welcher für den Barwert a bestimmend ist, um die Zahl v der Jahre, während deren die Raten noch nicht bezogen werden. Woraus dann folgt, daß der Divisor, welcher in die für die Berechnung von a aufzustellende regelrechte Formel einzusetzen ist, nicht q^n, sondern q^{v+n} sein muß. Darnach lautet die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{r\,.\,(q^n - 1)}{q^{v+n}\,.\,(q - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a &= \frac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{v+n}\,.\,0{,}0p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}\text{XX. a.}^{1)}\\ \textit{Aufgabe 200.}\end{matrix}$$

sowie, gemäß dem zur Formel XV. c (Fußnote S. 145) entwickelten Verfahren:

$$n = \frac{\log.\, r - \log.\left[r - \dfrac{a\,.\,(q^b - 1)}{q^b}\right]}{\log.\, q}$$

[1]) Soll hier gleichwohl der Weg der direkten Feststellung eingeschlagen werden, so hat man sich analog der zur Formel XV. a. (Fußnote) vorgeführten Betrachtungsweise vorzustellen, daß der Barwert der ersten, nach v + 1 Jahren fälligen Rate $= \frac{r}{q^{v+1}}$, derjenigen der zweiten, nach v + 2 Jahren fälligen Rate $\frac{r}{q^{v+2}}$ ist, usw.

Auf Grundlage der Formel XX. a. bestimmt sich aber ferner:

$$r = \frac{a \cdot q^{v+n} \cdot (q-1)}{q^n - 1} \quad \ldots \ldots \ldots \qquad \text{XX. b.}$$

$$r = \frac{a \cdot 1{,}0p^{v+n} \cdot 0{,}0p}{1{,}0p^n - 1} \quad \ldots \ldots \ldots \qquad \textit{Aufgabe 202.}$$

$$n = \frac{\log. r - \log. \left(r - [a \cdot (q-1) \cdot q^v]\right)}{\log. q} \quad \ldots \ldots \qquad \text{XX. c.}^{1)}$$

$$n = \frac{\log. r - \log. [r - (a \cdot 0{,}0p \cdot 1{,}0p^v)]}{\log. 1{,}0p} \quad \ldots \ldots \qquad \textit{Aufgabe 204.}$$

Setzt man diese Erwägungen fort, so erhält man für den Barwert der vorletzten Rate: $\frac{r}{q^{v+n-1}}$, und der letzten Rate: $\frac{r}{q^{v+n}}$.

Die auf dieser Grundlage bei dem Einsatze des Quotienten $\frac{1}{q}$ sich ergebende Progression würde sich also gestalten, wie folgt:

$$a = \frac{r}{q^{v+1}} + \frac{r}{q^{v+2}} + \frac{r}{q^{v+3}} + \ldots + \frac{r}{q^{v+n-2}} + \frac{r}{q^{v+n-1}} + \frac{r}{q^{v+n}}.$$

Wird alsdann (nach Formel VI oder VII) summiert, so kommt zunächst:

$$a = \frac{\frac{r}{q^{v+n}} \cdot \frac{1}{q} - \frac{r}{q^{v+1}}}{\frac{1}{q} - 1}$$

Zieht man diese Gleichung in geeigneter Weise zusammen, so erhält man:

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{v+n} \cdot (q-1)} \text{ (wie oben).}$$

[1]) Zu dieser Formel gelangt man also:

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{v+n} \cdot (q-1)}$$

$$a \cdot (q-1) = \frac{r \cdot q^n - r}{q^{v+n}}$$

$$a \cdot (q-1) = \frac{r}{q^v} - \frac{r}{q^{v+n}}$$

$$\frac{r}{q^{v+n}} = \frac{r}{q^v} - a \cdot (q-1)$$

$$\frac{r}{q^n} = r - [a \cdot (q-1) \cdot q^v]$$

$$q^n = \frac{r}{r - [a \cdot (q-1) \cdot q^v]}$$

$$n = \frac{\log. r - \log. \left(r - [a \cdot (q-1) \cdot q^v]\right)}{\log. q}$$

Liegt jedoch der Fall vor, daß von den beiden Perioden die Zeitdauer (n) des Rentenlaufes gegeben ist und diejenige des Aufschubes (v) der Rentenzahlung bestimmt werden soll, so wird man wiederum an die Formel XX. a. anknüpfen. Man erhält dann:

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{v+n} \cdot (q-1)}$$

bb) Vorschüssige.

Behufs Ermittlung des zunächst in Frage kommenden End- oder Nachwertes A einer unter sonst gleichen Bedingungen wie sub aa laufenden vorschüssigen Rente wird man an dem bereits hervorgehobenen Gesichtspunkte festzuhalten haben, nach welchem dieser Endwert der gleiche ist, einerlei, ob die Raten schon von dem Zeitpunkte der Begründung des Rechtsanspruches an oder erst später mit Ablauf von v Jahren fällig werden. Darnach ergibt sich wiederum:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{r \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A &= \frac{r \cdot 1{,}0p \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \begin{array}{c} \text{XXI.} \\ \text{(XV. XIII.)} \end{array}$$

Hinsichtlich der Bestimmung des Bar- oder Vorwertes a ist aber daran zu erinnern, daß der Zeitraum, welcher für denselben in Betracht kommt, sich um die Zahl der Jahre, während deren noch keine Raten bezogen werden, erweitert, und daß demgemäß in die bekannte, hier anzuwendende Formel (XV. a.) der Divisor q^{v+n-1} bezw. $1{,}0p^{v+n-1}$ (statt q^{n-1} bezw. $1{,}0p^{n-1}$) aufgenommen werden muß. Demgemäß hat man:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{v+n-1} \cdot (q - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a &= \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{v+n-1} \cdot 0{,}0p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \begin{array}{c} \text{XXI. a.[1]} \\ \textit{Aufgabe 201.} \end{array}$$

$$a \cdot (q - 1) = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^v \cdot q^n}$$

$$a \cdot (q - 1) \cdot q^v \cdot q^n = r \cdot (q^n - 1)$$

$$q^v = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{a \cdot (q - 1) \cdot q^n}$$

$$v = \frac{\log. r \cdot (q^n - 1) - \log. [a \cdot (q - 1) \cdot q^n]}{\log. q}$$

[1]) Handelt es sich um die Aufgabe, den Wert von a direkt mittelst Aufstellung einer Progression nachzuweisen, so ist zu berücksichtigen, daß die Barwerte von der Eröffnung des Rechtsanspruches an betragen: $\frac{r}{q^v} + \frac{r}{q^{v+1}}$ usw., für den Schluß des Rentenlaufes aber . . . . . $+ \frac{r}{q^{v+n-2}} + \frac{r}{q^{v+n-1}}$. Darnach würde man in Anwendung des zur Formel XX. a. (Fußnote) erwähnten Summierungs-Verfahrens erhalten:

$$a = \frac{\frac{r}{q^{v+n-1}} \cdot \frac{1}{q} - \frac{r}{q^v}}{\frac{1}{q} - 1}$$

Woraus sich dann nach angemessener Reduktion schließlich ergibt:

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{v+n-1} \cdot (q - 1)} \text{ (wie oben).}$$

Aus der Formel XXI. a. lassen sich dann in bekannter Weise noch ableiten:

$$\left\{\begin{array}{l} r = \frac{a \cdot q^{v+n-1} \cdot (q-1)}{q^n - 1} \dots\dots\dots\dots \\ r = \frac{a \cdot 1{,}0p^{v+n-1} \cdot 0{,}0p}{1{,}0p^n - 1} \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \text{XXI. b. } \textit{Aufgabe 203.}$$

$$\left\{\begin{array}{l} n = \frac{\log. r - \log. [r - (a \cdot (q-1) \cdot q^{v-1})]}{\log. q} \dots\dots \\ n = \frac{\log. r - \log. [r - (a \cdot 0{,}0p \cdot 1{,}0p^{v-1})]}{\log. 1{,}0p} \dots\dots \end{array}\right\} \text{XXI. c.}^{1)} \textit{ Aufgabe 205.}$$

Im Anschlusse an die seitherigen Erörterungen über die aufgeschobenen Renten wird nun auch noch des Vorkommens zu gedenken sein, daß deren Raten, statt regelmäßig an der Wende eines Jahres, entweder je an bestimmten Zeitabschnitten eines Jahres oder je nach mehreren Jahren fällig werden. Damit ist zugleich die Gliederung der noch in Betracht zu ziehenden Fälle gegeben.

e) Aufgeschobene Renten, deren Raten je an bestimmten Teilabschnitten des Jahres fällig sind.

aa) Nachschüssige.

An früherer Stelle (Formel XVI.) wurde gezeigt, wie sich der End- oder Nachwert A einer alle $\frac{1}{m}$ Jahre fälligen nachschüssigen Rente gestaltet. Dieser auf den Zeitpunkt der Beendigung des Rentenlaufes bezogene Wert bleibt sich aber nach den Ausführungen zur Formel XX durchaus gleich, einerlei, ob dem Beginne der Ratenzahlungen ein von der Begründung des Rentenanspruchs datierender Zeitraum von v Jahren vorangeht oder nicht. Woraus dann folgt, daß auch der End- oder Nachwert A einer aufgeschobenen nachschüssigen Rente, deren Raten alle $\frac{1}{m}$ Jahre fällig werden, sich gemäß der bereits zitierten Formel XVI ergibt, welche lautet:

$$\left\{\begin{array}{l} A = \frac{r \cdot (q_{\prime}^{m \cdot n} - 1)}{q_{\prime} - 1} \dots\dots\dots\dots \\ A = \frac{r \cdot (1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1)}{0{,}0\frac{p}{m}} \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{XXII.} \\ \text{(XVI.)}\end{array}$$

[1] Vgl. hierzu die Ausführungen in der Fußnote zur Formel XX. c.
Nach dem dort angegebenen Verfahren erhält man überdies für vorschüssige Renten:

$$v = \frac{\log. r \cdot (q^n - 1) - \log. [a \cdot (q-1) \cdot q^{n-1}]}{\log. q}$$

Ein Beispiel der Anwendung dieser Formel bildet die Aufgabe 231.

Abweichend hiervon gestaltet sich jedoch das Verhältnis für die Ermittlung des Bar- oder Vorwertes a, da man sich vorzustellen hat, daß der Betrag, welchen derselbe am Beginne des Rentenlaufes ausmacht, um v Jahre zurückdatiert (diskontiert) werden muß. Wenn nun im gegebenen Falle der Endwert A gleich dem Produkte aus dem Barwerte a und der vten Potenz des Zinsfaktors q, also $= a \cdot q^v$ bezw. $a \cdot 1{,}0p^v$ ist, so wird sich eben sein Barwert a auf $\frac{A}{q^v}$ berechnen. Somit erhält man unter Berufung auf die Formel XVI. a. in Anwendung auf aufgeschobene Renten die Gleichung:

$$a = \frac{r \cdot (q_1^{m \cdot n} - 1)}{q_1^{m \cdot n} \cdot (q_1 - 1) \cdot q^v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a = \frac{r \cdot (1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1)}{1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} \cdot 0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

XXII. a. *Aufgabe 206.*

Hieraus folgt aber ferner:

$$r = \frac{a \cdot q_1^{m \cdot n} \cdot (q_1 - 1) \cdot q^v}{q_1^{m \cdot n} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r = \frac{a \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} \cdot 0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^v}{1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

XXII. b. *Aufgabe 208.*

$$n = \frac{\log. r - \log. (r - [a \cdot (q_1 - 1) \cdot q^v])}{\log. q_1} \cdot \frac{1}{m} \quad \ldots\ldots$$

$$n = \frac{\log. r - \log. [r - (a \cdot 0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^v)]}{\log. 1{,}0\frac{p}{m}} \cdot \frac{1}{m} \quad \ldots\ldots$$

XXII. c. [1]) *Aufgabe 210.*

bb) Vorschüssige.

Genau nach Maßgabe des in den Formeln XVII. und XVII. a. dargelegten Verfahrens und unter Beachtung der Ausführungen zu den

[1]) Die Gleichung entwickelt sich also:

$$a = \frac{r \cdot (q_1^{m \cdot n} - 1)}{q_1^{m \cdot n} \cdot (q_1 - 1) \cdot q^v}$$

$$a \cdot q_1^{m \cdot n} \cdot (q_1 - 1) \cdot q^v = r \cdot q_1^{m \cdot n} - r$$

$$a \cdot (q_1 - 1) \cdot q^v = \frac{r \cdot q_1^{m \cdot n}}{q_1^{m \cdot n}} - \frac{r}{q_1^{m \cdot n}}$$

$$a \cdot (q_1 - 1) \cdot q^v = r - \frac{r}{q_1^{m \cdot n}}$$

$$\frac{r}{q_1^{m \cdot n}} = r - a \cdot (q_1 - 1) \cdot q^v$$

$$q_1^{m \cdot n} = \frac{r}{r - a \cdot (q_1 - 1) \cdot q^v}$$

$$n = \frac{\log. r - \log. (r - [a \cdot (q_1 - 1) \cdot q^v])}{\log. q_1} \cdot \frac{1}{m}$$

Formeln XXII und XXII. a. ergibt sich für die der vorliegenden Rubrik angehörenden Fälle:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{r \cdot q_{,} \cdot (q_{,}^{m.n} - 1)}{q_{,} - 1} \ldots\ldots\ldots \\ A &= \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m} \cdot (1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1)}{0{,}0\frac{p}{m}} \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{XXIII.}\\ \text{(XVII.)}\end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{r \cdot (q_{,}^{m.n} - 1)}{q_{,}^{m.n-1} \cdot (q_{,} - 1) \cdot q^{v}} \ldots\ldots\ldots \\ a &= \frac{r \cdot (1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1)}{1{,}0\frac{p}{m}^{m.n-1} \cdot 0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^{v}} \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{XXIII. a.}\\ \textit{Aufgabe 207.}\end{matrix}$$

Aus welchen Gleichungen sich dann weiter ableiten lässet:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{a \cdot q_{,}^{m.n} \cdot (q_{,} - 1) \cdot q^{v}}{q_{,} \cdot (q_{,}^{m.n} - 1)} \ldots\ldots\ldots \\ r &= \frac{a \cdot 1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} \cdot 0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^{v}}{1{,}0\frac{p}{m} \cdot (1{,}0\frac{p}{m}^{m.n} - 1)} \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{XXIII. b.}\\ \textit{Aufgabe 209.}\end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} n &= \left[\frac{\log. r - \log. \left(r \cdot q_{,} - [a \cdot (q_{,} - 1) \cdot q^{v}]\right)}{\log. q_{,}} + 1\right] \cdot \frac{1}{m} \\ n &= \left(\frac{\log. r - \log. [r \cdot 1{,}0\frac{p}{m} - (a \cdot 0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^{v})]}{\log. 1{,}0\frac{p}{m}} + 1\right) \cdot \frac{1}{m} \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{XXIII. c.[1]}\\ \textit{Aufgabe 211.}\end{matrix}$$

f) Aufgeschobene Renten, deren Raten in Zwischenräumen von je mehreren Jahren fällig sind.

aa) Nachschüssige.

Um zu den hier aufzustellenden Gleichungen zu gelangen, hat man von denselben Gesichtspunkten auszugehen, welche zu den Formeln XXII und XXII. a. geführt haben. Unter Anknüpfung an die richtschnurgebenden Formeln XVIII und XVIII. a erhält man dann zunächst:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{r \cdot (q^{n} - 1)}{q^{b} - 1} \ldots\ldots\ldots \\ A &= \frac{r \cdot (1{,}0p^{n} - 1)}{1{,}0p^{b} - 1} \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{XXIV.}\\ \text{(XVIII.)}\end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{r \cdot (q^{n} - 1)}{q^{v+n} \cdot (q^{b} - 1)} \ldots\ldots\ldots \\ a &= \frac{r \cdot (1{,}0p^{n} - 1)}{1{,}0p^{v+n} \cdot (1{,}0p^{b} - 1)} \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{XXIV. a.}\\ \textit{Aufgabe 212.}\end{matrix}$$

[1]) S. Fußnote [1] S. 157.

Und in weiterer Folge:

$$\left\{\begin{array}{l} r = \dfrac{a \cdot q^{v+n} \cdot (q^b - 1)}{q^n - 1} \\ r = \dfrac{a \cdot 1{,}0p^{v+n} \cdot (1{,}0p^b - 1)}{1{,}0p^n - 1} \end{array}\right\} \quad \text{XXIV. b.}$$

Aufgabe 214.

$$\left\{\begin{array}{l} n = \dfrac{\log. r - \log. (r - [a \cdot (q^b - 1) \cdot q^v])}{\log. q} \\ n = \dfrac{\log. r - \log (r - [a \cdot (1{,}0p^b - 1) \cdot 1{,}0p^v])}{\log. 1{,}0p} \end{array}\right\} \quad \text{XXIV. c.}^{1)}$$

Aufgabe 216.

---

[1]) Die Gleichungen entwickeln sich folgendermaßen:

XXIII. c.

$$a = \frac{r \cdot (q_{,}^{m.n} - 1)}{q_{,}^{m.n-1} \cdot (q_{,} - 1) \cdot q^v}$$

$$a \cdot q_{,}^{m.n-1} \cdot (q_{,} - 1) \cdot q^v = r \cdot q_{,}^{m.n} - r$$

$$a \cdot (q_{,} - 1) \cdot q^v = \frac{r \cdot q_{,}^{m.n}}{q_{,}^{m.n-1}} - \frac{r}{q_{,}^{m.n-1}}$$

$$a \cdot (q_{,} - 1) \cdot q^v = r \cdot q_{,} - \frac{r}{q_{,}^{m.n-1}}$$

$$\frac{r}{q_{,}^{m.n-1}} = r \cdot q_{,} - a \cdot (q_{,} - 1) \cdot q^v$$

$$q_{,}^{m.n-1} = \frac{r}{r \cdot q_{,} - [a \cdot (q_{,} - 1) \cdot q^v]}$$

$$n = \left[\frac{\log. r - \log. (r \cdot q_{,} - [a \cdot (q_{,} - 1) \cdot q^v])}{\log. q_{,}} + 1\right] \cdot \frac{1}{m}$$

XXIV. c.

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{v+n} \cdot (q^b - 1)}$$

$$a \cdot q^{v+n} \cdot (q^b - 1) = r \cdot q^n - r$$

$$a \cdot (q^b - 1) = \frac{r \cdot q^n}{q^{v+n}} - \frac{r}{q^{v+n}}$$

$$a \cdot (q^b - 1) = \frac{r}{q^v} - \frac{r}{q^{v+n}}$$

$$\frac{r}{q^{v+n}} = \frac{r}{q^v} - a \cdot (q^b - 1)$$

$$\frac{r}{q^n} = r - a \cdot (q^b - 1) \cdot q^v$$

$$q^n = \frac{r}{r - a \cdot (q^b - 1) \cdot q^v}$$

$$n = \frac{\log. r - \log. (r - [a \cdot (q^b - 1) \cdot q^v])}{\log. q}$$

XXV. c.

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{v+n-b} \cdot (q^b - 1)}$$

$$a \cdot q^{v+n-b} \cdot (q^b - 1) = r \cdot q^n - r$$

$$a \cdot (q^b - 1) = \frac{r \cdot q^n}{q^{v+n-b}} - \frac{r}{q^{v+n-b}}$$

$$a \cdot (q^b - 1) = \frac{r}{q^{v-b}} - \frac{r}{q^{v+n-b}}$$

$$\frac{r}{q^{v+n-b}} = \frac{r}{q^{v-b}} - a \cdot (q^b - 1)$$

$$\frac{r}{q^n} = r - a \cdot (q^b - 1) \cdot q^{v-b}$$

$$q^n = \frac{r}{r - a \cdot (q^b - 1) \cdot q^{v-b}}$$

$$n = \frac{\log. r - \log. (r - [a \cdot (q^b - 1) \cdot q^{v-b}])}{\log. q}$$

bb) Vorschüssige.

In Anlehnung an die Formeln XIX und XIX. a und analog der Darstellung zu den Gleichungen XXIV und XXIV. a findet man:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{r \cdot q^{b} \cdot (q^{n} - 1)}{q^{b} - 1} \\ A &= \frac{r \,.\, 1{,}0p^{b} \,.\, (1{,}0p^{n} - 1)}{1{,}0p^{b} - 1} \end{aligned}\right\} \text{XXV. (XIX.)}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{r \,.\, (q^{n} - 1)}{q^{v+n-b} \,.\, (q^{b} - 1)} \\ a &= \frac{r \,.\, (1{,}0p^{n} - 1)}{1{,}0p^{v+n-1} \,.\, (1{,}0p^{b} - 1)} \end{aligned}\right\} \text{XXV. a.}$$

Aufgabe 213.

Woraus sich ferner ergibt:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{a \,.\, q^{v+n-b} \,.\, (q^{b} - 1)}{q^{n} - 1} \\ r &= \frac{a \,.\, 1{,}0p^{v+n-b} \,.\, (1{,}0p^{b} - 1)}{1{,}0p^{n} - 1} \end{aligned}\right\} \text{XXV. b.}$$

Aufgabe 215.

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{\log. r - \log. (r - [a \,.\, (q^{b} - 1) \,.\, q^{v-b}])}{\log. q} \\ n &= \frac{\log. r - \log. (r - [a \,.\, (1{,}0p^{b} - 1) \,.\, 1{,}0p^{v-b}])}{\log. 1{,}0p} \end{aligned}\right\} \text{XXV. c.[1]}$$

Aufgabe 213.

g) Zeitlich gleichmäßig abändernde Renten.

Der Vollständigkeit willen soll unter dieser Rubrik noch der relativ seltener auftauchenden Fälle gedacht werden, in welchen die einander folgenden Raten einer Zeitrente durch eine geometrische oder eine arithmetische Progression laufen. Die Erörterung hierüber wird sich indessen nunmehr auf die Ermittlung je der einzelnen konkurrierenden Größen innerhalb der nachschüssigen Jahresrenten beschränken können, da in den seitherigen Betrachtungen ausreichende Anhaltepunkte für weitere Anschlußrechnungen gegeben sind.

aa) Renten, deren Raten durch eine **geometrische** Progression laufen.

Wenn der Bezug einer nachschüssigen Jahresrente mit der Rate r beginnt, und diese in der Folge am Ende eines jeden Jahres durch Vervielfältigung mit dem konstanten Betrage e (Exponent) vermehrt wird, so muß die Größe je der einzelnen Bezüge sein:

[1] S. Fußnote [1] S. 157.

Am Ende des ersten Jahres: r
„ „ „ zweiten „ : $r \cdot e$
„ „ „ dritten „ : $r \cdot e^2$ usw.

Und ferner bei einer Zeitdauer des Rentenlaufes von n Jahren:

Am Ende des vorvorletzten Jahres: $r \cdot e^{n-3}$
„ „ „ vorletzten „ : $r \cdot e^{n-2}$
„ „ „ letzten „ : $r \cdot e^{n-1}$

Stehen aber nun diese Einzelbeträge auf Zinseszinsen aus, so gestalten sich die betreffenden Endwerte mit Ablauf von n Jahren bei einem Zinsfaktor von q bezw. 1,0p folgendermaßen:

Endwert der ersten Rate: $r \cdot q^{n-1}$
„ „ zweiten „ : $r \cdot e \cdot q^{n-2}$
„ „ dritten „ : $r \cdot e^2 \cdot q^{n-3}$ usw.

Sodann aber:

Endwert der vorvorletzten Rate: $r \cdot e^{n-3} \cdot q^2$
„ „ vorletzten „ : $r \cdot e^{n-2} \cdot q$
„ „ letzten „ : $r \cdot e^{n-1}$

Behufs Berechnung des End- oder Nachwertes A aller Raten hat man also die Progression:

$$A = r \cdot q^{n-1} + r \cdot e \cdot q^{n-2} + r \cdot e^2 \cdot q^{n-3} + \ldots + r \cdot e^{n-3} \cdot q^2 + r \cdot e^{n-2} \cdot q + r \cdot e^{n-1},$$

in welcher, wie man sieht, der Quotient $= \frac{e}{q}$ ist.[1])

Nach Maßgabe der Summierungs-Formel VII ergibt sich aus dieser Reihe:

$$A = \frac{r \cdot e^{n-1} \cdot \frac{e}{q} - r \cdot q^{n-1}}{\frac{e}{q} - 1} = \frac{\frac{r \cdot e^n}{q} - r \cdot q^{n-1}}{\frac{e}{q} - 1} = \frac{r \cdot e^n - r \cdot q^n}{\left(\frac{e}{q} - 1\right) \cdot q}$$

Oder:

$$\left\{ A = \frac{r \cdot (e^n - q^n)}{e - q} \right\} \quad \text{XXVI.}$$

$$\left\{ A = \frac{r \cdot (e^n - 1{,}0p^n)}{e - 1{,}0p} \right\} \quad \textit{Aufgabe 218.}$$

Nun entspricht aber der Endwert A einem Bar- oder Vorwerte

---

[1]) Wäre die Progression eine fallende, also der Exponent $= \frac{1}{e}$, so gilt natürlich das gleiche Verfahren. Die Reihe würde alsdann lauten:

$$A = r \cdot q^{n-1} + \frac{r}{e} \cdot q^{n-2} + \frac{r}{e^2} \cdot q^{n-3} + \ldots\ldots + \frac{r}{e^{n-3}} \cdot q^2 + \frac{r}{e^{n-2}} \cdot q + \frac{r}{e^{n-1}},$$

wobei der Quotient $= \frac{1}{e \cdot q}$ ist. Die weitere Behandlung einer derartigen Aufgabe erfolgt dann durchaus nach der oben vorgeführten Anleitung.

von $\frac{A}{q^n}$ bezw. $\frac{A}{1{,}0p^n}$. Woraus dann für diesen (a) auf Grund obiger Gleichung folgen muß:

$$\left\{\begin{array}{l} a = \frac{r \cdot (e^n - q^n)}{q^n \cdot (e - q)} \\ a = \frac{r \cdot (e^n - 1{,}0p^n)}{1{,}0p^n \cdot (e - 1{,}0p)} \end{array}\right\} \quad \text{XXVI. a.}$$ [1]

Aufgabe 219.

In Anwenduug des seither wiederholt zur Darstellung gebrachten Verfahrens findet man dann aus den vorliegenden Gleichungen weiter:

---

[1]) Wird jedoch ein direkter Nachweis des Barwertes a verlangt, so hat man von folgender Erwägung auszugehen:

Es ist der Barwert:

Der am Ende des ersten Jahres fälligen Rate: $\frac{r}{q}$

" " " " zweiten " " " : $\frac{r \cdot e}{q^2}$

" " " " dritten " " " : $\frac{r \cdot e^2}{q^3}$

Ferner hat man für den Barwert:

Der vorvorletzten Rate: $\frac{r \cdot e^{n-3}}{q^{n-2}}$

" vorletzten " : $\frac{r \cdot e^{n-2}}{q^{n-1}}$

" letzten " : $\frac{r \cdot e^{n-1}}{q^n}$

Somit ergibt sich für die Einzelbeträge eine geometrische Reihe folgender Gestaltung:

$$a = \frac{r}{q} + \frac{r \cdot e}{q^2} + \frac{r \cdot e^2}{q^3} + \ldots + \frac{r \cdot e^{n-3}}{q^{n-2}} + \frac{r \cdot e^{n-2}}{q^{n-1}} + \frac{r \cdot e^{n-1}}{q^n}$$

Wendet man auf dieselbe das Verfahren der Summierung, beispielsweise nach Formel VII, an, so kommt:

$$a = \frac{\frac{r \cdot e^{n-1}}{q^n} \cdot \frac{e}{q} - \frac{r}{q}}{\frac{e}{q} - 1}$$

eine Gleichung, welche weiter reduziert werden kann in:

$$a = \frac{\left(\frac{r \cdot e^{n-1}}{q^n} \cdot \frac{e}{q}\right) - \frac{r}{q}}{\frac{e}{q} - 1} = \frac{\frac{r \cdot e^n - r \cdot q^n}{q^{n+1}}}{\frac{e-q}{q}} = \frac{r \cdot (e^n - q^n) \cdot q}{(e-q) \cdot q^{n+1}} = \frac{r \cdot (e^n - q^n)}{q^n \cdot (e - q)} \text{ (wie oben).}$$

Übrigens kann dieser Gleichung auch die für logarithmische Berechnung bequemere Form gegeben werden:

$$a = \frac{r \cdot \left(\frac{e^n}{q^n} - 1\right)}{e - q}.$$

$$\left\{\begin{array}{l} r = \dfrac{a \cdot q^n \cdot (e - q)}{e^n - q^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex] r = \dfrac{a \cdot 1{,}0p^n \cdot (e - 1{,}0p)}{e^n - 1{,}0p^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{XXVI. b)} \\ \textit{Aufgabe 220.}\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} n = \dfrac{\log. [r + a \cdot (e - q)] - \log. r}{\log. \dfrac{e}{q}} \quad \ldots\ldots\ldots \\[2ex] n = \dfrac{\log. [r + a \cdot (e - 1{,}0p)] - \log. r}{\log. \dfrac{e}{1{,}0p}} \quad \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{XXVI. c)[1]} \\ \textit{Aufgabe 221.}\end{array}$$

Anmerkung. Von der Auslösung auch von e ist hier abgesehen, da dieselbe nur auf indirektem Wege und mit Hilfe eines verwickelten Verfahrens geschehen kann.

bb) Renten, deren Raten durch eine **arithmetische** Progression laufen.

Eine arithmetische Progression wird bekanntlich durch eine Reihenfolge von Zahlen gebildet, in welcher jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Addition der gleichen Zahl entsteht. Im Gesichtspunkte der hier in Frage stehenden Aufgaben wäre somit das Vorkommen zu betrachten, in welchem die regelmäßigen festen Raten einer Rente am Schlusse eines jeden folgenden Jahres fortschreitend um je den gleichen Betrag vermehrt (oder vermindert) werden. (Näheres unter „Zinsrechnung". — S. 6.)

Wird hiernach die Frage gestellt, auf welche Summe A eine nachschüssige Jahresrente r in n Jahren bei einem Zinsfaktor q bezw. 1,0p dann anwachsen würde, wenn den gleichbleibenden Raten, mit dem zweiten Jahre beginnend am Ende eines jeden folgenden Jahres ein weiterer Betrag von je d (Differenz) hinzugefügt wird, so ist zu erwägen,

---

[1]) Diese Formel entwickelt sich wie folgt:

$$a = \frac{r \cdot (e^n - q^n)}{q^n \cdot (e - q)}$$

$$a \cdot q^n \cdot (e - q) = r \cdot e^n - r \cdot q^n$$

$$a \cdot (e - q) = \frac{r \cdot e^n}{q^n} - \frac{r \cdot q^n}{q^n}$$

$$a \cdot (e - q) = \frac{r \cdot e^n}{q^n} - r$$

$$\frac{r \cdot e^n}{q^n} = a \cdot (e - q) + r$$

$$\frac{e^n}{q^n} = \frac{a \cdot (e - q) + r}{r}$$

$$\left(\frac{e}{q}\right)^n = \frac{a \cdot (e - q) + r}{r}$$

$$n = \frac{\log. [a \cdot (e - q) + r] - \log. r}{\log. \dfrac{e}{q}}$$

daß die einzelnen Bestandteile des End- oder Nachwertes sich im Bilde einer Progression darstellen, welche lautet:

$$A = r \cdot q^{n-1} + (r + d) \cdot q^{n-2} + (r + 2d) \cdot q^{n-3} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + [r + (n-3) \cdot d] \cdot q^2 + [r + (n-2) \cdot d] \cdot q + [r + (n-1) \cdot d]$$ [1])

Wie man sieht, führt die Berechnung von A durch zwei Progressionen, und zwar:

$$A \begin{cases} A_{,} = r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + r \cdot q^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + r \cdot q^2 + r \cdot q + r \\ A_{,,} = \quad d \cdot q^{n-2} + 2d \cdot q^{n-3} + 3d \cdot q^{n-4} + \ldots + (n-3) \cdot d \cdot q^2 + (n-2) \cdot d \cdot q + (n-1) \cdot d \end{cases}$$ [2])

Die erste dieser Reihen zeigt die Bewegung der Werte, welche aus den gleichmäßig wiederkehrenden Raten r, die zweite dagegen diejenige der Werte, welche aus den jährlichen Zulagen d zu jenen Raten hervorgehen. Wenn nun der gesamte Endwert der einzelnen Raten ermittelt werden soll, so wird es eben darauf ankommen, das Verhalten jeder der beiden, in ihrem Verlaufe verschiedenen Reihen der zusammengesetzten Progression ins Auge zu fassen.

Was die erstere Reihe anbetrifft, so ergibt sich in Anknüpfung an frühere Darlegungen (Formel XIV. S. 142) ohne Weiteres:

$$A_{,} = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Anders die zweite Reihe. Da der Quotient derselben nicht konstant ist, so muß auch das bisher angewandte Verfahren der Summierung durch einen anderen Rechnungsgang ersetzt werden. Verzichtet man hierbei auf die Heranziehung der allerdings direkt zum Ziele führenden Differentialrechnung, so erscheint die Aufgabe noch einer einfachen Lösung fähig, indem man die gegebene geschlossene Reihe in Einzelreihen, welche der Wertbewegung in den Jahresfolgen entsprechen, zerlegt und dann die Ergebnisse zusammenzieht.[3])

Wenn man zu diesem Behufe vorerst jedes Glied in so viele Teile spaltet, als die zugehörige Grundzahl Einheiten hat, so würde sich die Zerlegung im vorliegenden Falle folgendermaßen gestalten:

---

[1]) Die Art der Gliederung dieser Reihe ist einfach das Ergebnis der Multiplikation einer arithmetischen Reihe, welche sich über die gleichmäßig wiederkehrenden Raten r und die mit ihnen sich verbindenden Zuschüsse d erstreckt und daher lautet:

$$r + (r + d) + (r + 2d) + \ldots\ldots + [r + (n-3) \cdot d] + [r + (n-2) \cdot d] + [r + (n-1) \cdot d],$$

mit den entsprechenden Gliedern einer geometrischen Reihe, welche die Zinswertsteigerungen umfaßt, und zwar:

$$q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots\ldots + q^2 + q.$$

[2]) Wäre die Progression eine fallende, so müßte die Reihe analog dem oben angegebenen Verfahren gestaltet werden, derart, daß in den einzelnen Gliedern die jährlichen Abminderungen von d zum Ausdruck kommen.

[3]) Auf diesem Wege wurde seinerzeit schon von H. B. Lübsen in dessen: „Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens, Leipzig“, hingewiesen.

$$
\begin{array}{rl}
1) & d \cdot q^{n-2} + d \cdot q^{n-3} + d \cdot q^{n-4} + \ldots \ldots + d \cdot q^2 + d \cdot q + d \\
2) & \quad + d \cdot q^{n-3} + d \cdot q^{n-4} + \ldots \ldots + d \cdot q^2 + d \cdot q + d \\
3) & \quad \quad + d \cdot q^{n-4} + \ldots \ldots + d \cdot q^2 + d \cdot q + d \\
 & \vdots \\
n-3) & + d \cdot q^2 + d \cdot q + d \\
n-2) & + d \cdot q + d \\
n-1) & + d
\end{array}
$$

Wie ersichtlich, bildet jede Querreihe eine geometrische Progression, deren Exponent q ist. Wird nun jede derselben summiert, so ergibt sich bei umgekehrter Reihenfolge der Glieder nach der bekannten Formel VII:

$$1) \quad \frac{(d \cdot q^{n-2} \cdot q) - d}{q-1} = \frac{d \cdot (q^{n-1} - 1)}{q-1}$$

$$2) \quad \frac{(d \cdot q^{n-3} \cdot q) - d}{q-1} = \frac{d \cdot (q^{n-2} - 1)}{q-1}$$

$$3) \quad \frac{(d \cdot q^{n-4} \cdot q) - d}{q-1} = \frac{d \cdot (q^{n-3} - 1)}{q-1}$$

$$\vdots$$

$$n-3) \quad \frac{(d \cdot q^2 \cdot q) - d}{q-1} = \frac{d \cdot (q^3 - 1)}{q-1}$$

$$n-2) \quad \frac{(d \cdot q \cdot q) - d}{q-1} = \frac{d \cdot (q^2 - 1)}{q-1}$$

$$n-1) \quad \frac{d \cdot q - d}{q-1} = \frac{d \cdot (q - 1)}{q-1}$$

Darnach ist aber die Summe aller dieser Reihen:

$$A_{\prime\prime} = \frac{d}{q-1} \cdot (q^{n-1} - 1) + \frac{d}{q-1} \cdot (q^{n-2} - 1) + \frac{d}{q-1} \cdot (q^{n-3} - 1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{d}{q-1} \cdot (q^3 - 1) + \frac{d}{q-1} \cdot (q^2 - 1) + \frac{d}{q-1} \cdot (q - 1)$$

Und unter den gleichnamigen Faktor zusammengefaßt:

$$A_{\prime\prime} = \frac{d}{q-1} \cdot (q^{n-1} - 1 + q^{n-2} - 1 + q^{n-3} - 1 + \ldots \ldots$$

$$\ldots + q^3 - 1 + q^2 - 1 + q - 1)$$

$$A_{\prime\prime} = \frac{d}{q-1} \cdot [q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots$$

$$+ q^3 + q^2 + q - (1 + 1 + 1 \ldots + 1 + 1 + 1)]$$

Sofern ein Zuschuß d gleichzeitig mit der regelmäßigen Rate r schon am Schlusse des ersten Jahres fällig wird, bedeutet die Summe der Reihe $(1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 + 1)$, weil sie der Zahl aller Glieder entspricht, die Dauerzeit des Rentenlaufes in Jahren $= n$. Da aber im gegebenen Falle der Zuschuß d erst mit Ablauf des ersten Jahres einsetzt — das erste Glied begann mit dem Faktor q^{n-2}, statt mit q^{n-1}, —, so verkürzt sich jene Reihe auf $n - 1$. Nun ergibt die Summierung der vorangehenden Reihe nach Formel VII:

$$\frac{(q^{n-1} \cdot q) - q}{q - 1} = \frac{q \cdot (q^{n-1} - 1)}{q - 1} = \frac{q}{q - 1} \cdot (q^{n-1} - 1) = \frac{q^n - q}{q - 1}$$

Und lautet somit die Gleichung im Ganzen:

$$A_{,,} = \frac{d}{q - 1} \cdot \left[\frac{q^n - q}{q - 1} - (n - 1)\right]$$

Wird dieselbe aber im Sinne der vorliegenden Aufgabe derjenigen für den Endwert $A_{,}$ der gleichlaufend wiederkehrenden regelmäßigen Raten r angeschlossen, so ergibt sich schließlich:

$$\left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1} + \left\{\dfrac{d}{q - 1} \cdot \left[\dfrac{q^n - q}{q - 1} - (n - 1)\right]\right\} \quad . \quad . \quad . \\[2ex] A = \dfrac{r.(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} + \left\{\dfrac{d}{0{,}0p} \cdot \left[\dfrac{1{,}0p^n - 1{,}0p}{0{,}0p} - (n - 1)\right]\right\} \quad . \end{array}\right\} \text{XXVII.}^{1)}$$

Aufgabe 222.

Liegt die Aufgabe vor, aus dieser Gleichung die Größe des Bar- oder Vorwertes a abzuleiten, so ist daran festzuhalten, daß dieser, da der Endwert $A = a \cdot q^n$ bezw. $a \cdot 1{,}0p^n$ ist, sich aus der Formel XXVII ergeben muß, wenn man deren rechtsseitige Glieder durch q^n bezw. $1{,}0p^n$ dividiert, d. h. den betreffenden Divisor um diese Größe verstärkt, oder aber die genannten Glieder gleichmäßig mit $\frac{1}{q^n}$ bezw. $\frac{1}{1{,}0p^n}$ multipliziert. Will man das letztere Verfahren, und verbindet man mit ihm, um die ganze Gleichung weiter zu vereinfachen, die bereits angezeigte Multiplikation mit $\frac{1}{q - 1}$ bezw. $\frac{1}{0{,}0p}$ (entsprechend dem Divisor $q - 1$ bezw. $0{,}0p$), so erhält man:

[1] Gleichwertige, indessen für den praktischen Gebrauch kaum bequemere Formeln sind:

$$A = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1} + \left\{d \cdot \left[\frac{q^n - q \cdot n + (n - 1)}{(q - 1)^2}\right]\right\}$$

$$A = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1} + \frac{d \cdot (q^n - 1)}{(q - 1)^2} - \frac{d \cdot n}{q - 1},$$

$$A = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q - 1} + \frac{d \cdot q \cdot (q^{n-1} - 1)}{(q - 1)^2} - \frac{d \cdot (n - 1)}{q - 1}.$$

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{1}{q^n \cdot (q-1)} \cdot \left\{ r \cdot (q^n - 1) + d \cdot \left[\frac{q^n - q}{q-1} - (n-1) \right] \right\} \\ a &= \frac{1}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p} \cdot \left\{ r \cdot (1{,}0p^n - 1) + d \cdot \left[\frac{1{,}0p^n - 1{,}0p}{0{,}0p} - (n-1) \right] \right\} \end{aligned}\right\} \quad \text{XXVII. a.}$$

Aufgabe 223.

Auf dem früher bereits mehrfach bezeichneten Wege der Auslösung ergibt sich dann auch noch:

$$\left\{\begin{aligned} r &= \frac{a \cdot q^n \cdot (q-1) - d \cdot \left[\frac{q^n - q}{q-1} - (n-1) \right]}{q^n - 1} \quad \ldots \\ r &= \frac{a \cdot 1{,}0p^n \cdot 0{,}0p - d \cdot \left[\frac{1{,}0p^n - 1{,}0p}{0{,}0p} - (n-1) \right]}{1{,}0p^n - 1} \quad \ldots \end{aligned}\right\} \quad \text{XXVII.b.}\alpha.[1]$$

Aufgabe 224.

Und, wenn r gegeben ist:

$$\left\{\begin{aligned} d &= \frac{a \cdot q^n \cdot (q-1) - r \cdot (q^n - 1)}{\frac{q^n - q}{q-1} - (n-1)} \quad \ldots \\ d &= \frac{a \cdot 1{,}0p^n \cdot 0{,}0p - r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{\frac{1{,}0p^n - 1{,}0p}{0{,}0p} - (n-1)} \quad \ldots \end{aligned}\right\} \quad \text{XXVII.b.}\beta.[2]$$

Aufgabe 225.

Sonder-Aufgaben: 226—240.

Anmerkung. Die Auslösung von n erfordert die Anwendung eines komplizierten indirekten Verfahrens und fällt daher hier außer Betracht.

---

[1]) Ist das Verhältnis zwischen r und d derart gegeben, daß d nur in einem bestimmten Bruchteile $\frac{1}{t}$ von r zum Ausdruck kommt, so lässet sich natürlich mit Hilfe der vorliegenden Formel für r auch die Aufgabe lösen, den unbekannten Betrag der ersten Ratenzahlung aus $r : \frac{1}{t} \cdot r$ zu ermitteln, da man in diesem Falle an Stelle von d nur den betreffenden Bruchteil von r einzusetzen hat. S. Aufgabe 224.

[2]) Zu der hier angegebenen Formel gelangt man auf folgendem Wege:

XXVII. b. β

$$r = \frac{a \cdot q^n \cdot (q-1) - d \cdot \left[\frac{q^n - q}{q-1} - (n-1) \right]}{q^n - 1}$$

$$r \cdot (q^n - 1) = a \cdot q^n \cdot (q-1) - d \cdot \left[\frac{q^n - q}{q-1} - (n-1) \right]$$

$$d \cdot \left[\frac{q^n - q}{q-1} - (n-1) \right] = a \cdot q^n \cdot (q-1) - r \cdot (q^n - 1)$$

$$d = \frac{a \cdot q^n \cdot (q-1) - r \cdot (q^n - 1)}{\frac{q^n - q}{q-1} - (n-1)}$$

2. Rechnungs-Aufgaben.

Vorbemerkung. Aufgaben über Amortisationen, Schuldentilgungen, Abfindungen, Spar-Anlagen usw., welche schon mit Hilfe der erweiterten Zinseszinsrechnung (Formeln XII—XII. c_1 und XIII—XIII. c_1) gelöst werden können, bleiben hier — vorbehaltlich einiger Sonderfälle — ausgeschlossen. Anleitung zur Behandlung derselben geben die Beispiele unter den Nummern 119—157, auf welche hiermit verwiesen wird.

a) Erste Reihe (158—175).

(Anwendung der Formeln XIV—XIV. c und XV—XV. c.)

Erste Gruppe.

(Gegeben: r, p und n. Gesucht: $A = a \,.\, 1{,}0p^n$. Anwendung der Formeln XIV

und XV:
$$\begin{cases} (\text{Ns}):\ A = \dfrac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)\,^{1)}}{0{,}0p} \\ (\text{Vs}):\ A = \dfrac{r\,.\,1{,}0p\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \end{cases}$$

[Vgl. die Aufgaben 119—123, 142 und 149.]

158. Es hat Jemand für die Dauer von 18 Jahren eine am Ende jeden Jahres fällige Rente von 950 Mark zu beziehen. Wenn diese nun nicht abgehoben wird: Welchen Kapitalbetrag kann der Berechtigte mit Ablauf jenes Zeitraumes bei Annahme eines Zinsfußes von 4 Prozent beanspruchen?

A.
$$A = \frac{950 \times (1{,}04^{18} - 1)}{0{,}04}$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333(4)$
$\times 18$
$\log. 1{,}04^{18} = 0{,}3066001$
$\text{num.} \log. 1{,}04^{18} = 2{,}0258161$
$\text{num.} \log. 1{,}04^{18} - 1 = 1{,}0258161$
$\log. (1{,}04^{18} - 1) = 0{,}0110694$
$\log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$

$\log. 950 = 2{,}9777236$
$+ \log. (1{,}04^{18} - 1) = 0{,}0110694$
$2{,}9887930$
$- \log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$
$4{,}3867330$
$\text{num.} = 24\,363{,}12$
$A = \mathbf{24363{,}12}$ Mark.

Anmerkung. Sofern die Division der Größe von r durch den Zinsfuß 0,0p sich leicht vollzieht und einen abgerundeten Quotienten ergibt, kann die kalkulatorische Behandlung derartiger Fälle gemäß den Ausführungen in der Fußnote zu Aufgabe 119 (S. 100) nicht unwesentlich vereinfacht werden. Im gegebenen Beispiele würde sich alsdann der Nachweis folgendermaßen gestalten:

$$A = \frac{950}{0{,}04} \times (1{,}04^{18} - 1)$$
$$= \frac{95\,000}{4} \times (1{,}04^{18} - 1)$$
$$= 23\,750 \times (1{,}04^{18} - 1)$$

$\log. 23\,750 = 4{,}3756636$
$+ \log. (1{,}04^{18} - 1) = 0{,}0110694$
$4{,}3867330$
$\text{num.} = 24\,363{,}12$; oder auch:

[1]) In der Gliederung der nachfolgenden Aufgaben wurden die Formeln für nachschüssige und für vorschüssige Renten mit den Bezeichnungen „Ns“

$$\text{num. log. } 1{,}01^{18} - 1 = 1{,}0258161$$

$$\frac{950}{0{,}04} = 23\,750$$

$$23\,750 \times 1{,}0258161 = 24\,363{,}12 \text{ (wie oben).}$$

Mit Hilfe der Tafel I:

$$A = \frac{950 \times 1{,}0258165}{0{,}04} = 23\,750 \times 1{,}0258165 = \mathbf{24\,363{,}14} \text{ Mark.}$$

159. Bei der Veräußerung eines Landgutes bewilligt der Verkäufer dem Erwerber für die Zahlung einer Rest-Kaufsumme von 34 000 Mark (A) deren Abtragung in regelmäßig am Ende jeden Jahres zu entrichtenden Renten von 3 350 Mark, unter Anrechnung eines Zinsfußes von $5^1/_4$ Prozent. Wie hoch beziffert sich die Summe, welche der Käufer mit Ablauf von 12 Jahren dem Verkäufer noch schuldet?

A. Die Beantwortung der schwebenden Frage erfordert die Berechnung des Betrages A, bis auf welchen die Rest-Kaufsumme mit Ablauf von 12 Jahren angewachsen sein wird, und andererseits den Endwert A_1 der Ratenzahlungen am gleichen Zeitpunkte.

Jener Betrag der Rest-Kaufsumme beläuft sich nach Formel I auf:

$$A = 34\,000 \times 1{,}0525^{12}$$

Den Endwert der Ratenzahlungen erhält man in Anwendung der obigen Formel, wie folgt:

$$A_1 = \frac{3\,350 \times (1{,}0525^{12} - 1)}{0{,}0525}$$

Darnach lautet die Rechnung:

$$A - A_1 = (34\,000 \times 1{,}0525^{12}) - \frac{3\,350 \times (1{,}0525^{12} - 1)}{0{,}0525}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}0525 &= 0{,}0222221 \\
&\times 12 \\
\log. 1{,}0525^{12} &= \mathbf{0{,}2666652} \\
\text{num. log. } 1{,}0525^{12} &= 1{,}8478434 \\
\text{num.log.} 1{,}0525^{12} - 1 &= 0{,}8478434 \\
\log. (1{,}0525^{12} - 1) &= \mathbf{0{,}9283156 - 1} \\
\log. 0{,}0525 &= \mathbf{0{,}7201593 - 2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 34\,000 &= 4{,}5314789 \\
+ \log. 1{,}0525^{12} &= 0{,}2666652 \\
& 4{,}7981441 \\
\text{num.} &= 62\,826{,}68 \ldots\ldots 62\,826{,}68 \text{ M.} \\
\log. 3\,350 &= 3{,}5250448 \\
+ \log. (1{,}0525^{12} - 1) &= 0{,}9283156 - 1 \\
& 3{,}4533604 \\
- \log. 0{,}0525 &= 0{,}7201593 - 2 \\
& 4{,}7332011 \\
\text{num.} &= 54\,100{,}48 \ldots - 54\,100{,}48 \text{ ,,} \\
A - A_1 &= \mathbf{8\,726{,}20} \text{ M.}
\end{aligned}$$

160. Welchen Wert wird eine zu Anfang eines jeden Jahres fällige Rente von 845 Mark bei Zugrundelegung von $3^3/_4$ Prozent Zinsen mit Ablauf von 20 Jahren erreicht haben?

und „Vs“ je nebeneinander aufgeführt und demgemäß auch die zugehörigen Rechnungsbeispiele innerhalb der Gruppen geordnet.

A. $$A = \frac{845 \times 1{,}0375 \times (1{,}0375^{20} - 1)}{0{,}0375}$$

log. 1,0375 = 0,0159881
× 20
log. $1{,}0375^{20}$ = 0,3197620
num. log. $1{,}0375^{20}$ = 2,0881510
num. log. $1{,}0375^{20} - 1$ = 1,0881510
log. $(1{,}0375^{20} - 1)$ = 0,0366892
log. 0,0375 = 0,5740313 − 2

log. 845 = 2,9268567
+ log. 1,0375 = 0,0159881
+ log. $(1{,}0375^{20} - 1)$ = 0,0366892
2,9795340
— log. 0,0375 = 0,5740313 − 2
4,4055027
num. = 25 439,16
A = **25 439,16 M.**

Mit Hilfe der Tafel I:

$$A = \frac{845 \times 1{,}0375 \times 1{,}088152}{0{,}0375} = 22\,533{,}33 \times 1{,}1289577 = \mathbf{25\,439{,}16}\text{ M.}$$

161. Am Beginne seines 39ten Altersjahres versichert Jemand sein Leben mit 25 000 Mark (A) und entrichtet hierfür am Anfange jeden Jahres eine Prämie von 525 Mark. Wenn nun der Versicherungsnehmer gegen Ablauf seines 66ten Altersjahres, also nach 27 Jahren stirbt: Wie groß ist dann — bei Anrechnung eines Zinsfußes von $4^1/_4$ Prozent — der Gewinn oder der Verlust der Versicherungsbank?

A. $$A = \frac{525 \times 1{,}0425 \times (1{,}0425^{27} - 1)}{0{,}0425}$$

log. 1,0425 = 0,0180761
× 27
log. $1{,}0425^{27}$ = 0,4880547
num. log. $1{,}0425^{27}$ = 3,0764843
num. log. $1{,}0425^{27} - 1$ = 2,0764843
log. $(1{,}0425^{27} - 1)$ = 0,3173287
log. 0,0425 = 0,6283889 − 2

log. 525 = 2,7201593
+ log. 1,0425 = 0,0180761
+ log. $(1{,}0425^{27} - 1)$ = 0,3173287
3,0555641
— log. 0,0425 = 0,6283889 − 2
4,4271752
num. = 26 740,85
A = **26 740,85 M.**

Demnach hat die Bank gewonnen:

26 740,85 − 25 000 = **1 740,85** Mark.

Wäre der Versicherte, statt am Schlusse seines 66ten, am Beginne des 67ten Altersjahres gestorben, nachdem von ihm auch noch die Prämie für das 67ste Lebensjahr gezahlt worden, so würde sich der Gewinn der Bank um den Betrag von 525 Mark höher, also auf 2 265,85 Mark belaufen.

162. Behufs Sicherung eines jährlichen Witwengehaltes von 1 000 Mark zahlte ein Beamter an die Witwenkasse einen Jahresbeitrag von 300 Mark. Statutengemäß erfolgten die Leistungen und Gegenleistungen am Anfange jeden Jahres. Wenn nun der versicherte Gatte mit Ablauf von 18 Jahren starb und seine Frau ihn um 9 Jahre überlebte: Wie groß war dann der Gewinn oder der Verlust der Witwenkasse, sofern für alle Zahlungen ein Zinsfuß von 4 Prozent angenommen wird?

A. Der End- oder Nachwert (A) der jährlichen Einlagen des Versicherungsnehmers bestand in dem Betrage, bis auf welchen diese während einer Lebensdauer von 18 Jahren angewachsen waren, zuzüglich der Zinseszinsen, welche das angesammelte Kapital bis zum Ableben der Witwe, also nach weiteren 9 Jahren eingetragen hatte. Darnach wird man die Gleichung anzuwenden haben:

$$A = \frac{300 \times 1{,}04 \times (1{,}04^{18} - 1)}{0{,}04} \times 1{,}04^{9},$$

oder auch, wenn man den während der letzten 9 Jahre entstandenen Zuwachs des Schlußwertes der Einlagen in den Zähler der Gleichung einstellt und diese entsprechend zusammenzieht:

$$A = \frac{300 \times 1{,}04^{9+1} \times (1{,}04^{18} - 1)}{0{,}04}$$

Die Rechnung ergibt dann Folgendes:

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}04 &= 0{,}0170333 \\
&\quad \times 10 \\
\log. 1{,}04^{10} &= \mathbf{0{,}1703330} \\
\log. 1{,}04^{18} &= 0{,}3065994 \\
\text{num.} \log. 1{,}04^{18} &= 2{,}0258132 \\
\text{num.} \log. 1{,}04^{18} - 1 &= 1{,}0258132 \\
\log. (1{,}04^{18} - 1) &= \mathbf{0{,}0110682} \\
\log. 0{,}04 &= \mathbf{0{,}6020600 - 2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 300 &= 2{,}4771213 \\
+ \log. 1{,}04^{10} &= 0{,}1703330 \\
+ \log. (1{,}04^{18} - 1) &= 0{,}0110682 \\
&\quad 2{,}6585225 \\
- \log. 0{,}04 &= 0{,}6020600 - 2 \\
&\quad 4{,}0564625 \\
\text{num.} &= 11\,388{,}39 \\
A &= \mathbf{11\,388{,}39} \text{ Mark.}
\end{aligned}$$

Um dann den End- oder Nachwert (A_1) der von der Witwenkasse während 9 Jahren gezahlten Witwengehalte festzustellen, hat man nach bekanntem Verfahren anzusetzen:

$$A_1 = \frac{1\,000 \times 1{,}04 \times (1{,}04^{9} - 1)}{0{,}04}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}04 &= \mathbf{0{,}0170333} \\
&\quad \times 9 \\
\log. 1{,}04^{9} &= 0{,}1532997 \\
\text{num.} \log. 1{,}04^{9} &= 1{,}4233107 \\
\text{num.} \log. 1{,}04^{9} - 1 &= 0{,}4233107 \\
\log. (1{,}04^{9} - 1) &= \mathbf{0{,}6266591 - 1} \\
\log. 0{,}04 &= \mathbf{0{,}6020600 - 2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1\,000 &= 3{,}0000000 \\
+ \log. 1{,}04 &= 0{,}0170333 \\
+ \log. (1{,}04^{9} - 1) &= 0{,}6266591 - 1 \\
&\quad 2{,}6436924 \\
- \log. 0{,}04 &= 0{,}6020600 - 2 \\
&\quad 4{,}0416324 \\
\text{num.} &= 11\,006{,}07 \\
A_1 &= \mathbf{11\,006{,}07} \text{ Mark.}
\end{aligned}$$

Somit resultiert ein Einnahme-Überschuß zu Gunsten der Witwenkasse von $11\,388{,}39 - 11\,006{,}07 = \mathbf{382{,}32}$ Mark.

Anmerkung. Werden die behandelten beiden Gleichungen einander gegenübergestellt, so hat man:

$$A - A_1 = \frac{300 \times 1{,}04^{9+1} \times (1{,}04^{18} - 1)}{0{,}04} - \frac{1\,000 \times 1{,}04 \times (1{,}04^{9} - 1)}{0{,}04}$$

Wenn man sodann beiderseitig aus den Zählern die einfache Größe von 1,04, aus den Nennern die Größe von 0,04 auslöst und als Bruch mit der verbleibenden

Differenz multipliziert, so lässet sich die Rechnung (in Folge Wegfalles einiger Logarithmierungen) noch vereinfachen. Denn es wird auf diesem Wege:

$$A - A_1 = \{[300 \times 1{,}04^9 \times (1{,}04^{18} - 1)] - [1\,000 \times (1{,}04^9 - 1)]\} \times \frac{1{,}04}{0{,}04}$$

Und die weitere Rechnung ergibt:

$\log. 300 = 2{,}4771213$
$+ \log. 1{,}04^9 = 0{,}1532997$
$+ \log. (1{,}04^{18} - 1) = 0{,}0110682$
$2{,}6414892$
num. $= 438{,}01531$

$\log. 1\,000 = 3{,}0000000$
$+ \log. (1{,}04^9 - 1) = 0{,}6266591 - 1$
$2{,}6266591$
num. $= 423{,}31058$

Differenz der numeri $= 14{,}70473$

Multipliziert man diese mit $\frac{1{,}04}{0{,}04} = 26$, so folgt:

$14{,}70473 \times 26 =$ **382,32** Mark (wie oben).

Zweite Gruppe.

(Gegeben: r, p, und n. Gesucht: a. Anwendung der Formeln XIV. a und

$$\text{XV. a:} \begin{cases} (\text{Ns}):\ a = \dfrac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n\,.\,0{,}0p} \\ (\text{Vs}):\ a = \dfrac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-1}\,.\,0{,}0p} \end{cases}$$

[Vgl. die Aufgaben 124—126, 143 und 148.]

163. Es will Jemand eine 16jährige, am Ende eines jeden Jahres fällige Rente von 1 875 Mark käuflich erwerben. Wie groß wird das Kapital (die Mise) sein, welches zu diesem Zwecke einzuzahlen ist, wenn ein Zinsfuß von $3^1/_4$ Prozent angenommen wird?

A.

$$a = \frac{1\,875 \times (1{,}0325^{16} - 1)}{1{,}0325^{16} \times 0{,}0325}$$

$\log. 1{,}0325 = 0{,}0138901$
$\times 16$
$\log. 1{,}0325^{16} =$ **0,2222416**
num. $\log. 1{,}0325^{16} = 1{,}6681750$
num. $\log. 1{,}0325^{16} - 1 = 0{,}6681750$
$\log. (1{,}0325^{16} - 1) =$ **0,8248902 — 1**
$\log. 0{,}0325 =$ **0,5118834 — 2**

$\log. 1\,875 = 3{,}2730013$
$+ \log. (1{,}0325^{16} - 1) = 0{,}8248902 - 1$
$3{,}0978915$
$\log. 1{,}0325^{16} = 0{,}2222416$
$+ \log. 0{,}0325 = 0{,}5118834 - 2$
$- 0{,}7341250 - 2$
$4{,}3637665$
num. $= 23\,108{,}19$
$a =$ **23 108,19** Mark.

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$a = \frac{1\,875 \times 0{,}6681725 \times 0{,}5994584}{0{,}0325} = \frac{751{,}01551}{0{,}0325} = \mathbf{23\,108{,}17}\ \text{Mark.}$$

164. Ein Landwirt, welcher eine vertragsmäßig gesicherte, 20 Jahre lang am Ende jeden Jahres beziehbare Rente von 500 Mark zu beanspruchen hat, will diese, um über die zur Durchführung von Meliorations-Anlagen erforderlichen Mittel verfügen zu können, veräußern. Wenn nun ein Zinsfuß von $3^1/_2$ Prozent zu Grunde gelegt wird: Wie hoch beläuft sich dann die Verkaufssumme?

A.

$$a = \frac{500 \times (1{,}035^{20} - 1)}{1{,}035^{20} \times 0{,}035}$$

log. 1,035 = 0,0149403	log. 500 = 2,6989700
× 20	+ log. (1,035^{20} — 1) = 0,9955408 — 1
log. 1,035^{20} = **0,2988060**	2,6945108
num. log. 1,035^{20} = 1,9897846	log. 1,035^{20} = 0,2988060
num. log. 1,035^{20}—1 = 0,9897846	+ log. 0,035 = 0,5440680 — 2
log. (1,035^{20}—1) = **0,9955408—1**	— 0,8428740 — 2
log. 0,035 = **0,5440680—2**	3,8516368
	num. = 7 106,19
	a = **7 106.19** Mark.[1]

165. Wie hoch berechnet sich das Einstandskapital (Mise), welches zur Sicherung einer am Anfange jeden Jahres zahlbaren Leibrente von 1 000 Mark dann beansprucht wird, wenn die wahrscheinliche Lebensdauer des Antragstellers nach den Mortalitäts-Tabellen noch 21 Jahre beträgt, und wenn die Versicherungsanstalt ihrer Berechnung einen Zinsfuß von $4^1/_2$ Prozent zu Grunde legt?[2])

A. Im vorliegenden Falle ist Folgendes zu beachten:

Wenn die Ermittlung der Einkaufssumme auf der Voraussetzung beruht, daß der Versicherungsnehmer noch 21 Jahre zurücklegt, der Rentenlauf aber schon mit dem Zeitpunkte des Vertrags-Abschlusses, also am Anfang des ersten Jahres beginnt so erstreckt sich die Verpflichtung der Versicherungsanstalt auf im Ganzen 22 Ratenzahlungen. Würde nun der Versicherungsnehmer von vornherein die an jenem Termine fällige erste Rate beziehen, so müßte sich das von ihm einzuzahlende Kapital berechnen nach der Gleichung:

$$a = \frac{1\,000 \times (1{,}045^{22} - 1)}{1{,}045^{22-1} \times 0{,}045}$$

Die in diesem Verfahren ausgedrückte Art des Abkommens entspricht aber dann, wenn es sich um bare Einlagen handelt, aus naheliegenden Gründen nicht der Gepflogenheit. Die Regel muß vielmehr sein, daß der Versicherungsnehmer die erste Rate nicht schon zur Zeit der Vereinbarung, also nicht sofort empfängt, der Termin für den ersten Rentenbezug sich vielmehr auf die Wende zwischen dem ersten und zweiten Jahre verschiebt. Woraus dann folgt, daß alsdann von dem nach angegebener Gleichung ermittelten Barwert der Rente der Betrag der ersten Rate derselben (1 000 Mark) in Abzug gebracht werden müßte. Die betreffende Gleichung würde also lauten:

$$a = \frac{1\,000 \times (1{,}045^{22} - 1)}{1{,}045^{22-1} \times 0{,}045} - 1\,000$$

[1]) Der Diskont-Abzug beträgt: (20 × 500) — 7 106,19 = 2 893,81 Mark. — Man beachte die Ausführungen zur Sonder-Aufgabe 234.

[2]) Die nachstehende, einfach der Behandlung von Zeitrenten folgende Rechnungsweise deckt sich nicht genau mit dem Seitens der Versicherungsanstalten gehandhabten exakteren Verfahren. Sie führt darum nur zu annähernd zutreffenden, immerhin der Orientierung dienenden Ergebnissen.

Faßt man das Verhältnis also auf, so erkennt man, daß die Reihe der Ratenzahlungen in einer nachschüssigen, 21 Jahre lang laufenden Rente aufgeht, deren Barwert man erhält aus der Gleichung:

$$a = \frac{1\,000 \times (1{,}045^{21} - 1)}{1{,}045^{21} \times 0{,}045}$$

Die Ergebnisse der nach letzteren beiden Ansätzen durchgeführten Rechnung müssen somit genau übereinstimmen.

Nach dieser Darstellung gestaltet sich das Verfahren wie folgt:

$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$
$\times 21$
$\log. 1{,}045^{21} = \mathbf{0{,}4014423}$
$\text{num.} \log. 1{,}045^{21} = 2{,}5202423$
$\text{num.} \log. 1{,}045^{21} - 1 = 1{,}5202423$
$\log. (1{,}045^{21} - 1) = \mathbf{0{,}1819127}$
$\log. 0{,}045 = \mathbf{0{,}6532125 - 2}$

$\log. 1\,000 = 3{,}0000000$
$+ \log. (1{,}045^{21} - 1) = 0{,}1819127$
$3{,}1819127$
$\log. 1{,}045^{21} = 0{,}4014423$
$+ \log. 0{,}045 = 0{,}6532125 - 2$
$- 1{,}0546548 - 2$
$4{,}1272579$
$\text{num.} = 13\,404{,}72$
$a = \mathbf{13\,404{,}72}$ Mark.

Mit Hilfe der Tafeln I und II:
(Nach dem ersten Ansatz.)

$$a = \frac{1\,000 \times 1{,}633652 \times 0{,}3967874}{0{,}045} - 1\,000 = \frac{1\,633{,}652 \times 0{,}3967874}{0{,}045} - 1\,000$$
$$= 14\,404{,}72 - 1\,000 = \mathbf{13\,404{,}72} \text{ Mark.}$$

166. In der Absicht, eine auf seinem Besitztum lastende, sich über 28 Jahre erstreckende, also 28 Mal zu leistende vorschüssige Rente im Betrage von 378 Mark abzulösen, sieht sich der Verpflichtete vor die Frage gestellt, welches Kapital er zu diesem Zwecke zu zahlen haben würde. Wie beantwortet sich diese Frage bei Annahme eines Zinsfußes von 3 Prozent?

A.
$$a = \frac{378 \times (1{,}03^{28} - 1)}{1{,}03^{28-1} \times 0{,}03}$$

$\log. 1{,}03 = 0{,}0128372$
$\times 28$
$\log. 1{,}03^{28} = 0{,}3594416$
$\text{num.} \log. 1{,}03^{28} = 2{,}2879242$
$\text{num.} \log. 1{,}03^{28} - 1 = 1{,}2879242$
$\log. (1{,}03^{28} - 1) = \mathbf{0{,}1098903}$
$\log. 1{,}03^{27} = \mathbf{0{,}3466044}$
$\log. 0{,}03 = \mathbf{0{,}4771213 - 2}$

$\log. 378 = 2{,}5774918$
$+ \log. (1{,}03^{28} - 1) = 0{,}1098903$
$2{,}6873821$
$\log. 1{,}03^{27} = 0{,}3466044$
$+ \log 0{,}03 = 0{,}4771213 - 2$
$- 0{,}8237257 - 2$
$3{,}8636564$
$\text{num.} = 7\,305{,}60$
$a = \mathbf{7\,305{,}60}$ Mark.

Einschließlich der am gleichen Zeitpunkte fälligen ersten Rate der Jahresrente.

Anmerkung: Zur Kontrolle kann folgende Rechnung dienen:
Es ist der Endwert der Raten nach 28 Jahren (Formel XV):

$$\frac{378 \times 1{,}03 \times (1{,}03^{28} - 1)}{0{,}03} = 16\,714{,}68 \text{ Mark.}$$

Wird dieser Betrag auf die Gegenwart diskontiert, so erhält man:

$$16\,714{,}68 \times \frac{1}{1{,}03^{28}} = \mathbf{7\,305{,}60} \text{ Mark (wie oben).}$$

Dritte Gruppe.

(Gegeben: a, p und n. Gesucht: r. Anwendung der Formeln XIV. b und

$$\text{XV. b.:} \begin{cases} \text{(Ns): } r = \dfrac{a \cdot 1{,}0p^n \cdot 0{,}0p}{1{,}0p^n - 1} \\ \text{(Vs): } r = \dfrac{a \cdot 1{,}0p^n \cdot 0{,}0p}{1{,}0p \cdot (1{,}0p^n - 1)} \end{cases}$$

[Vgl. die Aufgaben 127—133, 144, 149 und 150.]

167. Um eine 15 Jahre lang zu beziehende, am Ende jeden Jahres fällige Rente zu genießen, legt Jemand bei einer Rentenanstalt ein Kapital (Mise) von 22 000 Mark ein. Wie hoch wird sich der Betrag der Jahresrente belaufen, wenn die Anstalt einen Zins von $4^1/_4$ Prozent berechnet?

A.
$$r = \frac{22\,000 \times 1{,}0425^{15} \times 0{,}0425}{1{,}0425^{15} - 1}$$

$\log. 1{,}0425 = 0{,}0180761$
$\times 15$
$\log. 1{,}0425^{15} = 0{,}2711415$
$\text{num.}\log. 1{,}0425^{15} = 1{,}8669878$
$\text{num.}\log. 1{,}0425^{15} - 1 = 0{,}8669878$
$\log. (1{,}0425^{15} - 1) = 0{,}9380129 - 1$
$\log. 0{,}0425 = 0{,}6283889 - 2$

$\log. 22\,000 = 4{,}3424227$
$+ \log. 1{,}0425^{15} = 0{,}2711415$
$+ \log. 0{,}0425 = 0{,}6283889 - 2$
$3{,}2419531$
$- \log. (1{,}0425^{15} - 1) = 0{,}9380129 - 1$
$3{,}3039402$
$\text{num.} = 2\,013{,}45$
$r = \mathbf{2013{,}45}$ Mark.

Mit Hilfe der Tafel I:

$$r = 935 \times \frac{1{,}8669855}{0{,}8669855} = 935 \times 2{,}1534218 = \mathbf{2\,013{,}45} \text{ Mark.}$$

168. Der Besitzer eines durch Erbschaft ihm zugefallenen Kapitales von 36 000 Mark beabsichtigt, dasselbe bei einer Bank derart anzulegen, daß er während 18 Jahren eine am Ende jeden Jahres fällige Rente beziehen, nach Ablauf dieser Zeit aber noch über eine Summe von 45 000 Mark verfügen kann. Wie hoch berechnet sich jene Rente, wenn ein Zinsfuß von $4^3/_4$ Prozent angenommen wird?

A. Hier handelt es sich offenbar um den rechnerischen Nachweis der Größe einer Rente, welche sich unter den gegebenen Bedingungen der Zeitdauer und des Zinsfußes aus einem Kapitale ergibt, welches gleich ist dem Unterschiede zwischen dem Endwerte ($a \cdot 1{,}0p^n$) der während 18 Jahren ausstehenden Einlage von 36 000 Mark und dem Betrage von 45 000 Mark ($a_1 \cdot 1{,}0p^n$), über welchen der Besitzer nach Ablauf der gleichen Frist noch disponieren will. Die aufzustellende Gleichung wird also lauten müssen:

$$r = \frac{(36000 \times 1{,}0475^{18} - 45000) \times 0{,}0475}{1{,}0475^{18} - 1}$$

log. 1,0475 = 0,0201540
× 18
log. 1,0475^18 = **0,3627720**
num. log. 1,0475^18 = 2,3055364
num. log. 1,0475^18 — 1 = 1,3055364
log. (1,0475^18 — 1) = **0,1157890**
log. 0,0475 = **0,6766936—2**

log. 36000 = 4,5563025
+ log. 1,0475^18 = 0,3627720
4,9190745
num. = 82999,30
— 45000,00
37999,30

log. 37999,30 = 4,5797756
+ log. 0,0475 = 0,6766936 — 2
5,2564692 — 2
— log. (1,0475^18 — 1) = 0,1157890
3,1406802
num. = 1382,55
r = **1382,55** Mark.

169. Ein Bauernhofbesitzer beabsichtigt, auf dem Wege der Versicherung für den Zeitpunkt seines Ablebens die Mittel zu beschaffen, welche den zur Übernahme des Gutes berufenen Sohn in den Stand setzen, die pflichtteilberechtigten Geschwister abzufinden und somit der Notwendigkeit einer drückenden Schuldbelastung auszuweichen. Zu diesem Zwecke will der Vater gegen Zahlung einer am Anfange eines jeden Jahres fälligen festen Prämie ein nach seinem Tode verfügbares Kapital von 48000 Mark hinterlassen. Die Lebensversicherungs-Anstalt nimmt nach Maßgabe der Sterblichkeitstabellen eine wahrscheinliche Lebensdauer des Antragsstellers von noch 27 Jahren an und legt ihrer Berechnung einen Zinsfuß von $4^1/_4$ Prozent zu Grunde. Wie hoch beläuft sich alsdann der Betrag der jährlich zu entrichtenden Prämie?[1])

A. Da im vorliegenden Falle der Endwert der Prämienzahlungen gegeben ist, tritt derselbe an die Stelle von $a \,.\, 1{,}0p^n$ der obigen Formel (XV. b.), und lautet somit der Ansatz:

$$r = \frac{48000 \times 0{,}0425}{1{,}0425 \times (1{,}0425^{27} - 1)}$$

log. 1,0425 = **0,0180761**
× 27
log. 1,0425^27 = 0,4880547
num. log. 1,0425^27 = 3,0764843
num. log. 1,0425^27 — 1 = 2,0764843
log. (1,0425^27 — 1) = **0,3173287**
log. 0,0425 = **0,6283889** — 2

log. 48000 = 4,6812412
+ log. 0,0425 = 0,6283889 — 2
3,3096301
log. 1,0425 = 0,0180761
+ log. (1,0425^27 — 1) = 0,3173287
— 0,3354048
2,9742253
num. = 942,378
r = **942,38** Mark.

[1]) Die hier folgende Ausführung liefert ein nur annähernd zutreffendes Resultat. — Vgl. hierzu den Vorbehalt bei Aufgabe 165 (Fußnote). —

Mit Hilfe der Tafeln I und II.

$$r = \frac{48\,000 \times 0,0425}{1,0425 \times 2,0764773} = \frac{2040}{2,1647275} = \mathbf{942,38} \text{ Mark,}$$

oder auch, da $\frac{1}{2,1647275} = 0,4619519$ ist:

$$r = \ldots\ 2040 \times 0,4619519 = \mathbf{942,38} \text{ Mark.}$$

170. A. erwirbt eine Liegenschaft von B. unter dem vertragsmäßigen Vorbehalte, daß er auf die verabredete Kaufsumme von 78000 Mark sofort nur 52000 Mark in bar, dagegen den Rest von 26000 Mark innerhalb 12 Jahren in Form einer am Anfange jeden Jahres fälligen Rente bezahlt. Der Verkäufer beansprucht die Erlegung der ersten Rate schon mit dem Inkrafttreten des Vertrages und berechnet einen Zinsfuß von 5 Prozent. Welchen Betrag hat der Schuldner hiernach jährlich zu entrichten?

A. Es ist hier zu beachten, daß der Barwert der vom Verkäufer verlangten Rentenbeträge gleich der Restschuld von 26000 Mark sein muß, und daß der Käufer, falls er die Rente von dritter Stelle erwerben wollte, jenes Kapital einzuzahlen haben würde. Darnach ergibt sich:

$$r = \frac{26\,000 \times 1,05^{12} \times 0,05}{1,05 \times (1,05^{12} - 1)}$$

$\log. 1,05 = 0,0211893$
$\times 12$
$\log. 1,05^{12} = 0,2542716$
$\text{num.} \log. 1,05^{12} = 1,7958562$
$\text{num.} \log. 1,05^{12} - 1 = 0,7958562$
$\log. (1,05^{12} - 1) = 0,9008346 - 1$
$\log. 0,05 = 0,6989700 - 2$

$\log. 26\,000 = 4,4149733$
$+ \log. 1,05^{12} = 0,2542716$
$+ \log. 0,05 = 0,6989700 - 2$
$5,3682149 - 2$

$\log. 1,05 = 0,0211893$
$+ \log. (1,05^{12} - 1) = 0,9008346 - 1$
$- 0,9220239 - 1$
$3,4461910$
$\text{num.} = 2\,793,77$
$r = \mathbf{2\,793,77}$ Mark.

171. In Voraussicht der Notwendigkeit, nach Ablauf von 12 Jahren während eines Zeitraums von 7 Jahren regelmäßig einen außergewöhnlichen jährlichen Aufwand von 2500 Mark bestreiten zu müssen, gedenkt ein Unternehmer mit einer Rentenanstalt das Abkommen zu treffen, daß er an dieselbe während der Vorzeit von 12 Jahren am Anfange eines jeden Jahres einen bestimmten Betrag einzahlt, indessen ihm die Anstalt den Bezug jener Summe in Form von Jahresrenten, welche je am Ende der späteren 7 Jahre fällig werden, sichert. Welchen Betrag hat der Unternehmer jährlich zu entrichten, wenn ein Zinsfuß von 4 Prozent zu Grunde gelegt wird?

A. Die Behandlung der Aufgabe erheischt eine Feststellung des Vor- oder Barwertes der 7 Jahre lang laufenden nachschüssigen Rente von 2500 Mark, und sodann die Berechnung der dem gefundenen Betrage entsprechenden, während 12 Jahren zu zahlenden vorschüssigen Rente. (Direktes Verfahren).

Der Barwert (a) der Rente von 2500 Mark ergibt sich aus der Gleichung (XIV. a.):

$$a = \frac{2\,500 \times (1{,}04^7 - 1)}{1{,}04^7 \times 0{,}04}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}04 &= 0{,}0170333 \\
&\quad \times 7 \\
\log. 1{,}04^7 &= \mathbf{0{,}1192331} \\
\text{num.}\log. 1{,}04^7 &= 1{,}3159309 \\
\text{num.}\log. 1{,}04^7 - 1 &= 0{,}3159309 \\
\log. (1{,}04^7 - 1) &= \mathbf{0{,}4995921 - 1} \\
\log. 0{,}04 &= \mathbf{0{,}6020600 - 2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 2\,500 &= 3{,}3979400 \\
+ \log. (1{,}04^7 - 1) &= 0{,}4995921 - 1 \\
&\quad 2{,}8975321 \\
\log. 1{,}04^7 = 0{,}1192331 & \\
+ \log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2 & \\
& - 0{,}7212931 - 2 \\
&\quad 4{,}1762390 \\
\text{num.} &= 15\,005{,}10 \\
a &= \mathbf{15\,005{,}10} \text{ Mark.}
\end{aligned}$$

Der Betrag der vorschüssigen Rente (r), welche diesem nunmehr als Endwert aufzufassenden Kapitale entspricht, berechnet sich nach der Gleichung (XV. b [Vs]):

$$r = \frac{15\,005{,}10 \times 0{,}04}{1{,}04 \times (1{,}04^{12} - 1)}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}04 &= \mathbf{0{,}0170333} \\
&\quad \times 12 \\
\log. 1{,}04^{12} &= 0{,}2043996 \\
\text{num.}\log. 1{,}04^{12} &= 1{,}6010305 \\
\text{num.}\log. 1{,}04^{12} - 1 &= 0{,}6010305 \\
\log. (1{,}04^{12} - 1) &= \mathbf{0{,}7788966 - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 15\,005{,}10 &= 4{,}1762390 \text{ (w. o.)} \\
+ \log. 0{,}04 &= 0{,}6020600 - 2 \text{ (w. o.)} \\
&\quad 2{,}7782990 \\
\log. 1{,}04 = 0{,}0170333 & \\
+ \log. (1{,}04^{12} - 1) = 0{,}7788966 - 1 & \\
& - 0{,}7959299 - 1 \\
&\quad 2{,}9823691 \\
\text{num.} &= 960{,}22 \\
r &= \mathbf{960{,}22} \text{ Mark.}
\end{aligned}$$

Zu dem verlangten Nachweise hätte übrigens auch die Aufstellung nur einer Gleichung führen können. (Indirektes Verfahren.) Bezeichnet man nämlich den gesuchten Betrag der 12 Jahre lang laufenden vorschüssigen Rente wiederum mit r, so hat man für deren Endwert (XV):

$$\frac{r \times 1{,}04 \times (1{,}04^{12} - 1)}{0{,}04}$$

Andererseits ergibt sich für den Barwert der 7 Jahre laufenden nachschüssigen Rente (XIV. a.):

$$\frac{2\,500 \times (1{,}04^7 - 1)}{1{,}04^7 \times 0{,}04}$$

Somit ist:

$$\frac{r \times 1{,}04 \times (1{,}04^{12} - 1)}{0{,}04} = \frac{2\,500 \times (1{,}04^7 - 1)}{1{,}04^7 \times 0{,}04}$$

$$r \times 1{,}04 \times (1{,}04^{12} - 1) = \frac{2\,500 \times (1{,}04^7 - 1)}{1{,}04^7}$$

$$r = \frac{2\,500 \times (1{,}04^7 - 1)}{1{,}04^7 \times 1{,}04 \times (1{,}04^{12} - 1)} \quad \frac{2\,500 \times (1{,}04^7 - 1)}{1{,}04^8 \times (1{,}04^{12} - 1)}$$

Unter Benutzung der bereits aufgeführten Logarithmen berechnet sich hiernach der Betrag von r also:

$$\begin{aligned} \log. 2\,500 &= 3{,}3979400 \\ + \log. (1{,}04^7 - 1) &= 0{,}4995921 - 1 \\ &\overline{\;2{,}8975321\;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}04^8 &= 0{,}1362664 \\ + \log. (1{,}04^{12} - 1) &= 0{,}7788966 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- 0{,}9151630 - 1 \\ &\overline{\;2{,}9823691\;} \\ \text{num.} &= 960{,}22 \text{ (wie oben).} \end{aligned}$$

Anmerkung. Wie leicht einzusehen, lassen sich Aufgaben dieser Art auch mit Zuhilfenahme der bezüglichen Formel für aufgeschobene Renten (XXI. b.) lösen. Man vergleiche hierzu die Aufgaben 201 und 208.

Vierte Gruppe.

(Gegeben: a, r und p. Gesucht: n. Anwendung der Formeln XIV. c und XV. c:

$$\begin{cases} (\text{Ns}):\; n = \dfrac{\log. r - \log. [r - (a\,.\,0{,}0p)]}{\log. 1{,}0p} \;[1] \\[2ex] (\text{Vs}):\; n = \dfrac{\log. r - \log. [r\,.\,1{,}0p - (a\,.\,0{,}0p)]}{\log. 1{,}0p} + 1 \;[1] \end{cases}$$

)

[Vgl. die Aufgaben 134—139, 141, 145, 146, 152 und 153.]

172. Auf Grund einer Einlage (Mise) von 27 500 Mark will Jemand eine am Ende jeden Jahres fällige Rente von 2 400 Mark erwerben. Wieviel Jahre hindurch wird er diese Rente beziehen können, wenn die Bank, mit welcher ein bezügliches Abkommen getroffen werden soll, $3^3/_4$ Prozent Zinsen in Anrechnung bringt?

A.

$$\begin{aligned} n &= \frac{\log. 2\,400 - \log. [2\,400 - (27\,500 \times 0{,}0375)]}{\log. 1{,}0375} \\ &= \frac{\log. 2\,400 - \log. (2\,400 - 1\,031{,}25)}{\log. 1{,}0375} \\ &= \frac{\log. 2\,400 - \log. 1\,368{,}75}{\log. 1{,}0375} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. 2\,400 &= 3{,}3802112 \\ - \log. 1\,368{,}75 &= 3{,}1363242 \\ &\overline{\;0{,}2438870\;} \\ \log. 1{,}0375 &= 0{,}0159881 \\ &= \frac{2438870}{159881} = \mathbf{15}{,}2543, \text{ oder rund } \mathbf{15^1/_4} \text{ Jahre.} \end{aligned}$$

---

[1] Wenn, statt des Barwertes a, der Endwert A gegeben ist, nach den Formeln XII. c_1 und XIII. c_1 (S. 64 Fußnote):

$$n = \frac{\log. \left(\dfrac{A\,.\,0{,}0p}{r} + 1\right)}{r\,.\,1{,}0p} \quad \text{bezw. } n = \frac{\log. \left(\dfrac{A\,.\,0{,}0p}{r\,.\,1{,}0p} + 1\right)}{\log. 1{,}0p}$$

Logarithmische Behandlung der Division:

$$\begin{aligned} \log. 0{,}2438870 &= 0{,}3871885 - 1 \\ -\log. 0{,}0159881 &= \underline{0{,}2037968 - 2} \\ & 1{,}1833917 \\ \text{num.} &= \mathbf{15}{,}2543 \text{ Jahre (wie oben).} \end{aligned}$$

Wird nun die Frage gestellt, wie sich die Kontrahenten am Schlusse des 15ten Jahres hinsichtlich des noch ausstehenden Jahresbruchteils $\frac{2543}{10000}$ abzufinden haben, so ist Folgendes zu erwägen:

Der Endwert des Einstands-Kapitales von 27 500 Mark ist nach Ablauf von 15 Jahren:

$$\begin{aligned} &27\,500 \times 1{,}0375^{15} \\ \log. 27\,500 &= 4{,}4393327 \\ +\log. 1{,}0375^{15} &= \underline{0{,}2398215} \\ & 4{,}6791542 \\ \text{num.} &= 47\,769{,}90 \text{ Mark.} \end{aligned}$$

Hingegen ist am gleichen Zeitpunkte der Endwert der jährlich gezahlten Rente (XIV):

$$\begin{aligned} &\frac{2\,400 \times (1{,}0375^{15} - 1)}{0{,}0375} \\ \log. 2\,400 &= 3{,}3802112 \\ +\log. (1{,}0375^{15} - 1) &= \underline{0{,}8675186 - 1} \\ & 3{,}2477298 \\ -\log. 0{,}0375 &= \underline{0{,}5740313 - 2} \\ & 4{,}6736985 \\ \text{num.} &= 47\,173{,}54 \text{ Mark.} \end{aligned}$$

Darnach hat die Bank an den Rentenempfänger mit Ablauf von 15 Jahren noch zu zahlen: 47 769,90 — 47 173,54 = 596,36 Mark, so daß sich also der Betrag der letzten Rate von 2 400 auf 2 996,36 Mark erhöht.

Wenn aber der Rest der Rente erst am Schlusse des nächstfolgenden Jahres gezahlt wird, dann wächst derselbe bis dahin auf 596,36 × 1,0375 = 618,72 Mark.

Wollte man jene Berechnung der Endwerte der beiderseitigen Leistungen auf den Schluß des 16ten Jahres beziehen, so erhielte man ein „Voraus" für die Bank von 1 781,28 Mark, so daß ihr noch die Pflicht der Zahlung von 2 400 — 1 781,28 = 618,72 Mark verbliebe, ein Betrag, dessen Diskontierung auf den Schluß des 15ten Jahres wiederum 596,36 Mark ergibt.

173. Während wieviel Jahren ist der Bezug einer nachschüssigen Rente von 2 875 Mark zu beanspruchen, wenn als Gegenwert ein Kapital von 40 000 Mark eingezahlt und ein Zins von $4^1/_4$ Prozent berechnet wird?

A. $$n = \frac{\log. 2\,875 - \log. [2\,875 - (40\,000 \times 0{,}0425)]}{\log. 1{,}0425}$$

$$= \frac{\log. 2\,875 - \log. (2\,875 - 1\,700)}{\log. 1{,}0425}$$

$$= \frac{\log. 2\,875 - \log. 1\,175}{\log. 1{,}0425}$$

$$\begin{aligned} \log. 2\,875 &= 3{,}4586378 \\ -\log. 1\,175 &= 3{,}0700379 \\ & 0{,}3885999 \\ \log. 1{,}0425 &= 0{,}0180761 \end{aligned}$$

$$n = \frac{3885999}{180761} = \mathbf{21}{,}498, \text{ oder nahezu } \mathbf{21}\,^1/_2 \text{ Jahre.}$$

Logarithmische Ausführung der Division:

$$\begin{aligned} \log. 0{,}3885999 &= 0{,}5895027 - 1 \\ -\log. 0{,}0180761 &= 0{,}2571047 - 2 \\ & 1{,}3323980 \\ \text{num.} &= \mathbf{21}{,}498 \text{ Jahre (wie oben).} \end{aligned}$$

Hiernach bezieht der Einleger während 21 Jahren je 2 875 Mark und überdies am Schlusse des 21ten Jahres einen Zuschuß-Betrag, welcher auf den Jahresbruchteil 0,498 entfällt. Die Berechnung dieses Mehrbetrages erfolgt nach dem in Aufgabe 172 dargelegten Verfahren.

174. Der Käufer eines Besitztums hat sich vertragsmäßig verpflichtet, eine Kaufgeld-Restsumme von 36 000 Mark in Form einer am Anfange eines jeden Jahres fälligen und schon mit dem Zeitpunkte des Vertragsabschlusses beginnenden Rente von 3 500 Mark abzuzahlen. Wenn nun hierfür ein Zinsfuß von 4 Prozent festgesetzt wurde: Wieviel Jahre hindurch wird dann der Verkäufer die Rente zu beziehen haben?

A. $$n = \frac{\log. 3\,500 - \log. [3\,500 \times 1{,}04 - (36\,000 \times 0{,}04)]}{\log. 1{,}04} + 1$$

$$= \frac{\log. 3\,500 - \log. (3\,640 - 1\,440)}{\log. 1{,}04} + 1$$

$$= \frac{\log. 3\,500 - \log. 2\,200}{\log. 1{,}04} + 1$$

$$\begin{aligned} \log. 3\,500 &= 3{,}5440680 \\ -\log. 2\,200 &= 3{,}3424227 \\ & 0{,}2016453 \\ \log. 1{,}04 &= 0{,}0170333 \end{aligned}$$

$$n - 1 = \frac{2016453}{170333} = 11{,}8383$$

$$n = 11{,}8383 + 1 = \mathbf{12}{,}8383 \text{ Jahre.}$$

Division logarithmisch behandelt:

$$\begin{aligned} \log. 0{,}2016453 &= 0{,}3045881 - 1 \\ -\log. 0{,}0170333 &= 0{,}2312988 - 2 \\ & 1{,}0732893 \\ \text{num.} &= 11{,}8383 \\ +1 &= \mathbf{12}{,}8383 \text{ Jahre (wie oben).} \end{aligned}$$

Um schließlich festzustellen, wie sich die gegenseitigen Ansprüche in Anbetracht des Jahresbruchteiles 0,8383 gestalten, wird man nachzuweisen haben, wie hoch sich die mit Ablauf des 12ten Jahres noch zu zahlende Rate nach Maßgabe des verkürzten Zeitraumes beläuft. Alsdann hat man für die Endwerte:

Einerseits (Rest-Kaufsumme): $36\,000 \times 1{,}04^{12}$

Andererseits (Vorschüssige, 12 Jahre laufende Rente):

$$\frac{3\,500 \times 1{,}04 \times (1{,}04^{12} - 1)}{0{,}04} \text{ (XV) oder: } 87\,500 \times 1{,}04 \times (1{,}04^{12} - 1)$$

Die logarithmische Berechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \log. 36\,000 &= 4{,}5563025 \\ + \log. 1{,}04^{12} &= 0{,}2043996 \\ & \quad 4{,}7607021 \\ \text{num.} &= 57\,637{,}09 \text{ Mark.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. 87\,500 &= 4{,}9420081 \\ + \log. 1{,}04 &= 0{,}0170333 \\ + \log. (1{,}04^{12} - 1) &= 0{,}7788967 - 1 \\ & \quad 4{,}7379381 \\ \text{num.} &= 54\,693{,}80 \text{ Mark.} \end{aligned}$$

Somit beläuft sich die dem Jahresbruchteil 0,8383 entsprechende 13te, nach Ablauf des 12ten Jahres fällige Rate auf 57 637,09 — 54 693,80 = 2 943,29 Mark.

175. B. möchte mit einer Rentenanstalt die Übereinkunft treffen, daß er derselben regelmäßig am Anfange jeden Jahres den Betrag von 600 Mark einzahlt, um später von ihr eine 15 Jahre hindurch laufende nachschüssige Rente von 2 500 Mark beziehen zu können. Auf wie viele Jahre werden sich seine Zahlungen erstrecken müssen, wenn der Berechnung ein Zinsfuß von $4^1/_2$ Prozent zu Grunde gelegt wird?

A. Die schwebende Frage beantwortet sich durch Berechnung des Barwertes der von der Rentenanstalt auszuzahlenden 15jährigen Rente von 2 500 Mark, und dann durch den Nachweis der Zahl der Jahre, nach deren Ablauf die je 600 Mark betragenden Einzahlungen des B. diesen Wert erreichen werden.

Darnach ergibt sich zunächst Folgendes:

$$a = \frac{2\,500 \times (1{,}045^{15} - 1)}{1{,}045^{15} \times 0{,}045}$$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}045 &= 0{,}0191163 \\ & \quad \times 15 \\ \log. 1{,}045^{15} &= 0{,}2867445 \\ \text{num. log. } 1{,}045^{15} &= 1{,}9352830 \\ \text{num.log.} 1{,}045^{15} - 1 &= 0{,}9352830 \\ \log. (1{,}045^{15} - 1) &= 0{,}9709430 - 1 \\ \log. 0{,}045 &= 0{,}6532125 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. 2\,500 &= 3{,}3979400 \\ + \log. (1{,}045^{15} - 1) &= 0{,}9709430 - 1 \\ & \quad 3{,}3688830 \\ \log. 1{,}045^{15} &= 0{,}2867445 \\ + \log. 0{,}045 &= 0{,}6532125 - 2 \\ & - 0{,}9399570 - 2 \\ & \quad 4{,}4289260 \\ \text{num.} &= 26\,848{,}87 \\ a &= \mathbf{26\,848{,}87} \text{ Mark.} \end{aligned}$$

Diesem Betrage, als Endwert (A) betrachtet, entspricht eine Zeitdauer des Bezuges der jährlichen Einzahlungen von 600 Mark nach der Formel XIII. c_1 (Sparkassen-Formel S. 65):

$$n = \frac{\log.\left(\frac{26\,848{,}87 \times 0{,}045}{600 \times 1{,}045} + 1\right)}{\log.\,1{,}045}$$

$$= \frac{\log.\left(\frac{1\,208{,}1992}{627} + 1\right)}{\log.\,1{,}045}$$

$$= \frac{\log.\,(1{,}9269525 + 1)}{\log.\,1{,}045}$$

$$= \frac{\log.\,2{,}9269525}{\log.\,1{,}045}$$

Die Rechnung ergibt somit:

$$\log.\,2{,}9269525 = 0{,}4664157$$

$$\log.\,1{,}045 = 0{,}0191163$$

$$n = \frac{4664157}{191163} = \mathbf{24}{,}399, \text{ oder rund } \mathbf{24}^2/_5 \text{ Jahre.}$$

Hiernach hat B. 24 Jahre lang die Einkaufs-Rente von 600 Mark, und außerdem am Schlusse der Frist noch eine Zulage zu entrichten, welche dem Jahresbruchteil 0,399 entspricht und nach dem oben (Aufgabe 172) angegebenen Verfahren zu ermitteln ist.

Anmerkung. Will man der Aufgabe auf dem Wege einer zusammenfassenden Gleichung näher treten, in welche einerseits der Endwert (A) der vorschußweise einzuzahlenden Raten mit der unbekannten Potenz n, andererseits der Barwert (a) eingestellt wird, so hat man:

$$\frac{600 \times 1{,}045 \times (1{,}045^n - 1)}{0{,}045} = \frac{2\,500 \times (1{,}045^{15} - 1)}{1{,}045^{15} \times 0{,}045}$$

Die Reduktion dieser Gleichung auf den Wert von n ergibt dann:

$$600 \times 1{,}045 \times (1{,}045^n - 1) = \frac{2\,500 \times (1{,}045^{15} - 1)}{1{,}045^{15}}$$

$$600 \times 1{,}045^{16} \times (1{,}045^n - 1) = 2\,500 \times (1{,}045^{15} - 1)$$

$$1\,213{,}4226 \times 1{,}045^n - 1\,213{,}4226 = 2\,500 \times 1{,}045^{15} - 2\,500$$

$$1\,213{,}4226 \times 1{,}045^n = 4\,838{,}2077 - 2\,500 + 1213{,}4226$$

$$1\,213{,}4226 \times 1{,}045^n = 3\,551{,}6303$$

$$1{,}045^n = \frac{3\,551{,}6303}{1\,213{,}4226} = 2{,}9269525$$

$$n = \frac{\log.\,2{,}9269525}{\log.\,1{,}045} = \frac{0{,}4664158}{0{,}0191163} = \mathbf{24}{,}399 \text{ Jahre (wie oben).}$$

b) Zweite Reihe (176—191).

(Anwendung der Formeln XVI—XVI. c. und XVII.—XVII. c.)

Erste Gruppe.

(Gegeben: r, p, m und n. Gesucht: $A = a \cdot 1{,}0p^n$. Anwendung der

Formeln XVI und XVII:
$$\begin{cases} (Ns): A = \dfrac{r \cdot (1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1)}{0{,}0\frac{p}{m}} \\ (Vs): A = \dfrac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m} \cdot (1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1)}{0{,}0\frac{p}{m}} \end{cases}$$

[Vgl. die Aufgabe 156.]

176. Wie hoch berechnet sich der Wert einer am Ende jeden Halbjahres zu beziehenden Rente von 500 Mark mit Ablauf von 18 Jahren bei Annahme eines Zinsfußes von $3^3/_4$ Prozent?

A. $$A = \frac{500 \times (1{,}0\frac{375}{2}^{2 \times 18} - 1)}{0{,}0\frac{375}{2}}$$

$$1{,}0\frac{375}{2} = 1{,}01875$$

$\log. 1{,}01875 = 0{,}0080676$
$\times 36$
$\log. 1{,}01875^{36} = 0{,}2904336$
$\text{num.}\log. 1{,}01875^{36} = 1{,}9517922$
$\text{num.}\log. 1{,}01875^{36} - 1 = 0{,}9517922$
$\log. (1{,}01875^{36} - 1) = 0{,}9785421 - 1$
$\log. 0{,}01875 = 0{,}2730013 - 2$

$\log. 500 = 2{,}6989700$
$+ \log. (1{,}01875^{36} - 1) = 0{,}9785421 - 1$
$2{,}6775121$
$- \log. 0{,}01875 = 0{,}2730013 - 2$
$4{,}4045108$
$\text{num.} = 25381{,}12$
$A =$ **25381,12** M.

177. Nach Umwandlung einer Reallast in eine während 24 Jahren je am Ende eines Quartals zu beziehende Rente von 230 Mark will der Berechtigte die einzelnen Raten, statt sie regelmäßig abzuheben, gegen eine Vergütung von $3^1/_2$ Prozent bis zur Verfallzeit auf Zinseszinsen anstehen lassen. Welche Kapitalsumme wird dann der Rentengläubiger an diesem Termine zu fordern haben?

A. $$A = \frac{230 \times (1{,}0\frac{3{,}5}{4}^{4 \times 24} - 1)}{0{,}0\frac{3{,}5}{4}}$$

$$1{,}0\frac{3{,}5}{4} = 1{,}00875$$

$\log. 1{,}00875 = 0{,}0037836$
$\times 96$
$\log. 1{,}00875^{96} = 0{,}3632256$
$\text{num.}\log. 1{,}00875^{96} = 2{,}3079458$
$\text{num.}\log. 1{,}00875^{96} - 1 = 1{,}3079458$
$\log. (1{,}00875^{96} - 1) = 0{,}1165897$
$\log. 0{,}00875 = 0{,}9420081 - 3$

$\log. 230 = 2{,}3617278$
$+ \log. (1{,}00875^{96} - 1) = 0{,}1165897$
$2{,}4783175$
$- \log. 0{,}00875 = 0{,}9420081 - 3$
$4{,}5363094$
$\text{num.} = 34380{,}28$
$A =$ **34380,28** M.

178. C. ist im Besitze der verbrieften Forderung eines nach 9 Jahren fälligen Abfindungs-Kapitales von p. p. 30 000 Mark, möchte aber in Rücksicht auf seine berufliche Stellung und Aufgabe über einen gewissen Betrag desselben in dem Sinne verfügen, daß er mit ihm eine während der ganzen Zwischenzeit laufende, am Anfange jeden Monats zahlbare Rente von 120 Mark erwirbt. Welche Summe hat er der Rentenanstalt von seiner Forderung zu cedieren, wenn diese die Rentenzahlung übernimmt und einen Zins von $4^1/_2$ Prozent berechnet?

A.

$$A = \frac{120 \times 1{,}0\frac{4{,}5}{12} \times (1{,}0\frac{4{,}5}{12}^{12 \times 9} - 1)}{0{,}0\frac{4{,}5}{12}}$$

$$1{,}0\frac{4{,}5}{12} = 1{,}00375$$

$\log. 1{,}00375 = 0{,}0016255$
$\times 108$
$\log. 1{,}00375^{108} = 0{,}1755540$
$\text{num.} \log. 1{,}00375^{108} = 1{,}4981455$
$\text{num.} \log. 1{,}00375^{108} - 1 = 0{,}4981455$
$\log. (1{,}00375^{108} - 1) = 0{,}6973562 - 1$
$\log. 0{,}00375 = 0{,}5740313 - 3$

$\log. 120 = 2{,}0791812$
$+ \log. 1{,}00375 = 0{,}0016255$
$+ \log. (1{,}00375^{108} - 1) = 0{,}6973562 - 1$
$1{,}7781629$
$- \log. 0{,}00375 = 0{,}5740313 - 3$
$4{,}2041316$
$\text{num.} = 16\,000{,}42$
$A = \mathbf{16\,000{,}42}$ M.

179. Zur Sicherung eines am Ende eines jeden Halbjahres fälligen Witwengehaltes von 450 Mark zahlte Jemand an die Witwenkasse am Anfange jeden Vierteljahres einen Beitrag von 55 Mark. Wenn nun der Versicherungsnehmer mit Ablauf von 21 Jahren, die Frau aber 11 Jahre später starb: Welchen Überschuß oder welchen Verlust berechnet dann die Witwenkasse bei Anwendung eines Zinsfußes von $4^1/_4$ Prozent? (Vgl. hierzu die Aufgabe 162.)

A. Der End- oder Nachwert (A) der vierteljährlichen, über 21 Jahre sich erstreckenden Einlagen zuzüglich des Zinseszins-Zuwachses bis zum Ableben der Witwe, also während 11 weiterer Jahre ergibt sich nach folgender Gleichung:

$$A = \frac{55 \times 1{,}0\frac{425}{4} \times (1{,}0\frac{425}{4}^{4 \times 21} - 1) \times 1{,}0425^{11}}{0{,}0\frac{425}{4}}$$

$$1{,}0\frac{425}{4} = 1{,}010625$$

$\log. 1{,}010625 = 0{,}0045900$
$\times 84$
$\log. 1{,}010625^{84} = 0{,}3855600$
$\text{num.} \log. 1{,}010625^{84} = 2{,}4297410$
$\text{num.} \log. 1{,}010625^{84} - 1 = 1{,}4297410$
$\log. (1{,}010625^{84} - 1) = 0{,}1552572$
$\log. 0{,}010625 = 0{,}0263289 - 2$
$\log. 1{,}0425^{11} = 0{,}1988371$

$\log. 55 = 1{,}7403627$
$+ \log. 1{,}010625 = 0{,}0045900$
$+ \log. (1{,}010625^{84} - 1) = 0{,}1552572$
$+ \log. 1{,}0425^{11} = 0{,}1988371$
$2{,}0990470$
$- \log. 0{,}010625 = 0{,}0263289 - 2$
$4{,}0727181$
$\text{num.} = 11\,822{,}74$
$A = \mathbf{11\,822{,}74}$ M.

Diesem Betrage steht ein End- oder Nachwert (A_1) der von der Witwenkasse während 11 Jahren je halbjährlich nachschußweise gezahlten Witwengehalte gegenüber, welcher sich berechnet nach der Gleichung:

$$A_1 = \frac{450 \times (1{,}0\frac{425}{2}^{2 \times 11} - 1)}{0{,}0\frac{425}{2}}$$

$$1{,}0\frac{425}{2} = 1{,}02125$$

log. 1,02125 = 0,0091320	log. 450 = 2,6532125
× 22	+ log. ($1{,}02125^{22}$ — 1) = 0,7695222 — 1
log. $1{,}02125^{22}$ = 0,2009040	2,4227347
num. log. $1{,}02125^{22}$ = 1,5881956	— log. 0,02125 = 0,3273589 — 2
num. log. $1{,}02125^{22}$ — 1 = 0,5881956	4,0953758
log. ($1{,}02125^{22}$ — 1) = **0,7695222 — 1**	num. = 12455,92
log. 0,02125 = **0,3273589 — 2**	A_1 = **12455,92** M.

Somit ergibt sich für die Witwenkasse eine Einbuße von

12455,92 — 11822,74 = **633,18** Mark.

Anmerkung. Stellt man wiederum die behandelten Gleichungen nach dem zu Aufgabe 162 dargelegten Verfahren einander gegenüber, so hat man:

$$A - A_1 = [55 \times 1{,}0425^{11} \times (1{,}0\frac{425}{4}^{84} - 1)] \times \frac{1{,}0\frac{425}{4}}{0{,}0\frac{425}{4}} - \left[450 \times (1{,}0\frac{425}{2}^{22} - 1) \times \frac{1}{0{,}0\frac{425}{2}}\right]$$

Aus der weiteren Berechnung folgt dann, genau übereinstimmend mit dem oben nachgewiesenen Ergebnisse:

11 822,74 und 12 455,92 Mark.

Der hier angedeutete Weg kann indessen in Anbetracht der Verschiedenheit der Voraussetzungen, unter welchen die Wertbewegung in beiden Fällen stattfindet, kaum zu einer Erleichterung der Rechnung führen.

Zweite Gruppe.

(Gegeben: r, p, m und n. Gesucht: a. Anwendung der Formeln XVI. a.

und XVII. a.:

$$\text{(Ns)}: a = \frac{r \cdot (1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1)}{1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} \cdot 0{,}0\frac{p}{m}}$$

$$\text{(Vs)}: a = \frac{r \cdot (1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1)}{1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n - 1} \cdot 0{,}0\frac{p}{m}}$$
)

180. Wie hoch berechnet sich das Einlage-Kapital (Mise), welches zum Zwecke des käuflichen Erwerbes einer 12 Jahre lang am Ende jeden Halbjahres zu beziehenden Rente von 250 Mark einzuzahlen ist, wenn ein Zinsfuß von $3^1/_2$ Prozent in Anrechnung gebracht wird?

A.

$$a = \frac{250 \times (1{,}0\frac{35}{2}^{2 \times 12} - 1)}{1{,}0\frac{35}{2}^{2 \times 12} \times 0{,}0\frac{35}{2}}$$

$$1{,}0\frac{35}{2} = 1{,}0175$$

$\log. 1{,}0175 = 0{,}0075344$
$\times 24$
$\log. 1{,}0175^{24} = 0{,}1808256$
$\text{num.}\log. 1{,}0175^{24} = 1{,}5164413$
$\text{num.}\log. 1{,}0175^{24} - 1 = 0{,}5164413$
$\log. (1{,}0175^{24} - 1) = 0{,}7130209 - 1$
$\log. 0{,}0175 = 0{,}2430380 - 2$

$\log. 250 = 2{,}3979400$
$+ \log. (1{,}0175^{24} - 1) = 0{,}7130209 - 1$
$2{,}1109609$
$\log. 1{,}0175^{24} = 0{,}1808256$
$+ \log. 0{,}0175 = 0{,}2430380 - 2$
$- 0{,}4238636 - 2$
$3{,}6870973$
$\text{num.} = 4\,865{,}16$
$a = \mathbf{4\,865{,}16}$ Mark.

181. Um sich für den mit Ablauf von 15 Jahren zu gewärtigenden Bedarfsfall eine 5 Jahre lang laufende, quartalsweise fällige, nachschüssige Rente von 625 Mark zu sichern, gedenkt ein Unternehmer mit einer Rentenbank die Vereinbarung zu treffen, daß er derselben sofort das zu jenem Zwecke erforderliche Kapital einzahlt. Welche Summe wird die Bank bei Zugrundelegung eines Zinsfußes von $4^1/_2$ Prozent beanspruchen?

A. Die vorliegende Aufgabe erheischt zunächst eine Berechnung des Barwertes (a_1) der verlangten Rente vom Zeitpunkte des Abschlusses der Vorperiode von 15 Jahren, sodann aber die Diskontierung des also erhaltenen Betrages auf den Termin der Übereinkunft bezw. den Beginn der Vorperiode. Auf diesem Wege ergibt sich:

$$a_1 = \frac{625 \times (1{,}0\frac{45}{4}^{4 \times 5} - 1)}{1{,}0\frac{45}{4}^{4 \times 5} \times 0{,}0\frac{45}{4}}$$

$$1{,}0\frac{45}{4} = 1{,}01125$$

$\log. 1{,}01125 = 0{,}0048585$
$\times 20$
$\log. 1{,}01125^{20} = 0{,}0971700$
$\text{num.}\log. 1{,}01125^{20} = 1{,}2507486$
$\text{num.}\log. 1{,}01125^{20} - 1 = 0{,}2507486$
$\log. (1{,}01125^{20} - 1) = 0{,}3992385 - 1$
$\log. 0{,}01125 = 0{,}0511525 - 2$

$\log. 625 = 2{,}7958800$
$+ \log. (1{,}01125^{20} - 1) = 0{,}3992385 - 1$
$2{,}1951185$
$\log. 1{,}01125^{20} = 0{,}0971700$
$+ \log. 0{,}01125 = 0{,}0511525 - 2$
$- 0{,}1483225 - 2$
$4{,}0467960$
$\text{num.} = 11\,137{,}71$
$a_1 = \mathbf{11\,137{,}71}$ M.

Der auf den Zeitpunkt des Vertragsabschlusses bezogene Barwert dieses Betrages ist aber nach Formel II:

$$a = \frac{11\,137{,}71}{1{,}045^{15}}$$

Woraus man erhält:

$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$
$\times 15$
$\log. 1{,}045^{15} = 0{,}2867445$

$\log. 11\,137{,}71 = 4{,}0467960$
$- \log. 1{,}045^{15} = 0{,}2867445$
$3{,}7600515$
$\text{num.} = 5\,755{,}08$
$a = \mathbf{5\,755{,}08}$ Mark.

Anmerkung. Der gegebene Fall hätte übrigens auch in Anwendung der entsprechenden Formel für aufgeschobene Renten (XX. a) behandelt werden können. Vgl. hierzu die Aufgaben 201 und 207.

182. Es hat Jemand 12 Jahre lang eine je am Anfange eines Halbjahres fällige Rente von 750 Mark zu beziehen, möchte dieselbe aber Angesichts des aktuell gewordenen Bedarfes für ein gewerbliches Unternehmen veräußern. Wie hoch wird sich die Verkaufssumme bei Anrechnung von $3^3/_4$ Prozent Zinsen belaufen?

A.
$$a = \frac{750 \times (1{,}0\frac{375}{2}^{2 \times 12} - 1)}{1{,}0\frac{375}{2}^{2 \times 12 - 1} \times 0{,}0\frac{375}{2}}$$

$$1{,}0\frac{375}{2} = 1{,}01875$$

$\log. 1{,}01875 = 0{,}0080677$
$\times 24$
$\log. 1{,}01875^{24} = 0{,}1936248$
$\text{num.} \log. 1{,}01875^{24} = 1{,}5617979$
$\text{num.} \log. 1{,}01875^{24} - 1 = 0{,}5617979$
$\log. (1{,}01875^{24} - 1) = \mathbf{0{,}7495802 - 1}$
$\log. 1{,}01875^{23} = \mathbf{0{,}1855571}$
$\log. 0{,}01875 = \mathbf{0{,}2730013 - 2}$

$\log. 750 = 2{,}8750613$
$+ \log. (1{,}01875^{24} - 1) = 0{,}7495802 - 1$
$2{,}6246415$
$\log. 1{,}01875^{23} = 0{,}1855571$
$+ \log. 0{,}01875 = 0{,}2730013 - 2$
$- 0{,}4585584 - 2$
$4{,}1660831$
num. = 14 658,28
a = **14 658,28** M.

183. Ein Bauernhofbesitzer, welcher durch Gutsübertrags-Vertrag zur Zahlung einer am Anfange jeden Monats fälligen Leibrente von 110 Mark verpflichtet ist, beabsichtigt, diese durch Vermittlung einer Versicherungsbank auf dem Wege einer einmaligen Kapital-Einlage (Mise) abzulösen. Die Anstalt, welche hiernach die Rentenzahlung übernimmt, geht auf Grund der Sterblichkeitstabellen von einer wahrscheinlichen Lebensdauer des Rentenberechtigten von 19 Jahren aus und berechnet einen Zins von 4 Prozent. Welche Summe hat der Versicherungsnehmer zu entrichten?

A.
$$a = \frac{110 \times (1{,}0\frac{4}{12}^{12 \times 19\frac{1}{12}} - 1)^{1)}}{1{,}0\frac{4}{12}^{12 \times 19\frac{1}{12} - 1} \times 0{,}0\frac{4}{12}}$$

$$1{,}0\frac{4}{12} = 1{,}0033333$$

$\log. 1{,}0033333 = 0{,}0014452$
$\times 229$
$\log. 1{,}0033333^{229} = 0{,}3309508$
$\text{num.} \log. 1{,}0033333^{229} = 2{,}1426478$
$\text{num.} \log. 1{,}0033333^{229} - 1 = 1{,}1426478$
$\log. (1{,}0033333^{229} - 1) = \mathbf{0{,}0579124}$
$\log. 1{,}0033333^{228} = \mathbf{0{,}3295056}$
$\log. 0{,}0033333 = \mathbf{0{,}5228744 - 3}$

$\log. 110 = 2{,}0413927$
$+ \log. (1{,}0033333^{229} - 1) = 0{,}0579124$
$2{,}0993051$
$\log. 1{,}0033333^{228} = 0{,}3295056$
$+ \log. 0{,}0033333 = 0{,}5228744 - 3$
$- 0{,}8523800 - 3$
$4{,}2469251$
num. = 17 657,33
a = **17 657,33** M.

[1]) Im gegebenen Falle ist angenommen, daß im 20ten Jahre nur noch ein Rentenbezug stattfindet.

Dritte Gruppe.

(Gegeben: a, p, m und n. Gesucht: r. Anwendung der Formeln XVI. b

und XVII. b:

$$\left\{\begin{array}{l}(\text{Ns}):\ r = \dfrac{a \cdot 1{,}0_{\frac{p}{m}}^{m \cdot n} \cdot 0{,}0_{\frac{p}{m}}}{1{,}0_{\frac{p}{m}}^{m \cdot n} - 1} \\[2ex] (\text{Vs}):\ r = \dfrac{a \cdot 1{,}0_{\frac{p}{m}}^{m \cdot n} \cdot 0{,}0_{\frac{p}{m}}}{1{,}0_{\frac{p}{m}} \cdot (1{,}0_{\frac{p}{m}}^{m \cdot n} - 1)}\end{array}\right)$$

184. Es beabsichtigt Jemand, sich durch eine einmalige Kapital-Einlage eine 20 Jahre lang laufende, am Ende eines jeden Halbjahres fällige Rente zu kaufen. Wenn ihm nun hierfür ein Kapital von 18 000 Mark zur Verfügung steht, und die Bank, welche die Rentenzahlung übernimmt, einen Zins von $3^1/_2$ Prozent berechnet: Wie hoch werden sich dann die Raten der zu beziehenden Rente belaufen?

A.

$$r = \frac{18\,000 \times 1{,}0_{\frac{3{,}5}{2}}^{2 \times 20} \times 0{,}0_{\frac{3{,}5}{2}}}{1{,}0_{\frac{3{,}5}{2}}^{2 \times 20} - 1}$$

$$1{,}0_{\frac{3{,}5}{2}} = 1{,}0175$$

$\log. 1{,}0175 = 0{,}0075344$
$\times 40$
$\log. 1{,}0175^{40} = \mathbf{0{,}3013760}$
$\text{num.} \log. 1{,}0175^{40} = 2{,}0015941$
$\text{num.} \log. 1{,}0175^{40} - 1 = 1{,}0015941$
$\log. (1{,}0175^{40} - 1) = \mathbf{0{,}0006917}$
$\log. 0{,}0175 = \mathbf{0{,}2430380 - 2}$

$\log. 18\,000 = 4{,}2552725$
$+ \log. 1{,}0175^{40} = 0{,}3013760$
$+ \log. 0{,}0175 = 0{,}2430380 - 2$
$2{,}7996865$
$- \log. (1{,}0175^{40} - 1) = 0{,}0006917$
$2{,}7989948$
$\text{num.} = 629{,}50$ (rund)
$r = \mathbf{629{,}50}$ Mark.

185. Ein Beamter gedenkt von seinem, je am Ende eines Quartals fälligen Gehalte regelmäßig einen bestimmten Betrag einer Bank zu übergeben, um von ihr nach Ablauf von 15 Jahren ein Kapital von 10 000 Mark beziehen zu können. Wenn ihm nun die Bank $3^3/_4$ Prozent vergütet: Wie groß werden dann die einzelnen Raten sein müssen, welche der Beamte zu zahlen hat?

A. Wie in Aufgabe 169, so handelt es sich auch hier um einen gegebenen Endwert der Einzahlungen, welcher in dem Faktor $a \cdot 1{,}0_{\frac{p}{m}}^{m \cdot n}$ der angegebenen Formel XVI. b. seinen Ausdruck findet. Somit ist:

$$r = \frac{10\,000 \times 0{,}0_{\frac{3{,}75}{4}}}{1{,}0_{\frac{3{,}75}{4}}^{4 \times 15} - 1}$$

$$1{,}0_{\frac{3{,}75}{4}} = 1{,}009375$$

$\log. 1{,}009375 = 0{,}0040526$
$\times 60$
$\log. 1{,}009375^{60} = 0{,}2431560$
$\text{num.}\log. 1{,}009375^{60} = 1{,}7504754$
$\text{num.}\log. 1{,}009375^{60} - 1 = 0{,}7504754$
$\log. (1{,}009375^{60} - 1) = \mathbf{0{,}8753364 - 1}$
$\log. 0{,}009375 = \mathbf{0{,}9719713 - 3}$

$\log. 10\,000 = 4{,}0000000$
$+ \log. 0{,}009375 = 0{,}9719713 - 4$
$1{,}9719713$
$- \log. (1{,}009375^{60} - 1) = 0{,}8753364 - 3$
$2{,}0966349$
num. $= 124{,}92$
r $=$ **124,92** oder
rund **125** Mark.

186. Bei der Veräußerung eines Hauses wird zwischen Verkäufer und Käufer vereinbart, daß dieser eine Rest-Kaufsumme von 17 500 Mark in einer halbjährlichen, vorschußweise zu zahlenden Rente innerhalb eines Zeitraums von 10 Jahren abtrage. Wie hoch werden sich die Raten dieser Rente bei Zugrundelegung eines Zinsfußes von 4 Prozent berechnen?

A.
$$r = \frac{17\,500 \times 1{,}0_{\frac{4}{2}}^{2 \times 10} \times 0{,}0_{\frac{4}{2}}}{1{,}0_{\frac{4}{2}} \times (1{,}0_{\frac{4}{2}}^{2 \times 10} - 1)}$$
$$1{,}0_{\frac{4}{2}} = 1{,}02$$

$\log. 1{,}02 = \mathbf{0{,}0086002}$
$\times 20$
$\log. 1{,}02^{20} = \mathbf{0{,}1720040}$
$\text{num.}\log. 1{,}02^{20} = 1{,}4859493$
$\text{num.}\log. 1{,}02^{20} - 1 = 0{,}4859493$
$\log. (1{,}02^{20} - 1) = \mathbf{0{,}6865909 - 1}$
$\log. 0{,}02 = \mathbf{0{,}3010300 - 2}$

$\log. 17\,500 = 4{,}2430380$
$+ \log. 1{,}02^{20} = 0{,}1720040$
$+ \log. 0{,}02 = 0{,}3010300 - 2$
$2{,}7160720$
$\log. 1{,}02 = 0{,}0086002$
$+ \log. (1{,}02^{20} - 1) = 0{,}6865909 - 1$
$- 0{,}6951911 - 1$
$3{,}0208809$
num. $= 1\,049{,}25$ (rund)
r $=$ **1 049,25** Mark.

187. Mittelst regelmäßiger, 15 Jahre hindurch am Anfang jeden Monats bei einer Rentenbank einzulegender Ersparnisse gedenkt Jemand eine nach Ablauf dieser Zeit sich über 9 Jahre erstreckende halbjährliche, vorschüssige Rente, deren Raten sich auf 300 Mark belaufen, zu erwerben. Welchen Betrag muß er, um das zu erreichen, bei Annahme eines Zinsfußes von $3^3/_4$ Prozent allmonatlich einzahlen?

A. Der vorliegende Fall kann füglich nach dem zu Aufgabe 171 dargelegten Verfahren behandelt werden. Darnach berechnet sich zunächst der Barwert (a) für die zu erwerbende Rente aus:

$$a = \frac{300 \times (1{,}0_{\frac{3{,}75}{2}}^{2 \times 9} - 1)}{1{,}0_{\frac{3{,}75}{2}}^{2 \times 9 - 1} \times 0{,}0_{\frac{3{,}75}{2}}} \quad \text{(XVII. a)}$$
$$1{,}0_{\frac{3{,}75}{2}} = 1{,}01875$$

log. 1,01875 = 0,0080677
× 18
log. $1{,}01875^{18}$ = 0,1452186
num. log. $1{,}01875^{18}$ = 1,3970714
num. log. $1{,}01875^{18}-1$ = 0,3970714
log. $(1{,}01875^{18}-1)$ = **0,5988686—1**
log. $1{,}01875^{17}$ = **0,1371509**
log. 0,01875 = **0,2730013—2**

log. 300 = 2,4771213
+ log. $(1{,}01875^{18}-1)$ = 0,5988686—1
2,0759899
log. $1{,}01875^{17}$ = 0,1371509
+ log. 0,01875 = 0,2730013 — 2
— 0,4101522—2
3,6658377
num. = 4 632,74
a = **4 632,74** Mark.

Der Betrag der 15jährigen, monatlich fälligen vorschüssigen Einzahlungen (r), welche diesem als Endwert $(a \,.\, 1{,}0_{\frac{p}{m}}^{m \,.\, n})$ zu betrachtenden Kapitale entsprechen, ergibt sich nach der Formel XVII. b, wie folgt:

$$r = \frac{4\,632{,}74 \times 0{,}0\frac{3{,}75}{12}}{1{,}0\frac{3{,}75}{12} \times (1{,}0\frac{3{,}75}{12}^{12 \times 15} - 1)}$$

$$1{,}0\frac{3{,}75}{12} = 1{,}003125$$

log. 1,003125 = **0,0013550**
× 180
log. $1{,}003125^{180}$ = 0,2439000
num. log. $1{,}003125^{180}$ = 1,7534769
num. log. $1{,}003125^{180} - 1$ = 0,7534769
log. $(1{,}003125^{180} - 1)$ = **0,8770699 — 1**
log. 0,003125 = **0,4948500 — 3**

log. 4 632,74 = 3,6658377
+ log. 0,003125 = 0,4948500 — 3
1,1606877
log. 1,003125 = 0,0013550
+ log. $(1{,}003125^{180} - 1)$ = 0,8770699 — 1
— 0,8784249 — 1
1,2822628
num. = 19,15 (rund)
r = **19,15** Mark.

Selbstverständlich läßt sich der gesuchte Betrag (r) auch nach dem zu Aufgabe 171 (S. 177) dargelegten Verfahren der Anwendung einer zusammenfassenden Gleichung ermitteln, in welcher der Endwert (A) der Einlagen und der Barwert (a) der zu beziehenden Rente einander gegenübergestellt werden.

Vierte Gruppe.

(Gegeben: a, r, p und m. Gesucht: n. Anwendung der Formeln XVI. c und XVII. c.:

$$\begin{cases} (Ns)\colon\ n = \dfrac{\log. r - \log. [r - (a \,.\, 0{,}0\frac{p}{m})]}{\log. 1{,}0\frac{p}{m}} \cdot \dfrac{1}{m} \\[2ex] (Vs)\colon\ n = \left\{\dfrac{\log. r - \log. [r \,.\, 1{,}0\frac{p}{m} - (a \,.\, 0{,}0\frac{p}{m})]}{\log. 1{,}0\frac{p}{m}} + 1\right\} \cdot \dfrac{1}{m} \end{cases}$$)

188. Wie viele Jahre hindurch kann eine halbjährliche, nachschüssige Rente von 1 260 Mark, für deren Erwerb ein Einlage-Kapital von 36 000 Mark aufgewendet werden soll, bezogen werden, wenn $3^1/_2$ Prozent Zinsen in Rechnung zu bringen sind?

A. $$n = \frac{\log. 1\,260 - \log. [1\,260 - (36\,000 \times 0{,}0\frac{35}{2})]}{\log. 1{,}0\frac{35}{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\log. 1\,260 - \log. (1\,260 - 630)}{\log. 1{,}0175} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\log. 12\,60 - \log. 630}{\log. 1{,}0175} \times \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \log. 1\,260 &= 3{,}1003705 \\ -\log. 630 &= \underline{2{,}7993405} \\ &\ 0{,}3010300 \\ \log. 1{,}0175 &= 0{,}0075344 \end{aligned}$$

$n = \frac{3010300}{75344} \times \frac{1}{2} =$ **20** Jahre (rund) oder 40 Ratenzahlungen.

Logarithmische Division:

$$\begin{aligned} \log. 0{,}3010300 &= 0{,}4786098 - 1 \\ -\log. 0{,}0075344 &= \underline{0{,}8770487 - 3} \\ &\ 1{,}6015611 \\ \text{num.} &= 39{,}95 \end{aligned}$$

$39{,}95 \times \frac{1}{2} =$ **20** Jahre, rund (w. oben).

189. Nach dem vorliegenden Vertrage übernimmt der Käufer einer Liegenschaft die Verpflichtung, eine Kauf-Restsumme von 12 500 Mark in der Weise abzutragen, daß er eine am Ende jeden Quartals fällige Rente von 314 Mark entrichtet. Wie viele Jahre lang hat der Verkäufer diese Rente zu erheben, wenn ein Zinsfuß von $4^1/_4$ Prozent in Ansatz kommt?

A. $$n = \frac{\log. 314 - \log. [314 - (12\,500 \times 0{,}0\frac{425}{4})]}{\log. 1{,}0\frac{425}{4}} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\log. 314 - \log. (314 - 132{,}8125)}{\log. 1{,}010625} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\log. 314 - \log. 181{,}1875}{\log. 1{,}010625} \times \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \log. 314 &= 2{,}4969296 \\ -\log. 181{,}1875 &= \underline{2{,}2581282} \\ &\ 0{,}2388014 \\ \log. 1{,}010625 &= 0{,}0045900 \end{aligned}$$

$n = \frac{2388014}{45900} \times \frac{1}{4} =$ **13** Jahre (rund) oder 52 Ratenzahlungen.

Division logarithmisch behandelt:

$$\begin{aligned} \log. 0{,}2388014 &= 0{,}3780368 - 1 \\ -\log. 0{,}0045900 &= \underline{0{,}6618127 - 3} \\ &\ 1{,}7162241 \\ \text{num.} &= 52{,}026 \end{aligned}$$

$52{,}026 \times \frac{1}{4} =$ **13** Jahre, rund (w. ob.).

190. Eine bejahrte, nicht mehr arbeitskräftige Person beabsichtigt, ein erspartes Kapital von 22 500 Mark bei der Rentenanstalt derart anzulegen, daß sie von dieser eine am Anfange jeden Monats fällige Rente von 175 Mark beziehen kann. Wie viele Jahre lang wird ihr die Anstalt diese Rente bei Zugrundelegung eines Zinses von $4\frac{1}{2}$ Prozent bezahlen müssen?

A. $$n = \left\{\frac{\log. 175 - \log. [175 \times 1{,}0\tfrac{4,5}{12} - (22\,500 \times 0{,}0\tfrac{4,5}{12})]}{\log. 1{,}0\tfrac{4,5}{12}} + 1\right\} \times \frac{1}{12}$$

$$= \left\{\frac{\log. 175 - \log. [175 \times 1{,}00375 - (22\,500 \times 0{,}00375)]}{\log. 1{,}00375} + 1\right\} \times \frac{1}{12}$$

$$= \left[\frac{\log. 175 - \log. (175{,}65625 - 84{,}375)}{\log. 1{,}00375} + 1\right] \times \frac{1}{12}$$

$$= \left[\left(\frac{\log. 175 - \log. 91{,}28125}{\log. 1{,}00375}\right) + 1\right] \times \frac{1}{12}$$

$$\log. 175 = 2{,}2430380$$
$$- \log. 91{,}28125 = 1{,}9603815$$
$$0{,}2826565$$
$$\log. 1{,}00375 = 0{,}0016255$$

$$(12 \times n) - 1 = \frac{2826565}{16255} = 173{,}889$$

$$12 \times n = 173{,}889 + 1 = 174{,}889 \text{ (Zahl der Raten)}$$

$$n = \frac{174{,}889}{12} = \mathbf{14{,}574} \text{ oder rund } \mathbf{14}{,}6 \text{ Jahre.}$$

Division logarithmisch ausgeführt:

$$\log. 0{,}2826565 = 0{,}4512590 - 1$$
$$- \log. 0{,}0016255 = 0{,}2109870 - 3$$
$$2{,}2402720$$
$$\text{num.} = 173{,}889$$
$$173{,}889 + 1 = 174{,}889 \text{ (Zahl d. Raten)}$$
$$\frac{174{,}889}{12} = \mathbf{14}{,}6 \text{ Jahre, rund (wie oben).}$$

191. Es gedenkt Jemand durch Vermittlung einer Rentenbank für einen späteren Zeitabschnitt von 15 Jahren eine halbjährliche, nachschüssige Rente von 1 000 Mark auf dem Wege regelmäßig am Anfange jeden Quartals zu leistender Einzahlungen von je 150 Mark zu erwerben. Wie viele Jahre hindurch müssen diese Einzahlungen bei Anrechnung eines Zinsfußes von 4 Prozent gemacht werden?

A. Hier ist wiederum zunächst der Barwert (a) der 15 Jahre laufenden halbjährlichen Rente, bezogen auf den Zeitpunkt des Abschlusses der n Jahre hindurch zu zahlenden Einlagen, zu bestimmen. Derselbe beträgt:

$$a = \frac{1\,000 \times (1{,}0\tfrac{4}{2}^{2 \times 15} - 1)}{1{,}0\tfrac{4}{2}^{2 \times 15} \times 0{,}0\tfrac{4}{2}}$$

$$\log. 1{,}02 = 0{,}0086002$$
$$\times 30$$
$$\log. 1{,}02^{30} = \mathbf{0{,}2580060}$$
$$\text{num.}\log. 1{,}02^{30} = 1{,}8113650$$
$$\text{num.}\log. 1{,}02^{30} - 1 = 0{,}8113650$$
$$\log. (1{,}02^{30} - 1) = \mathbf{0{,}9092163 - 1}$$
$$\log. 0{,}02 = \mathbf{0{,}3010300 - 2}$$

$$\log. 1\,000 = 3{,}0000000$$
$$+ \log. (1{,}02^{30} - 1) = 0{,}9092163 - 1$$
$$2{,}9092163$$
$$\log. 1{,}02^{30} = 0{,}2580060$$
$$+ \log. 0{,}02 = 0{,}3010300 - 2$$
$$- 0{,}5590360 - 2$$
$$4{,}3501803$$
$$\text{num.} = 22\,396.50$$
$$a = \mathbf{22\,396{,}50}\ \text{Mark.}$$

Um nun die Zahl der Jahre (n) zu finden, während deren die Einzahlungen, um den also ermittelten Barwert (a) zu erreichen, erfolgen müssen, kann füglich wiederum an die bereits unter XIII. c_1 (S. 65) aufgeführte, übrigens aus der Formel XVII leicht abzuleitende Gleichung — analog dem Verfahren in Aufgabe 175 — angeknüpft werden. Darnach erhält man:

$$4\,n = \frac{\log. \left(\dfrac{22\,396{,}5 \times 0{,}0\frac{4}{4}}{150 \times 1{,}0\frac{4}{4}} + 1\right)}{\log. 1{,}0\frac{4}{4}}$$

Woraus sich dann ergibt:

$$= \frac{\log. \left(\dfrac{223{,}965}{151{,}5} + 1\right)}{\log. 1{,}01}$$

$$= \frac{(\log. 1{,}4783168 + 1)}{\log. 1{,}01}$$

$$\log. 2{,}4783168 = 0{,}3941568$$
$$\log. 1{,}01 = 0{,}0043214$$
$$4 \times n = \frac{3941568}{43214} = 91{,}2105$$
$$n = \frac{91{,}2105}{4} = \mathbf{22}{,}8\ \text{Jahre (rund).}$$

Anmerkung. Das gleiche Fazit würde man natürlich auch erhalten, wenn man den nach Formel XVII zu ermittelnden Endwert (A) der Einlagen, welcher hier die unbekannte Potenz $4 \times n$ enthält, gleichungsweise dem Barwert (a) der zu beziehenden Rente gegenüberstellt. Dann ist:

$$\frac{150 \times 1{,}01 \times (1{,}01^{4 \times n} - 1)}{0{,}01} = 22\,396.50$$

$$1{,}01^{4 \times n} = \frac{22\,396.50 \times 0{,}01}{150 \times 1{,}01} + 1 = \frac{223.965}{151{,}5} + 1 = 2{,}4783168$$

$$4 \times n = \frac{\log. 2{,}4783168}{\log. 1{,}01} = \frac{0{,}3941568}{0{,}0043214} = 91{,}210$$

$$n = \frac{91{,}210}{4} = \mathbf{22}{,}8\ \text{Jahre (wie oben).}$$

c) Dritte Reihe (192—199).

(Anwendung der Formeln XVIII—XVIII. c. und XIX—XIX. c.)

Erster Fall. [1])

(Gegeben: r, p, b und n. Gesucht: $A = a \cdot 1{,}0p^n$. Anwendung der

$$\text{Formeln XVIII und XIX:} \begin{cases} (Ns): A = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^b - 1} \\ (Vs): A = \frac{r \cdot 1{,}0p^b \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^b - 1} \end{cases}$$

[Vgl. die Aufgabe 147.]

192. Es hat Jemand eine am Ende eines jeden 3ten Jahres fällige Rente von 900 Mark zu beziehen, will aber deren Raten regelmäßig alsbald nach dem Empfange derselben auf Zinseszinsen anlegen. Bis auf welchen Betrag wird auf diese Weise die Rente bis zum Ablauf von 18 Jahren bei Anrechnung eines Zinsfußes von $4^1/_2$ Prozent angewachsen sein?

A. $$A = \frac{900 \times (1{,}045^{18} - 1)}{1{,}045^3 - 1}$$

$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$
$\times 18$
$\log. 1{,}045^{18} = 0{,}3440934$
$\text{num.} \log. 1{,}045^{18} = 2{,}2084797$
$\text{num.} \log. 1{,}045^{18} - 1 = 1{,}2084797$
$\log. (1{,}045^{18} - 1) = \mathbf{0{,}0822395}$
$\log. 1{,}045^3 = 0{,}0573489$
$\text{num.} \log. 1{,}045^3 = 1{,}1411666$
$\text{num.} \log. 1{,}045^3 - 1 = 0{,}1411666$
$\log. (1{,}045^3 - 1) = \mathbf{0{,}1497320 - 1}$

$\log. 900 = 2{,}9542425$
$+ \log. (1{,}045^{18} - 1) = 0{,}0822395$
$3{,}0364820$
$- \log. (1{,}045^3 - 1) = 0{,}1497320 - 1$
$3{,}8867500$
$\text{num.} = 7\,704{,}60$
$A = \mathbf{7\,704{,}60}$ Mark.

Anmerkung. Der vorbehaltlosen Anwendung der vorangestellten Formel liegt die für das gegebene Beispiel zutreffende Voraussetzung zu Grunde, daß die Gesamtzahl der Jahre (18) durch die Zahl der Jahre (3), während welcher die Rente aussetzt, ohne Rest geteilt werden kann. Sofern dieses Verhältnis aber abändert, bedarf es noch eines Rechnungs-Zusatzes, dergestalt, daß der Endwert, welcher sich für den Zeitpunkt des letzten Rentenbezuges ergibt, auf die Zahl der nach der Teilung noch verbleibenden Jahre prolongiert wird.

Würde z. B. in der vorliegenden Aufgabe nach dem Endwerte gefragt, welchen die Rentenbezüge am Schlusse des 20ten Jahres erreichen, so müßte derjenige vom Schlusse des 18ten Jahres, in unserem Falle 7 704,60 Mark, entsprechend der Zeitdauer von 2 Jahren erhöht, also mit $1{,}045^2$ multipliziert und demgemäß die Gleichung angewendet werden,

$$A = \frac{900 \times (1{,}045^{18} - 1) \times 1{,}045^2}{1{,}045^3 - 1}$$

Somit erhielte man in obiger Rechnung einen weiteren logarithmischen Sum-

[1]) Zusammenfassung je nur einer Aufgabe für nachschüssige und für vorschüssige Renten.

manden von $2 \times \log. 1{,}045 = 0{,}0382326$, so daß das Schlußergebnis: 3,9249826 beträgt, dessen Numerus ist: **8 413,61** Mark.

Zu dem nämlichen Endwert würde man natürlich auch gelangen, wenn man jene Summe von 7 704,60 Mark mit dem Numerus von $2 \times \log. 1{,}045 = 1{,}092025$ multipliziert.

Mit Hilfe der Tafel I:

$$A = \frac{900 \times 1{,}2084788}{0{,}1411661} = \frac{1\,087{,}6309}{0{,}1411661} = \mathbf{7\,704{,}61} \text{ Mark.}$$

193. Eine Wald-Korporation hat eine Aufforstungsfläche, welche mit einer zu $3^3/_4$ Prozent verzinslichen Grundschuld von 25000 Mark belastet ist, übernommen und dabei mit dem Gläubiger vereinbart, daß die Abzahlung sofort beginnend in regelmäßig am Anfange eines jeden zweiten Jahres zu entrichtenden Raten von 3 000 Mark erfolgen soll. Wie hoch wird sich die Rest-Schuldsumme nach 7-maliger Zahlung, also nach 14 Jahren belaufen?

A. Es handelt sich hier um eine Gegenüberstellung der Endwerte der Kapitalschuld nach 14 Jahren (A) und der bis dahin geleisteten Ratenzahlungen ($A_,$). (Vgl. hierzu die Aufgabe 159.)

In Anwendung der bezüglichen Formeln lautet dann die Rechnung:

$$A - A_, = (25\,000 \times 1{,}0375^{14}) - \frac{3000 \times 1{,}0375^2 \times (1{,}0375^{14} - 1)}{1{,}0375^2 - 1}$$

$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$
$\times 14$
$\log. 1{,}0375^{14} = \mathbf{0{,}2238334}$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^{14} = 1{,}6743004$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^{14} - 1 = 0{,}6743004$
$\log. (1{,}0375^{14} - 1) = \mathbf{0{,}8288534 - 1}$
$\log. 1{,}0375^2 = \mathbf{0{,}0319762}$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^2 = 1{,}0764062$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^2 - 1 = 0{,}0764062$
$\log. (1{,}0375^2 - 1) = \mathbf{0{,}8831286 - 2}$

$\log. 25\,000 = 4{,}3979400$
$+ \log. 1{,}0375^{14} = 0{,}2238334$
$4{,}6217734$
$\text{num.} = 41\,857{,}51 \ldots\ldots 41\,857{,}51$ M.

$\log. 3\,000 = 3{,}4771213$
$+ \log. 1{,}0375^2 = 0{,}0319762$
$+ \log. (1{,}0375^{14} - 1) = 0{,}8288534 - 1$
$3{,}3379509$
$- \log. (1{,}0375^2 - 1) = 0{,}8831286 - 2$
$4{,}4548223$
$\text{num.} = 28\,498{,}51 \ldots - 28\,498{,}51$ „
$A - A_, = \mathbf{13\,359{,}00}$ M.

Zweiter Fall.

(Gegeben: r, p, b und n. Gesucht: a. Anwendung der Formeln XVIII. a.

und XIX a.:

$$(\text{Ns}) : a = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \cdot (1{,}0p^b - 1)}$$

$$(\text{Vs}) : a = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n-b} \cdot (1{,}0p^b - 1)}\text{)}$$

194. Wie hoch berechnet sich der Barwert einer Rente von 1 750 Mark, welche während 31 Jahren am Ende eines jeden vierten

Jahres zu beziehen ist, wenn ein Zinsfuß von $3^1/_2$ Prozent zu Grunde gelegt wird?

A. Im gegebenen Falle ist zunächst der Barwert sämtlicher Raten zu ermitteln, welche bis zu dem Zeitpunkte, da die letzte Terminzahlung erfolgt, somit in $7 \times 4 = 28$ Jahren fällig werden. Dem also gefundenen Betrage (a) hat man sodann den gesondert zu berechnenden Barwert der Rente (a,), welche auf den überschießenden Zeitraum von 3 Jahren entfällt, zuzufügen. (Vgl. Anmerkung zu Aufgabe 192.) Somit ergibt sich:

$$a = \frac{1750 \times (1{,}035^{28} - 1)}{1{,}035^{28} \times (1{,}035^4 - 1)}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}035 &= 0{,}0149403 \\
&\times 28 \\
\log. 1{,}035^{28} &= \mathbf{0{,}4183284} \\
\text{num.}\log. 1{,}035^{28} &= 2{,}6201636 \\
\text{num.}\log. 1{,}035^{28} - 1 &= 1{,}6201636 \\
\log. (1{,}035^{28} - 1) &= \mathbf{0{,}2095587} \\
\log. 1{,}035^4 &= 0{,}0597612 \\
\text{num.}\log. 1{,}035^4 &= 1{,}1475224 \\
\text{num.}\log. 1{,}035^4 - 1 &= 0{,}1475224 \\
\log. (1{,}035^4 - 1) &= \mathbf{0{,}1688580 - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1750 &= 3{,}2430380 \\
+\log. (1{,}035^{28} - 1) &= 0{,}2095587 \\
&\quad 3{,}4525967 \\
\log. 1{,}035^{28} &= 0{,}4183284 \\
+\log. (1{,}035^4 - 1) &= 0{,}1688580 - 1 \\
&- 0{,}5871864 - 1 \\
&\quad 3{,}8654103 \\
\text{num.} &= 7335{,}17 \\
a &= \mathbf{7335{,}17} \text{ Mark.}
\end{aligned}$$

Hierzu kommt dann noch der Barwert (a,) des Anteils an der auf einen weiteren Zeitraum von 4 Jahren bezogenen Rate. Derselbe beträgt am Schlusse des 31 ten Jahres: $1750 \times \frac{1}{1{,}035} = 1690{,}821$, und auf die Gegenwart diskontiert: $1690{,}821 \times \frac{1}{1{,}035^{31}} = 582{,}03$ Mark. Der gesamte Barwert ist also:

$$7335{,}17 + 582{,}03 = \mathbf{7917{,}20} \text{ Mark.}$$

Der Zusatz-Betrag (582,03) entspricht übrigens genau dem Ergebnisse, welches man in Anwendung der Formel XXIV. a. für „aufgeschobene und aussetzende" Renten erhalten würde, sofern man in dieselbe für n und b je die Ziffer 1 einsetzt. $\left(\frac{1750 \times 0{,}035}{1{,}035^{31+1} \times 0{,}035} = \frac{1750}{1{,}035^{32}}\right)$.

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$a = \frac{1750 \times 1{,}620172}{2{,}620172 \times 0{,}147523} = \frac{2835{,}301}{0{,}3865356} = \ldots\ldots \quad 7335{,}16 \text{ Mark}$$

oder auch, da $\frac{1}{2{,}620172} = 0{,}3816543$ und $\frac{1}{0{,}147523} = 6{,}778604$ ist:

$$\begin{aligned}
a &= 2835{,}301 \times 0{,}3816543 \times 6{,}778604 \\
&= 2835{,}301 \times 2{,}5870834 = \ldots\ldots\ldots \quad 7335{,}16 \text{ Mark}
\end{aligned}$$

oder auch:

$$a = 1\,750 \times \frac{1{,}620172}{2{,}620172} \times 6{,}778604 = 1\,082{,}1048 \times 6{,}778604 = \mathbf{7\,335{,}16}\ \text{Mark.}$$

Hierzu kommen:

$$a_{,} = 1\,750 \times 0{,}9661836 \times 0{,}3442303 = 1\,750 \times 0{,}33259 = \mathbf{582{,}03}\ \text{„}$$

$$a + a_{,} = \mathbf{7\,917{,}19}\ \text{Mark.}$$

195. Es will Jemand bei einer Rentenanstalt eine 16 Jahre lang laufende, am Anfange eines jeden zweiten Jahres, also 8 Mal zu beziehende Rente von 3 000 Mark durch eine einmalige Einzahlung (Mise) erwerben. Welches Kapital ist zu diesem Zwecke aufzuwenden, wenn ein Zins von 4 Prozent berechnet wird?

A.

$$a = \frac{3\,000 \times (1{,}04^{16} - 1)}{1{,}04^{16-2} \times (1{,}04^{2} - 1)}$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$
$\times 16$
$\log. 1{,}04^{16} = 0{,}2725328$
$\text{num.} \log. 1{,}04^{16} = 1{,}8729786$
$\text{num.} \log. 1{,}04^{16} - 1 = 0{,}8729786$
$\log. (1{,}04^{16} - 1) = \mathbf{0{,}9410036 - 1}$
$\log. 1{,}04^{14} = \mathbf{0{,}2384662}$
$\log. 1{,}04^{2} = 0{,}0340666$
$\text{num.} \log. 1{,}04^{2} = 1{,}0816000$
$\text{num.} \log. 1{,}04^{2} - 1 = 0{,}0816000$
$\log. (1{,}04^{2} - 1) = \mathbf{0{,}9116902 - 2}$

$\log. 3\,000 = 3{,}4771213$
$+ \log. (1{,}04^{16} - 1) = 0{,}9410036 - 1$
$3{,}4181249$
$\log. 1{,}04^{14} = 0{,}2384662$
$+ \log. (1{,}04^{2} - 1) = 0{,}9116902 - 2$
$- 1{,}1501564 - 2$
$4{,}2679685$
$\text{num.} = 18\,533{,}97$
$a = \mathbf{18\,533{,}97}$ M.

Anmerkung. Da hier wiederum der Fall vorliegt, daß die erste Rate der vorschüssigen Rente schon am Zeitpunkte des Vertragsabschlusses fällig wird, ist hinsichtlich der gegenseitigen Auseinandersetzung das in Aufgabe 165 dargestellte Verfahren zu beachten, nach welchem die obige Gleichung abzuändern wäre in:

$$a = \frac{3\,000 \times (1{,}04^{14} - 1)}{1{,}04^{14} \times (1{,}04^{2} - 1)} = \mathbf{15\,533{,}97}\ \text{Mark.}$$

Dritter Fall.

(Gegeben: a, p, b und n. Gesucht: r. Anwendung der Formeln XVIII. b.

und XIX. b.:

$$\text{(Ns):}\quad r = \frac{a \,.\, 1{,}0p^{n} \,.\, (1{,}0p^{b} - 1)}{1{,}0p^{n} - 1}$$

$$\text{(Vs):}\quad r = \frac{a \,.\, 1{,}0p^{n-b} \,.\, (1{,}0p^{b} - 1)}{1{,}0p^{n} - 1}\ )$$

196. Der Besitzer eines Kapitales von 10 466 Mark gedenkt dasselbe bei einer Rentenanstalt zum Zwecke der Erwerbung einer während 18 Jahren am Ende eines jeden dritten Jahres zu beziehenden Rente anzulegen. Auf welchen Betrag würden sich die Raten dieser Rente bei Anrechnung eines Zinsfußes von $4^1/_2$ Prozent belaufen?

A.
$$r = \frac{10\,466 \times 1{,}045^{18} \times (1{,}045^3 - 1)}{1{,}045^{18} - 1}$$

$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$
$\times 18$
$\log. 1{,}045^{18} = \mathbf{0{,}3440934}$
$\text{num.} \log. 1{,}045^{18} = 2{,}2084794$
$\text{num.} \log. 1{,}045^{18} - 1 = 1{,}2084794$
$\log. (1{,}045^{18} - 1) = \mathbf{0{,}0822392}$
$\log. 1{,}045^3 = 0{,}0573489$
$\text{num.} \log. 1{,}045^3 = 1{,}1411660$
$\text{num.} \log. 1{,}045^3 - 1 = 0{,}1411660$
$\log. (1{,}045^3 - 1) = \mathbf{0{,}1497302 - 1}$

$\log. 10\,466 = 4{,}0197807$
$+ \log. 1{,}045^{18} = 0{,}3440934$
$+ \log. (1{,}045^3 - 1) = 0{,}1497302 - 1$
$3{,}5136043$
$- \log. (1{,}045^{18} - 1) = 0{,}0822392$
$3{,}4313651$
$\text{num.} = 2\,700{,}00$
$r = \mathbf{2\,700{,}00}$ Mark.

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$r = 10\,466 \times \frac{2{,}2084788}{1{,}2084788} \times 0{,}1411661$$
$$= 10\,466 \times 1{,}8274366 \times 0{,}1411661 = \mathbf{2\,700} \text{ Mark}$$

oder auch, da $\frac{1}{1{,}2084788} = 0{,}8274866$ ist:

$$r = 10\,466 \times 2{,}2084788 \times 0{,}1411661 \times 0{,}8274866 = \mathbf{2\,700} \text{ Mark.}$$

197. Die Gemeinde L., welche Behufs Erwerbung von Bauterrain ein Anlehen im Betrage von 125 000 Mark aufgenommen hat, beabsichtigt, die Forderung des Gläubigers einer Grundkreditbank zu übertragen und sich dieser gegenüber zu verpflichten, die Schuld innerhalb 30 Jahren in Form einer am Anfange eines jeden fünften Jahres fälligen, also 6 Mal zu zahlenden Rente zu begleichen. Die Bank, welche hierauf eingeht, berechnet einen Zins von nur $3\frac{3}{4}$ Prozent. Wieviel wird darnach eine Rate dieser Rente betragen?

A. Im gegebenen Falle hat man sich die Forderung der Bank als eine Einlage (Mise) vorzustellen, für welche sie als Gegenleistung von der Gemeinde eine Rente bezieht. Also ist:

$$r = \frac{125\,000 \times 1{,}0375^{30-5} \times (1{,}0375^5 - 1)}{1{,}0375^{30} - 1}$$

$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$
$\times 25$
$\log. 1{,}0375^{25} = \mathbf{0{,}3997025}$
$\log. 1{,}0375^5 = 0{,}0799405$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^5 = 1{,}2020997$
$\text{num} \log. 1{,}0375^5 - 1 = 0{,}2020997$
$\log. (1{,}0375^5 - 1) = \mathbf{0{,}3055657 - 1}$
$\log. 1{,}0375^{30} = 0{,}4796430$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^{30} = 3{,}0174700$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^{30} - 1 = 2{,}0174700$
$\log. (1{,}0375^{30} - 1) = \mathbf{0{,}3048071}$

$\log. 125\,000 = 5{,}0969100$
$+ \log. 1{,}0375^{25} = 0{,}3997025$
$+ \log. (1{,}0375^5 - 1) = 0{,}3055657 - 1$
$4{,}8021782$
$- \log. (1{,}0375^{30} - 1) = 0{,}3048071$
$4{,}4973711$
$\text{num.} = 31\,431{,}94$
$r = \mathbf{31\,431{,}94}$ M.

Anmerkung. Wird nach der Formel XVIII der Endwert ermittelt, bis auf welchen die Rente von 31 431,94 Mark in 30 Jahren anwächst, so erhält man eine Summe (377 184 Mark), welche genau gleich ist derjenigen, welche die Bank durch Anlage des Darlehnskapitales (125 000 Mark) auf Zinseszinsen in der gleichen Zeit erzielt haben würde.

Vierter Fall.

(Gegeben: a, r, p und b. Gesucht: n. Anwendung der Formeln XVIII. c

und XIX. c:

$$\text{(Ns)}: \; n = \frac{\log. r - \log. [r - a.(1{,}0p^b - 1)]}{\log. 1{,}0p}$$

$$\text{(Vs)}: \; n = \frac{\log. r - \log. [(r - a) . 1{,}0p^b + a]}{\log. 1{,}0p} + b \Bigg)$$

198. Um sich eine am Ende jeden dritten Jahres fällige Rente von 3 600 Mark zu kaufen, legt Jemand bei einer Rentenbank die Summe von 17 580 Mark ein. Wie viele Jahre hindurch kann diese Rente bezogen werden, wenn die Bank einen Zins von 4 Prozent berechnet?

A. $$n = \frac{\log. 3\,600 - \log. [3\,600 - 17\,580 \times (1{,}04^3 - 1)]}{\log. 1{,}04}$$

$$\log. 1{,}04 = \mathbf{0{,}0170333}$$
$$\times 3$$
$$\log. 1{,}04^3 = 0{,}0510999$$
$$\text{num.} \log. 1{,}04^3 = 1{,}1248637$$
$$\text{num.} \log. 1{,}04^3 - 1 = \mathbf{0{,}1248637}$$

$$3\,600 - (17\,580 \times 0{,}1248637)$$
$$= 3\,600 - 2\,195{,}10 = 1\,404{,}90$$
$$\log. 3\,600 = 3{,}5563025$$
$$-\log. 1\,404{,}90 = 3{,}1476454$$
$$0{,}4086571$$
$$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$$
$$n = \frac{4086571}{170333} = \mathbf{24} \text{ Jahre.}$$

Logarithmische Ausführung der Division:

$$\log. 0{,}4086571 = 0{,}6113590 - 1$$
$$-\log. 0{,}0170333 = 0{,}2312995 - 2$$
$$1{,}3800595$$

num. $= 23{,}992$ oder rund **24** Jahre (wie oben).

199. Laut Vertrag verpflichtet sich der Käufer eines Hauses, den auf 33 000 Mark sich belaufenden Restbetrag der Kaufsumme durch Zahlung einer am Anfange eines jeden zweiten Jahres fälligen Rente von 5 000 Mark abzutragen. Wie viele Jahre lang wird derselbe diese Rente zu entrichten haben, wenn mit dem Gläubiger ein Zins von $4^1/_4$ Prozent vereinbart wurde?

A. Auch in diesem Falle ist die Rest-Kaufsumme gleichbedeutend mit einer Einlage (Mise), welche der Gläubiger Behufs Erwerbung einer gleichwertigen Rente hingegeben hat. Daher der Ansatz:

$$n = \frac{\log. 5\,000 - \log. [(5\,000 - 33\,000) \times 1{,}0425^2 + 33\,000]}{\log. 1{,}0425} + 2$$

$\log. 1{,}0425 = 0{,}0180761$
$\times 2$
$\log. 1{,}0425^2 = 0{,}0361522$
$\text{num.}\log. 1{,}0425^2 = 1{,}0868065$

$\log. 5000 - \log.[-(28000 \times 1{,}0868065) + 33000]$
$= \log. 5\,000 - \log.(-30\,430{,}582 + 33\,000)$
$= \log. 5\,000 - \log. 2\,569{,}418$

$\log. 5\,000 = 3{,}6989700$
$-\log. 2\,569{,}418 = 3{,}4098347$
$0{,}2891353$
$\log. 1{,}0425 = 0{,}0180761$

$$n = \frac{2891353}{180761} + 2 = 16 + 2$$
$= \mathbf{18}$ Jahre (nahezu).

Division logarithmisch behandelt:

$\log. 0{,}2891353 = 0{,}4611011 - 1$
$-\log. 0{,}0180761 = 0{,}2571047 - 2$
$1{,}2039964$
num. $= 15{,}9954 =$ rund 16; $+ 2 = \mathbf{18}$ Jahre (wie oben).

Anmerkung. Hinsichtlich der rechnerischen Behandlung von Fällen, in welchen sich wesentliche Jahresbruchteile ergeben, sei an die Ausführungen zu den Aufgaben 172—174 erinnert.

d) Vierte Reihe (200—205).

(Anwendung der Formeln XX. a—XX. c und XXI. a—XXI. c.)[1]

Erster Fall.[2]

(Gegeben: r, p, v und n. Gesucht: a. Anwendung der Formeln XX. a und XXI. a:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(Ns): } a = \dfrac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{v+n}\,.\,0{,}0p} \\[2ex] \text{(Vs): } a = \dfrac{r\,.\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{v+n-1}\,.\,0{,}0p} \end{array}\right)$$

200. Es hat Jemand eine Jahresrente von 2 750 Mark zu beziehen, welche nach Ablauf von 7 Jahren am Ende eines jeden der folgenden 13 Jahre fällig wird. Welches Kapital kann für dieselbe zur Zeit bezahlt werden, wenn eine Verzinsung von $4\frac{1}{2}$ Prozent anzunehmen ist?

---

[1]) Wie schon aus der Schluß-Anmerkung zu dem Rechnungsbeispiele 171 zu entnehmen ist, lassen sich die hierher gehörenden Aufgaben auch durch eine Doppelrechnung, und zwar in der Weise lösen, daß man zunächst je nach der Fragestellung die gegebenen Werte von r oder a auf den Zeitpunkt des Abschlusses der Vorperiode v diskontiert oder prolongiert, und dann an das Ergebnis mit den entsprechenden einfachen Formeln XIV. a—c oder XV. a—c anknüpft.

Das Gleiche gilt auch für die Anwendung der Formeln der 5. und 6. Reihe.

Die der Berechnung des Endwertes A dienenden Formeln XX und XXI decken sich nach der Darlegung auf Seite 151 und 153 mit den Formeln XIV und XV, können daher an dieser Stelle außer Betracht fallen. Bezüglich ihrer Anwendung ist das Nähere aus den Aufgaben 158—162 zu ersehen.

[2]) S. Anmerkung zur 3. Reihe, S. 193.

A.

$$a = \frac{2\,750 \times (1{,}045^{13} - 1)}{1{,}045^{7+13} \times 0{,}045}$$

$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$

$\times 13$

$\log. 1{,}045^{13} = 0{,}2485119$

$\text{num.} \log. 1{,}045^{13} = 1{,}7721965$

$\text{num.} \log. 1{,}045^{13} - 1 = 0{,}7721965$

$\log. (1{,}045^{13} - 1) = 0{,}8877279 - 1$

$\log. 1{,}045^{20} = 0{,}3823260$

$\log. 0{,}045 = 0{,}6532125 - 2$

$\log. 2\,750 = 3{,}4393327$

$+ \log. (1{,}045^{13} - 1) = 0{,}8877279 - 1$

$3{,}3270606$

$\log. 1{,}045^{20} = 0{,}3823260$

$+ \log. 0{,}045 = 0{,}6532125 - 2$

$- 1{,}0355385 - 2$

$4{,}2915221$

$\text{num.} = 19\,566{,}90$

$a = \mathbf{19\,566{,}90}$ Mark.

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$a = \frac{2\,750 \times 0{,}7721961 \times 0{,}4146429}{0{,}045}$$

$$= 61\,111{,}11 \times 0{,}7721961 \times 0{,}4146429 = \mathbf{19\,566{,}90} \text{ Mark.}$$

201. Ein Familienvater, welcher den Fall voraussieht, daß er nach Ablauf von 12 Jahren während eines Zeitraums von 6 Jahren regelmäßig einen außerordentlichen Aufwand von 2 400 Mark für die Ausbildung seiner Söhne zu bestreiten haben wird, will sich die rechtzeitige Verfügung über diese Beträge durch Erwerb einer entsprechenden, je am Anfange der späteren 6 Jahre fälligen Rente sichern und dieserhalb sofort das hierzu erforderliche Kapital einzahlen. Die Rentenanstalt, welche dem Antrage entspricht, berechnet einen Zins von 4 Prozent. Wie hoch beläuft sich das Kapital, welches der Käufer einzulegen hat?

A.

$$a = \frac{2\,400 \times (1{,}04^{6} - 1)}{1{,}04^{12+6-1} \times 0{,}04}$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$

$\times 6$

$\log. 1{,}04^{6} = 0{,}1021998$

$\text{num.} \log. 1{,}04^{6} = 1{,}2653184$

$\text{num.} \log. 1{,}04^{6} - 1 = 0{,}2653184$

$\log. (1{,}04^{6} - 1) = 0{,}4237674 - 1$

$\log. 1{,}04^{17} = 0{,}2895661$

$\log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$

$\log. 2\,400 = 3{,}3802112$

$+ \log. (1{,}04^{6} - 1) = 0{,}4237674 - 1$

$2{,}8039786$

$\log. 1{,}04^{17} = 0{,}2895661$

$+ \log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$

$- 0{,}8916261 - 2$

$3{,}9123525$

$\text{num.} = 8\,172{,}45$

$a = \mathbf{8\,172{,}45}$ Mark.

Anmerkung. Läge aber der Fall vor, daß der Familienvater, um sich durch Aufsparungen und daher zeitlich gedehnte Verteilung der Kosten eine Erleichterung zu verschaffen, die alljährlich vorschußweise zu leistende Zahlung eines über die ganze Vorperiode von 12 Jahren sich erstreckenden Betrages der einmaligen Kapital-Einlage vorzieht, und würde demgemäß die Frage gestellt, wie hoch sich dann die jährlichen Raten belaufen müßten, so bildet das vorliegende Beispiel ein Seitenstück zur Aufgabe 171, bei deren Behandlung schon auf den Weg der Anknüpfung an die Formeln für „aufgeschobene“ Renten hingewiesen wurde.

Um hiernach den Betrag der Jahresraten (r) zu finden, hat man sich einfach der Formel XV. b. (Vs) zu bedienen, welche ergibt:

$$r = \frac{8\,172{,}45 \times 1{,}04^{12} \times 0{,}04}{1{,}04 \times (1{,}04^{12} - 1)}$$

log. $1{,}04^{12}$ = **0,2043996**
num. log. $1{,}04^{12}$ = 1,6010308
num. log. $1{,}04^{12} - 1$ = 0,6010308
log. $(1{,}04^{12} - 1)$ = **0,7788967 — 1**

log. 8 172,45 = 3,9123525 (w. o.)
+ log. $1{,}04^{12}$ = 0,2043996
+ log. 0,04 = 0,6020600 — 2 (w. o.)
2,7188121

log. 1,04 = 0,0170333
+ log. $(1{,}04^{12} - 1)$ = 0,7788967 — 1
— 0,7959300 — 1
2,9228821
num. = 837,30
r = **837,30** Mark

Anmerkung. Die Rechnung kann aber wiederum auch durch Aufstellung einer zusammenfassenden Gleichung ausgeführt werden, indem man ansetzt (XV. a):

$$\frac{r \times (1{,}04^{12} - 1)}{1{,}04^{12-1} \times 0{,}04} = \frac{2\,400 \times (1{,}04^{6} - 1)}{1{,}04^{12+6-1} \times 0{,}04}$$

$$\frac{r \times (1{,}04^{12} - 1)}{1{,}04^{11}} = \frac{2\,400 \times (1{,}04^{6} - 1)}{1{,}04^{17}}$$

$$r = \frac{2\,400 \times (1{,}04^{6} - 1) \times 1{,}04^{11}}{1{,}04^{17} \times (1{,}04^{12} - 1)} = \frac{2\,400 \times (1{,}04^{6} - 1)}{1{,}04^{6} \times (1{,}04^{12} - 1)}$$

Somit ergibt sich für r:

log. 2 400 = 3,3802112
+ log. $(1{,}04^{6} - 1)$ = 0,4237674 — 1
2,8039786

log. $1{,}04^{6}$ = 0,1021998
+ log. $(1{,}04^{12} - 1)$ = 0,7788967 — 1
— 0,8810965 — 1
2,9228821
num. = 837,30
r = **837,30** Mark (wie oben).

Zweiter Fall.

(Gegeben: a, p, v und n. Gesucht: r. Anwendung der Formeln XX. b und XXI. b:

$$\left\{\begin{array}{l} (Ns): r = \dfrac{a \,.\, 1{,}0p^{v+n} \,.\, 0{,}0p}{1{,}0p^{n} - 1} \\[2ex] (Vs): r = \dfrac{a \,.\, 1{,}0p^{v+n-1} \,.\, 0{,}0p}{1{,}0p^{n} - 1} \end{array}\right)$$

202. Um eine nach Ablauf von 12 Jahren einsetzende nachschüssige, also am Schlusse des 13ten Jahres zum ersten Male zu beziehende, und dann 18 Jahre lang laufende Rente käuflich zu erwerben, soll bei der Rentenanstalt ein Kapital von 30 000 Mark eingelegt werden. Wieviel werden dann die Raten des Rentenbezuges bei einem Zinsfuß von 4 Prozent betragen?

A.
$$r = \frac{30\,000 \times 1{,}04^{30} \times 0{,}04}{1{,}04^{18} - 1}$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$
$\times 30$
$\log. 1{,}04^{30} = \mathbf{0{,}5109990}$
$\log. 0{,}04 = \mathbf{0{,}6020600-2}$
$\log. 1{,}04^{18} = 0{,}3065994$
$\text{num.} \log. 1{,}04^{18} = 2{,}0258130$
$\text{num.} \log. 1{,}04^{18} - 1 = 1{,}0258130$
$\log. (1{,}04^{18} - 1) = \mathbf{0{,}0110682}$

$\log. 30\,000 = 4{,}4771213$
$+ \log. 1{,}04^{30} = 0{,}5109990$
$+ \log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$
$3{,}5901803$
$- \log. (1{,}04^{18} - 1) = 0{,}0110682$
$3{,}5791121$
$\text{num.} = 3\,794{,}13$
$r = \mathbf{3\,794{,}13}$ Mark.

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$r = 1\,200 \times 3{,}2433975 \times \frac{1}{1{,}0258165} = 3\,892{,}077 \times 0{,}9748333$$
$$= \mathbf{3\,794{,}13} \text{ Mark.}$$

203. G. beabsichtigt bei einer Rentenanstalt durch Einzahlung eines Kapitales von 10 500 Mark eine während 20 Jahren zu beziehende jährliche Rente, deren erste Rate nach Ablauf von 5 Jahren, und zwar schon mit Beginn des 6 ten Jahres fällig wird, zu erwerben. Die Rentenanstalt berechnet $3^3/_4$ Prozent Zinsen. Wie hoch beläuft sich dann der Betrag der jährlich zu beziehenden Rente?

A.
$$r = \frac{10\,500 \times 1{,}0375^{5+20-1} \times 0{,}0375}{1{,}0375^{20} - 1}$$

$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$
$\times 24$
$\log. 1{,}0375^{24} = \mathbf{0{,}3837144}$
$\log. 0{,}0375 = \mathbf{0{,}5740313-2}$
$\log. 1{,}0375^{20} = 0{,}3197620$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^{20} = 2{,}0881514$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^{20} - 1 = 1{,}0881514$
$\log. (1{,}0375^{20} - 1) = \mathbf{0{,}0366894}$

$\log. 10\,500 = 4{,}0211893$
$+ \log. 1{,}0375^{24} = 0{,}3837144$
$+ \log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$
$2{,}9789350$
$- \log. (1{,}0375^{20} - 1) = 0{,}0366894$
$2{,}9422456$
$\text{num.} = 875{,}48$
$r = \mathbf{875{,}48}$ Mark.

Dritter Fall.

(Gegeben: a, r, p und v. Gesucht: n. Anwendung der Formeln XX. c.

und XXI. c.:

$$(\text{Ns}): n = \frac{\log. r - \log. [r - (a \,.\, 0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{v})]}{\log. 1{,}0p}$$

$$(\text{Vs}): n = \frac{\log. r - \log. [r - (a \,.\, 0{,}0p \,.\, 1{,}0p^{v-1})]}{\log. 1{,}0p}\;)$$

204. Zum Zwecke der Durchführung eines gewerblichen Unternehmens wird ein Anleihen von 60 000 Mark unter der Bedingung kontrahiert, daß die Rückzahlung des Kapitales, mit Ablauf der ersten 4 Jahre nach dem Vertragsabschluß beginnend, in nachschüssig zu entrichtenden jährlichen Raten von je 5 500 Mark erfolgen soll. Die Bank berechnet einen Zins von $3^3/_4$ Prozent. Nach wieviel Jahren werden die Forderungen derselben beglichen sein?

A. $n = \frac{\log. 5500 - \log. [5500 - (60000 \times 0{,}0375 \times 1{,}0375^4)]}{\log. 1{,}0375}$

$\log. 1{,}0375 = \mathbf{0{,}0159881}$; $\log. 1{,}0375^4 = \mathbf{0{,}0639524}$

$$\begin{aligned} \log. 60000 &= 4{,}7781513 \\ + \log. 0{,}0375 &= 0{,}5740313 - 2 \\ + \log. 1{,}0375^4 &= 0{,}0639524 \\ &\overline{3{,}4161350} \\ \text{num.} &= 2606{,}96 \\ 5500{,}00 - 2606{,}96 &= 2893{,}04 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log. 5500 &= 3{,}7403627 \\ - \log. 2893{,}04 &= 3{,}4613544 \\ &\overline{0{,}2790083} \\ \log. 1{,}0375 &= 0{,}0159881 \end{aligned}$$

$$n = \frac{2790083}{159881} = \mathbf{17}{,}451 \text{ Jahre.}$$

Logarithmische Division:

$$\begin{aligned} \log. 0{,}2790083 &= 0{,}4456171 - 1 \\ - \log. 0{,}0159881 &= 0{,}2037968 - 2 \\ &\overline{1{,}2418203} \\ \text{num.} &= \mathbf{17}{,}451 \text{ Jahre (wie oben).} \end{aligned}$$

Anmerkung. 1. Der rechnerische Ausgleich bezüglich der Jahresbruchteile erfolgt nach Anleitung zu den Aufgaben 172—174. 2. Um an dem vorliegenden Beispiele zu zeigen, wie sich die auf S. 199 (Fußnote) angedeutete Doppelrechnung gestalten würde, sei Folgendes bemerkt:

Der Betrag, bis auf welchen das Einlage-Kapital (hier Betrag der Anleihe) von 60 000 Mark durch Zuschlag der Zinseszinsen nach Ablauf von 4 Jahren angewachsen sein wird (Prolongation), berechnet sich also:

$$\log. 1{,}0375^4 = 0{,}0639524$$
$$\text{num. log. } 1{,}0375^4 = 1{,}1586504$$
$$60000 \times 1{,}1586504 = 69\,519{,}02 \text{ Mark.}$$

Somit ergibt sich die Zahl der Jahre, während deren eine diesem Kapitalwerte entsprechende nachschüssige Rente von 5 500 Mark bezogen werden kann, nach Formel XIV. c:

$$n = \frac{\log. 5500 - \log. [5500 - (69\,519{,}02 \times 0{,}0375)]}{\log. 1{,}0375}$$
$$= \frac{\log. 5500 - \log. (5500 - 2606{,}96)}{\log. 1{,}0375}$$
$$= \frac{\log. 5500 - \log. 2893{,}04}{\log. 1{,}0375}$$

$$\begin{aligned} \log. 5500 &= 3{,}7403627 \\ - \log 2893{,}04 &= 3{,}4613544 \\ &\overline{0{,}2790083} \\ \log. 1{,}0375 &= 0{,}0159881 \end{aligned}$$

$$n = \frac{2790083}{159881} = \mathbf{17}{,}451 \text{ Jahre (wie oben).}$$

205. Ein junger Mann, welcher in der Erbauseinandersetzung eine Abfindungssumme von 10 400 Mark empfing, gedenkt das Kapital bei einer Rentenbank derart anzulegen, daß er nach Ablauf von 12 Jahren, während deren es auf Zinseszinsen ausstehen soll, eine am Anfange eines jeden folgenden Jahres fällige Rente von 1 250 Mark beziehen kann. Wie viele Jahre hindurch wird ihm diese Rente ausgezahlt werden müssen, wenn die Rentenanstalt, welche die Einlage übernimmt, einen Zins von $4\frac{1}{4}$ Prozent berechnet?

A. $$n = \frac{\log. 1\,250 - \log. [1\,250 - (10\,400 \times 0{,}0425 \times 1{,}0425^{11})]}{\log. 1{,}0425}$$

$\log. 1{,}0425 = \mathbf{0{,}0180761}$; $\log. 1{,}0425^{11} = \mathbf{0{,}1988371}$

$\log. 10\,400 = 4{,}0170333$
$+ \log. 0{,}0425 = 0{,}6283889 - 2$
$+ \log. 1{,}0425^{11} = 0{,}1988371$
$2{,}8442593$
num. $= 698{,}65$
$1\,250 - 698{,}65 = 551{,}35$

$\log. 1\,250 = 3{,}0969100$
$- \log. 551{,}35 = 2{,}7414274$
$0{,}3554826$
$\log. 1{,}0425 = 0{,}0180761$

$$n = \frac{3554826}{180761} = \mathbf{19{,}666}, \text{ oder rund } \mathbf{19^2/_3} \text{ Jahre.}$$

Logarithmische Division:

$\log. 0{,}3554826 = 0{,}5508184 - 1$
$- \log. 0{,}0180761 = 0{,}2571047 - 2$
$1{,}2937137$
num. $= \mathbf{19}{,}666$ Jahre (wie oben).

Hinsichtlich der ausgleichenden Behandlung der Jahresbruchteile kann auf die Ausführungen zu den Aufgaben 172—174 verwiesen werden.

e) Fünfte Reihe (206—211).

(Anwendung der Formeln XXII. a—XXII. c und XXIII. a—XXIII. c.)[1]

Erster Fall.[2]

(Gegeben: r, p, v, m und n. Gesucht: a. Anwendung der Formeln XXII. a und XXIII. a:

$$\text{(Ns): } a = \frac{r \cdot (1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1)}{1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} \cdot 0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^v}$$

$$\text{(Vs): } a = \frac{r \cdot (1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n} - 1)}{1{,}0\frac{p}{m}^{m \cdot n - 1} \cdot 0{,}0\frac{p}{m} \cdot 1{,}0p^v}\Bigg)$$

206. Wie hoch berechnet sich das Einlage-Kapital (Mise), welches zum Zwecke des Erwerbes einer nach Ablauf von 5 Jahren am Ende eines jeden Halbjahres fälligen und 15 Jahre lang zu beziehenden Rente, deren Raten je 600 Mark betragen sollen, einzuzahlen ist, wenn eine Verzinsung von $4^1/_2$ Prozent angenommen wird?

A. $$a = \frac{600 \times (1{,}0\frac{45}{2}^{2 \times 15} - 1)}{1{,}0\frac{45}{2}^{2 \times 15} \times 0{,}0\frac{45}{2} \times 1{,}045^5}$$

[1] Aus den in der Fußnote zur 4. Reihe angegebenen Gründen bleiben hier die Formeln XXII und XXIII zur Berechnung des Endwertes A unberücksichtigt. Zur Richtschnur dienen die an die Formeln XVI und XVII anknüpfenden Aufgaben 176—178.

[2] S. die Fußnote zur 3. Reihe, Seite 193.

$\log. 1{,}0225 = 0{,}0096633$
$\times 30$
$\log. 1{,}0225^{30} = 0{,}2898990$
$\text{num.}\log. 1{,}0225^{30} = 1{,}9493910$
$\text{num.}\log. 1{,}0225^{30} - 1 = 0{,}9493910$
$\log. (1{,}0225^{30} - 1) = 0{,}9774451 - 1$
$\log. 0{,}0225 = 0{,}3521825 - 2$
$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$
$\log. 1{,}045^{5} = 0{,}0955815$

$\log. 600 = 2{,}7781513$
$+ \log. (1{,}0225^{30} - 1) = 0{,}9774451 - 1$
$2{,}7555964$
$\log. 1{,}0225^{30} = 0{,}2898990$
$+ \log. 0{,}0225 = 0{,}3521825 - 2$
$+ \log. 1{,}045^{5} = 0{,}0955815$
$- 0{,}7376630 - 2$
$4{,}0179334$
$\text{num.} = 10\,421{,}58$
$a = \mathbf{10\,421{,}58}$ M.

207. In der Voraussicht eines nach 12 Jahren eintretenden Erfordernisses will sich Jemand auf dem Wege einmaliger Kapital-Einzahlung eine mit Ablauf dieser Zeit während 6 Jahren am Anfange jeden Quartals zu beziehende vorschüssige Rente von 900 Mark sichern. Die Rentenbank, welche auf einen bezüglichen Antrag eingeht, berechnet 4 Prozent Zinsen. Welche Summe wird derselben hiernach gezahlt werden müssen?

A. $$a = \frac{900 \times (1{,}0\frac{4}{4}^{4 \times 6} - 1)}{1{,}0\frac{4}{4}^{4 \times 6 - 1} \times 0{,}0\frac{4}{4} \times 1{,}04^{12}}$$

$\log. 1{,}01 = 0{,}0043214$
$\times 24$
$\log. 1{,}01^{24} = 0{,}1037136$
$\text{num.}\log. 1{,}01^{24} = 1{,}2697365$
$\text{num.}\log. 1{,}01^{24} - 1 = 0{,}2697365$
$\log. (1{,}01^{24} - 1) = 0{,}4309396 - 1$
$\log. 1{,}01^{23} = 0{,}0993922$
$\log. 0{,}01 = 0{,}0000000 - 2$
$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$
$\log. 1{,}04^{12} = 0{,}2043996$

$\log. 900 = 2{,}9542425$
$+ \log. (1{,}01^{24} - 1) = 0{,}4309396 - 1$
$2{,}3851821$
$\log. 1{,}01^{23} = 0{,}0993922$
$+ \log. 0{,}01 = 0{,}0000000 - 2$
$+ \log. 1{,}04^{12} = 0{,}2043996$
$- 0{,}3037918 - 2$
$4{,}0813903$
$\text{num.} = 12\,061{,}20$
$a = \mathbf{12\,061{,}20}$ Mark.

Zweiter Fall.

(Gegeben: a, p, v, m und n. Gesucht: r. Anwendung der Formeln

XXII. b. und XXIII. b.:
$$\left\{\begin{array}{l} (Ns): r = \dfrac{a \,.\, 1{,}0\frac{p}{m}^{m\,.\,n} \,.\, 0{,}0\frac{p}{m} \,.\, 1{,}0p^{v}}{1{,}0\frac{p}{m}^{m\,.\,n} - 1} \\[2ex] (Vs): r = \dfrac{a \,.\, 1{,}0\frac{p}{m}^{m\,.\,n} \,.\, 0{,}0\frac{p}{m} \,.\, 1{,}0p^{v}}{1{,}0\frac{p}{m} \,.\, (1{,}0\frac{p}{m}^{m\,.\,n} - 1)} \end{array}\right)$$

208. Mit seinem Eintritt in eine selbständige Erwerbsstellung beabsichtigt ein junger Mann von seinem Einkommen 15 Jahre hindurch am Anfange eines jeden Jahres den Betrag von 1 000 Mark der Rentenanstalt zu übergeben, um von ihr nach Ablauf von weiteren 10 Jahren

innerhalb eines Zeitraumes von 20 Jahren eine halbjährliche nachschüssige Rente beziehen zu können. Wenn nun die Bank ihrer Berechnung einen Zinsfuß von $3\frac{1}{2}$ Prozent zu Grunde legt: Wie hoch werden sich dann die Raten der Rente belaufen, welche sie dem Versicherer auszuzahlen hat?

A. Es handelt sich hier offenbar zunächst um die Ermittlung des gegenwärtigen oder des Barwertes der 15 Jahre lang vorschüssig zu leistenden Einzahlungen. Derselbe ist nach Formel XV. a.:

$$a = \frac{1000 \times (1{,}035^{15} - 1)}{1{,}035^{15-1} \times 0{,}035}$$

$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$
$\quad\quad\quad\quad \times 15$
$\log. 1{,}035^{15} = 0{,}2241045$
$\text{num.}\log. 1{,}035^{15} = 1{,}6753459$
$\text{num.}\log. 1{,}035^{15} - 1 = 0{,}6753459$
$\log. (1{,}035^{15} - 1) = 0{,}8295262 - 1$
$\log. 1{,}035^{14} = 0{,}2091642$
$\log. 0{,}035 = 0{,}5440680 - 2$

$\log. 1000 = 3{,}0000000$
$+ \log. (1{,}035^{15} - 1) = 0{,}8295262 - 1$
$\quad\quad 2{,}8295262$
$\log. 1{,}035^{14} = 0{,}2091642$
$+ \log. 0{,}035 = 0{,}5440680 - 2$
$\quad\quad - 0{,}7532322 - 2$
$\quad\quad 4{,}0762940$
$\text{num.} = 11\,920{,}49$
$a = \mathbf{11\,920{,}49}$ M.

Die weitere Rechnung ergibt dann nach obiger Formel XXII. b.:

$$r = \frac{11\,920{,}49 \times 1{,}0\frac{35}{2}^{2\times 20} \times 0{,}0\frac{35}{2} \times 1{,}035^{25}}{1{,}0\frac{35}{2}^{2\times 20} - 1}$$

$\log. 1{,}0175 = 0{,}0075344$
$\quad\quad\quad\quad \times 40$
$\log. 1{,}0175^{40} = 0{,}3013760$
$\text{num.}\log. 1{,}0175^{40} = 2{,}0015941$
$\text{num.}\log. 1{,}0175^{40} - 1 = 1{,}0015941$
$\log. (1{,}0175^{40} - 1) = 0{,}0006917$
$\log. 0{,}0175 = 0{,}2430380 - 2$
$\log. 1{,}035^{25} = 0{,}3735075$

$\log. 11\,920{,}49 = 4{,}0762940$
$+ \log. 1{,}0175^{40} = 0{,}3013760$
$+ \log. 0{,}0175 = 0{,}2430380 - 2$
$+ \log. 1{,}035^{25} = 0{,}3735075$
$\quad\quad 2{,}9942155$
$- \log. (1{,}0175^{40} - 1) = 0{,}0006917$
$\quad\quad 2{,}9935238$
$\text{num.} = 985{,}199$
$r = \mathbf{985{,}20}$ M. (rd.).

Anmerkung. Das gleiche Ergebnis würde man übrigens auch erhalten, wenn man den Endwert der 15 Jahre lang vorschüssig gezahlten Einlagen auf den Schluß des 25ten Jahres prolongiert, dann diesen Endwert als Kapital-Einlage (Mise) betrachtet und aus ihm nach Maßgabe der Formel XVI. b den Betrag der halbjährlichen Raten ermittelt.

209. D. erwirbt eine Liegenschaft unter dem vertragsmäßigen Vorbehalte, daß er einen Teil der Ankaufssumme, lautend auf 6300 Mark, in Form einer nach Ablauf von 3 Jahren beginnenden vierteljährlichen vorschüssigen Rente innerhalb eines Zeitraumes von 9 Jahren bezahle. Wieviel wird eine Rate dieser Rente betragen, wenn $4\frac{1}{4}$ Prozent Zinsen in Anrechnung kommen?

A. $$r = \frac{6300 \times 1{,}0\frac{425}{4}^{4\times 9} \times 0{,}0\frac{425}{4} \times 1{,}0425^3}{1{,}0\frac{425}{4} \times (1{,}0\frac{425}{4}^{4\times 9} - 1)}$$

log. 1,010625 = 0,0045900
× 36
log. $1{,}010625^{36}$ = 0,1652400
num. log. $1{,}010625^{36}$ = 1,4629855
num. log. $1{,}010625^{36} - 1$ = 0,4629855
log. $(1{,}010625^{36} - 1)$ = 0,6655673 − 1
log. 0,010625 = 0,0263289 − 2
log. $1{,}0425^3$ = 0,0542283

log. 6300 = 3,7993405
+ log. $1{,}010625^{36}$ = 0,1652400
+ log. 0,010625 = 0,0263289 − 2
+ log. $1{,}0425^3$ = 0,0542283
2,0451377

log. 1,010625 = 0,0045900
+ log. $(1{,}010625^{36} - 1)$ = 0,6655673 − 1
− 0,6701573 − 1
2,3749804
num. = 237,127
r = **237,13** M. (rd.).

Dritter Fall.

(Gegeben: a, r, p, v und m. Gesucht: n. Anwendung der Formeln XXII. c.

und XXIII. c.:
$$\begin{cases} (Ns): n = \dfrac{\log. r - \log. [r - (a \,.\, 0{,}0\frac{p}{m} \,.\, 1{,}0p^v)]}{\log. 1{,}0\frac{p}{m}} \cdot \dfrac{1}{m} \\ (Vs): n = \left(\dfrac{\log. r - \log. [r \,.\, 1{,}0\frac{p}{m} - (a \,.\, 0{,}0\frac{p}{m} \,.\, 1{,}0p^v)]}{\log. 1{,}0\frac{p}{m}} + 1\right) \cdot \dfrac{1}{m} \end{cases}$$)

210. Der Besitzer eines Barvermögens von 20 840 Mark gedenkt dasselbe bei einer Rentenbank derart anzulegen, daß er von derselben eine nach Ablauf von 5 Jahren beginnende, am Schlusse jeden Halbjahres fällige Rente von 1 200 Mark beziehen kann. Wie viele Jahre lang wird derselbe — Anwendung eines Zinsfußes von $4^1/_2$ Prozent vorausgesetzt — den Genuß dieser Rente zu beanspruchen haben?

A. $$n = \frac{\log. 1\,200 - \log. [1\,200 - (20\,840 \times 0{,}0\frac{45}{2} \times 1{,}045^5)]}{\log. 1{,}0\frac{45}{2}} \times \frac{1}{2}$$

log. 20 840 = 4,3188977
+ log. 0,0225 = 0,3521825 − 2
+ log. $1{,}045^5$ = 0,0955815
2,7666617
num. = 584,3347

1 200 − 584,3347 = 615,6653

log. 1 200 = 3,0791812
− log. 615,6653 = 2,7893447
0,2898365
log. 1,0225 = 0,0096633

$$2\,n = \frac{2898365}{96633} = 29{,}9935$$ oder rund 30.

$$n = \frac{30}{2} = \mathbf{15}\ \text{Jahre.}$$

Logarithmische Ausführung der Division:

$$\log. 0{,}2898365 = 0{,}4621530 - 1$$
$$- \log. 0{,}0096633 = 0{,}9851255 - 3$$
$$1{,}4770275$$

$$\text{num.} = 29{,}9935, \text{ rund } 30, \text{ und } \frac{30}{2} = \mathbf{15}\ \text{Jahre (w. o.)}.$$

211. Wenn Jemand von seinem Einkommen 15 Jahre hindurch am Ende eines jeden Jahres den Betrag von 1 000 Mark bei einer Rentenanstalt anlegt, um von dieser, mit Ablauf von weiteren 10 Jahren beginnend, eine vierteljährliche vorschüssige Rente von 500 Mark beziehen zu können: Über wie viele Jahre wird sich dann der Genuß dieser Rente bei Anrechnung eines Zinsfußes von $3^1/_2$ Prozent erstrecken?

A. Soll die Aufgabe mit Hilfe der vorstehenden Formel XXIII. c gelöst werden, so vergegenwärtige man sich, daß vorerst der Barwert der 15 Jahre hindurch nachschüssig geleisteten Einzahlungen festzustellen ist. Es ergibt sich derselbe nach Formel XIV. a, wie folgt:

$$a = \frac{1\,000 \times (1{,}035^{15} - 1)}{1{,}035^{15} \times 0{,}035}$$

$$\log 1{,}035 = 0{,}0149403$$
$$\times 15$$
$$\log. 1{,}035^{15} = \mathbf{0{,}2241045}$$
$$\text{num. log. } 1{,}035^{15} = 1{,}6753458$$
$$\text{num. log. } 1{,}035^{15} - 1 = 0{,}6753458$$
$$\log. (1{,}035^{15} - 1) = \mathbf{0{,}8295262 - 1}$$
$$\log. 0{,}035 = \mathbf{0{,}5440680 - 2}$$

$$\log. 1\,000 = 3{,}0000000$$
$$+ \log. (1{,}035^{15} - 1) = 0{,}8295262 - 1$$
$$2{,}8295262$$
$$\log. 1{,}035^{15} = 0{,}2241045$$
$$+ \log. 0{,}035 = 0{,}5440680 - 2$$
$$- 0{,}7681725 - 2$$
$$4{,}0613537$$
$$\text{num.} = 11\,517{,}38$$
$$a = \mathbf{11\,517{,}38}\ \text{M.}$$

In Anwendung obiger Formel XXIII. c erhält man dann:

$$n = \left\{ \frac{\log. 500 - \log. [500 \times 1{,}0\tfrac{3{,}5}{4} - (11\,517{,}38 \times 0{,}0\tfrac{3{,}5}{4} \times 1{,}035^{25})]}{\log. 1{,}0\tfrac{3{,}5}{4}} + 1 \right\} \times \frac{1}{4}$$

$$\log. 11\,517{,}38 = 4{,}0613537$$
$$+ \log. 0{,}00875 = 0{,}9420081 - 3$$
$$+ \log. 1{,}035^{25} = 0{,}3735075$$
$$2{,}3768693$$
$$\text{num.} = 238{,}160$$

$$500 \times 1{,}00875 = 504{,}375$$
$$504{,}375 - 238{,}160 = 266{,}215$$
$$\log. 500 = 2{,}6989700$$
$$- \log. 266{,}215 = 2{,}4252326$$
$$0{,}2737374$$
$$\log. 1{,}00875 = 0{,}0037836$$
$$(4 \times n) - 1 = \frac{2737374}{37836} = 72{,}3484$$
$$4 \times n = 72{,}3484 + 1$$
$$n = 73{,}3484 \times \frac{1}{4}$$
$$= \mathbf{18{,}3371}\ \text{Jahre.}$$

Logarithmisch dividiert:

$$\begin{aligned} \log. 0{,}2737374 &= 0{,}4373341 - 1 \\ -\log. 0{,}0037836 &= 0{,}5779052 - 3 \\ & \overline{1{,}8594289} \end{aligned}$$

num. = 72,3484 usw. (wie oben).

Anmerkung 1. Hinsichtlich des rechnerischen Ausgleiches der Jahresbruchteile sei auf die Darstellung zu den Aufgaben 172—174 verwiesen.

Anmerkung 2. Die vorliegende Aufgabe lässet sich, wie leicht einzusehen, auch in der Weise behandeln, daß man den Endwert der 15 Jahre lang nachschüssig gezahlten Einlagen auf den Schluß des 25ten Jahres prolongiert und den also erhaltenen Betrag als Mise für den Rentenbezug betrachtet. In diesem Falle würde einfach der Faktor $1{,}035^{25}$ aus dem Dividendus der angegebenen Formel ausscheiden. — Vgl. dann Formel XVII. c.

f) Sechste Reihe (212—217).

(Anwendung der Formeln XXIV. a—XXIV. c und XXV. a—XXV. c.)[1]

Erster Fall.[2]

(Gegeben: r, p, v, b und n. Gesucht: a. Anwendung der Formeln XXIV. a und XXV. a.:

$$\begin{cases} (Ns): \ a = \dfrac{r \cdot (1{,}0p^{n} - 1)}{1{,}0p^{v+n} \cdot (1{,}0p^{b} - 1)} \\ (Vs): \ a = \dfrac{r \cdot (1{,}0p^{n} - 1)}{1{,}0p^{v+n-b} \cdot (1{,}0p^{b} - 1)} \end{cases}$$)

212. Es hat Jemand über eine zum ersten Male nach Ablauf von 6 Jahren, und in der Folge je am Ende des zweiten Jahres fällige, im ganzen sich über 30 Jahre erstreckende Rente von 1 500 Mark zu verfügen. Welches ist der gegenwärtige Kapitalwert dieser Rente, wenn ein Zinsfuß von 4 Prozent in Anrechnung gebracht wird?

A. $$a = \frac{1\,500 \times (1{,}04^{30} - 1)}{1{,}04^{6+30} \times (1{,}04^{2} - 1)}$$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}04 &= 0{,}0170333 \\ & \times 30 \\ \log. 1{,}04^{30} &= 0{,}5109990 \\ \text{num.} \log. 1{,}04^{30} &= 3{,}2433889 \\ \text{num.} \log. 1{,}04^{30} - 1 &= 2{,}2433889 \\ \log. (1{,}04^{30} - 1) &= \mathbf{0{,}3509046} \\ \log. 1{,}04^{36} &= \mathbf{0{,}6131988} \\ \log. 1{,}04^{2} &= 0{,}0340667 \\ \text{num.} \log. 1{,}04^{2} &= 1{,}0816000 \\ \text{num.} \log. 1{,}04^{2} - 1 &= 0{,}0816000 \\ \log (1{,}04^{2} - 1) &= \mathbf{0{,}9116902 - 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. 1\,500 &= 3{,}1760913 \\ + \log. (1{,}04^{30} - 1) &= 0{,}3509046 \\ & \overline{3{,}5269959} \\ \log. 1{,}04^{36} = 0{,}6131988 & \\ + \log. (1{,}04^{2} - 1) = 0{,}9116902 - 2 & \\ & - 1{,}5248890 - 2 \\ & \overline{4{,}0021069} \\ \text{num.} &= 10\,048{,}64 \end{aligned}$$

a = **10 048,64** Mark.

---

[1]) Bezüglich der Berechnung des Endwertes A (Formeln XXIV und XXV) ist auf die Fußnoten zur 4. und 5. Reihe (S. 199 und 204) zu verweisen. Zur Anwendung kommen die Formeln XVIII und XIX. Eventuell wäre die Anmerkung zur Aufgabe 192 zu beachten.

[2]) S. Fußnote zur 3. Reihe, Seite 193.

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$a = \frac{1\,500 \times 2{,}2433975 \times 0{,}2436687}{0{,}0816} = \frac{819{,}96863}{0{,}0816} = \mathbf{10\,048{,}64} \text{ Mark.}$$

213. In den Unterhandlungen über den Verkauf eines Landgutes wird dem Besitzer außer der sofortigen Barzahlung einer bestimmten Kapitalsumme auch noch die Übertragung einer zum ersten Male nach Ablauf von 5 Jahren, und von da an während eines Zeitraumes von 21 Jahren am Beginne je des dritten Jahres, also im ganzen 7 Mal zu beziehenden Rente von 4 500 Mark angeboten. Wie hoch hat der Besitzer den gegenwärtigen Kapitalwert dieser Rente bei Annahme eines Zinsfußes von $4^1/_2$ Prozent zu berechnen?

A. $$a = \frac{4\,500 \times (1{,}045^{21} - 1)}{1{,}045^{5+21-3} \times (1{,}045^3 - 1)}$$

$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$
$\times 21$
$\log. 1{,}045^{21} = 0{,}4014423$
$\text{num.} \log. 1{,}045^{21} = 2{,}5202423$
$\text{num.} \log. 1{,}045^{21} - 1 = 1{,}5202423$
$\log. (1{,}045^{21} - 1) = \mathbf{0{,}1819127}$
$\log. 1{,}045^{23} = \mathbf{0{,}4396749}$
$\log. 1{,}045^{3} = 0{,}0573489$
$\text{num.} \log. 1{,}045^{3} = 1{,}1411661$
$\text{num.} \log. 1{,}045^{3} - 1 = 0{,}1411661$
$\log. (1{,}045^{3} - 1) = \mathbf{0{,}1497304} - 1$

$\log. 4500 = 3{,}6532125$
$+ \log. (1{,}045^{21} - 1) = 0{,}1819127$
$3{,}8351252$
$\log. 1{,}045^{23} = 0{,}4396749$
$+ \log. (1{,}045^{3} - 1) = 0{,}1497304 - 1$
$- 0{,}5894053 - 1$
$4{,}2457199$
$\text{num.} = 17\,608{,}40$
$a = \mathbf{17\,608{,}40}$ M.

Zweiter Fall.

(Gegeben: a, p, v, b und n. Gesucht: r. Anwendung der Formeln XXIV. b und XXV. b.:

$$\begin{cases} (\text{Ns}):\ r = \dfrac{a \,.\, 1{,}0p^{v+n} \,.\, (1{,}0p^b - 1)}{1{,}0p^n - 1} \\ (\text{Vs}):\ r = \dfrac{a \,.\, 1{,}0p^{v+n-b} \,.\, (1{,}0p^b - 1)}{1{,}0p^n - 1} \end{cases}$$)

214. Ein Kapital von 24 000 Mark soll einer Rentenbank unter der Bedingung übergeben werden, daß diese dem Einleger als Gegenleistung eine Rente gewährt, welche, nach 10 Jahren beginnend, während eines Zeitraums von 24 Jahren am Ende je des zweiten Jahres zu beziehen ist. Wie hoch werden sich die Raten dieser Rente belaufen, wenn ein Zins von $3^1/_2$ Prozent in Ansatz kommt?

A. $$r = \frac{24\,000 \times 1{,}035^{10+24} \times (1{,}035^2 - 1)}{1{,}035^{24} - 1}$$

$$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$$
$$\times 34$$
$$\log. 1{,}035^{34} = \mathbf{0{,}5079702}$$
$$\log. 1{,}035^2 = 0{,}0298806$$
$$\text{num. log. } 1{,}035^2 = 1{,}0712247$$
$$\text{num. log. } 1{,}035^2 - 1 = 0{,}0712247$$
$$\log. (1{,}035^2 - 1) = \mathbf{0{,}8526307 - 2}$$
$$\log. 1{,}035^{24} = 0{,}3585672$$
$$\text{num. log. } 1{,}035^{24} = 2{,}2833221$$
$$\text{num. log. } 1{,}035^{24} - 1 = 1{,}2833221$$
$$\log. (1{,}035^{24} - 1) = \mathbf{0{,}1083357}$$

$$\log. 24\,000 = 4{,}3802112$$
$$+ \log. 1{,}035^{34} = 0{,}5079702$$
$$+ \log. (1{,}035^2 - 1) = 0{,}8526307 - 2$$
$$3{,}7408121$$
$$- \log. (1{,}035^{24} - 1) = 0{,}1083357$$
$$3{,}6324764$$
$$\text{num.} = 4\,290{,}19$$
$$r = \mathbf{4\,290{,}20}\text{ M (rd.).}$$

Mit Hilfe der Tafel I:

$$r = \frac{24\,000 \times 3{,}2208603 \times 0{,}071225}{1{,}2833285} = \frac{5\,505{,}7386}{1{,}2833285} = \mathbf{4\,290{,}20}\text{ Mark.}$$

Anmerkung. Wendet man die zu Aufgabe 197 angegebene Kontrolle an, so findet man, daß der Endwert dieser Rente genau gleich ist der Summe, bis auf welche das Einlage-Kapital von 24 000 Mark innerhalb der ganzen Frist von 34 Jahren mit seinen Zinsen und Zinseszinsen anwächst.

215. Zur Bestreitung der Kosten von Neubauten will eine Gemeinde bei der Landeskreditanstalt ein Anleihen im Betrage von 33 000 Mark gegen die vertragsmäßig festgestellte Verpflichtung aufnehmen, diese Schuld durch eine Reihe regelmäßiger, nach 3 Jahren beginnender und am Anfange je des vierten Jahres zu leistender Einzahlungen während 24 Jahren abzutragen. Angenommen, daß die Kreditanstalt, welche das Darlehen gewährt, einen Zinsfuß von 4 Prozent berechnet: Wieviel werden dann die Raten der Einzahlungen betragen, welche sie beanspruchen muß?

A. $$r = \frac{33\,000 \times 1{,}04^{3+24-4} \times (1{,}04^4 - 1)}{1{,}04^{24} - 1}$$

$$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$$
$$\times 23$$
$$\log. 1{,}04^{23} = \mathbf{0{,}3917659}$$
$$\log. 1{,}04^4 = 0{,}0681332$$
$$\text{num. log. } 1{,}04^4 = 1{,}1698582$$
$$\text{num. log. } 1{,}04^4 - 1 = 0{,}1698582$$
$$\log. (1{,}04^4 - 1) = \mathbf{0{,}2300865 - 1}$$
$$\log. 1{,}04^{24} = 0{,}4087992$$
$$\text{num. log. } 1{,}04^{24} = 2{,}5632989$$
$$\text{num. log. } 1{,}04^{24} - 1 = 1{,}5632989$$
$$\log. (1{,}04^{24} - 1) = \mathbf{0{,}1940420}$$

$$\log. 33\,000 = 4{,}5185139$$
$$+ \log. 1{,}04^{23} = 0{,}3917659$$
$$+ \log. (1{,}04^4 - 1) = 0{,}2300865 - 1$$
$$4{,}1403663$$
$$- \log. (1{,}04^{24} - 1) = 0{,}1940420$$
$$3{,}9463243$$
$$\text{num.} = 8\,837{,}39$$
$$r = \mathbf{8\,837{,}39}\text{ Mark.}$$

Anmerkung. Auch im vorliegenden Beispiele kann die oben (Aufgabe 214) erwähnte Kontrollrechnung herangezogen werden.

Dritter Fall.

(Gegeben: a, r, p, v und b. Gesucht: n. Anwendung der Formeln XXIV. c und XXV. c.:

$$(Ns):\ n = \frac{\log. r - \log. \left(r - [a.(1{,}0p^b - 1).1{,}0p^v]\right)}{\log. 1{,}0p}$$

$$(Vs):\ n = \frac{\log. r - \log. \left(r - [a.(1{,}0p^b - 1).(1{,}0p^{v-b}]\right)}{\log. 1{,}0p}$$)

216. Einer Rentenbank wude ein Kapital von 14 900 Mark mit der Bestimmung übergeben, daß der Einleger von der Empfängerin als Gegenleistung eine Rente von 3 010 Mark beziehe, welche nach Ablauf von 10 Jahren beginnt und jedes zweite Jahr nachschüssig zahlbar ist. Wieviel Jahre hindurch wird der Käufer diese Rente bei Zugrundelegung eines Zinsfußes von $3^1/_2$ Prozent genießen können?

A. $$n = \frac{\log. 3\,010 - \log. \left(3\,010 - [14\,900 \times (1{,}035^2 - 1) \times 1{,}035^{10}]\right)}{\log. 1{,}035}$$

$\log. 1{,}035 = \mathbf{0{,}0149403}$
$\times 2$
$\log. 1{,}035^2 = 0{,}0298806$
$\text{num.} \log. 1{,}035^2 = 1{,}0712247$
$\text{num.} \log. 1{,}035^2 - 1 = \mathbf{0{,}0712247}$
$\log. 1{,}035^{10} = 0{,}1494030$
$\text{num.} \log. 1{,}035^{10} = \mathbf{1{,}4105971}$

$14\,900 \times 0{,}0712247 = 1\,061{,}248$
$1\,061{,}248 \times 1{,}4106 \doteq 1\,497$
$3\,010 - 1\,497 = 1\,513$
$\log. 3\,010 = 3{,}4785665$
$- \log. 1\,513 = 3{,}1798389$
$0{,}2987276$
$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$
$n = \frac{2987276}{149403}$
$= \mathbf{20}$ Jahre (rund).

Division logarithmisch ausgeführt:

$\log. 0{,}2987276 = 0{,}4752754 - 1$
$- \log. 0{,}0149403 = 0{,}1743593 - 2$
$1{,}3009161$
num. $= \mathbf{19}{,}995$ oder rund **20** Jahre (wie oben).

217. Ein vermögender Bürger will seiner Heimatgemeinde zum Zwecke der Förderung gemeinnütziger Institutionen ein Kapital von 50000 Mark, und zwar in Form einer gleichwertigen, nach 3 Jahren beginnenden und je nach 5 Jahren wiederkehrenden vorschüssigen Rente von 12000 Mark zuwenden. Er trifft dieserhalb ein Abkommen mit der Rentenanstalt, welche gegen Empfang der Einlage die Auszahlung der Rente übernimmt. Wie viele Jahre wird diese von der Gemeinde bei Anrechnung eines Zinsfußes von 4 Prozent bezogen werden können?

A. $$n = \frac{\log. 12\,000 - \log. \left(12\,000 - [50\,000 \times (1{,}04^5 - 1) \times 1{,}04^{3-5}]\right)}{\log. 1{,}04}$$

$$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$$
$$\times 5$$
$$\log. 1{,}04^5 = 0{,}0851665$$
$$\text{num.} \log. 1{,}04^5 = 1{,}2166523$$
$$\text{num.} \log. 1{,}04^5 - 1 = 0{,}2166519$$
$$1{,}04^{3-5} = 1{,}04^{-2} = \frac{1}{1{,}04^2}$$
$$\log. 1{,}04^2 = 0{,}0340666$$
$$\text{num.} \log. 1{,}04^2 = 1{,}0816000$$
$$\frac{1}{1{,}0816} = 0{,}9245562$$
$$5 \times 2\,166{,}519 = 10\,832{,}595$$
$$\log. 10\,832{,}595 = 4{,}0347325$$
$$+ \log. 0{,}9245562 = 0{,}9659333 - 1$$
$$4{,}0006658$$
$$\text{num.} = 10\,015{,}344$$

$$12\,000 - 10\,015{,}344 = 1\,984{,}656$$
$$\log. 12\,000 = 4{,}0791812$$
$$-\log. 1\,984{,}656 = 3{,}2976853$$
$$0{,}7814959$$
$$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$$
$$n = \frac{7814959}{170333} = \mathbf{45}{,}88 \text{ Jahre.}$$

Division in logarithmischer Ausführung:

$$\log. 0{,}7814959 = 0{,}8929267 - 1$$
$$- \log. 0{,}0170333 = 0{,}2312988 - 2$$
$$1{,}6616279$$
$$\text{num.} = \mathbf{45}{,}88 \text{ Jahre (wie oben).}$$

Anmerkung 1. Will man eine Probe auf die Richtigkeit der Rechnung machen, so hat man das Einlage-Kapital von 50 000 Mark auf die Dauer von $b + n = 48{,}88$ Jahren zu prolongieren und dem also gefundenen Endwert denjenigen, welchen die vorschüssige Rente von 12 000 Mark mit Ablauf von $n = 45{,}88$ Jahren (Formel XIX) erreicht, gegenüberzustellen. Im Beispiele berechnen sich beiderseits übereinstimmend rund 340 060 Mark.

Anmerkung 2. Zum Zwecke eines rechnungsmäßigen Ausgleiches hinsichtlich des Jahresbruchteils (0,88) ist unter Bezugnahme auf die Darlegung insbesondere zu Aufgabe 174 folgendermaßen zu Werke zu gehen:

Das Einlage-Kapital wächst bis zum Ablauf von $b + n = 48$ Jahren auf:

$50\,000 \times 1{,}04^{48} = 50\,000 \times 6{,}5705 = 5 \times 65\,705$ . . . $= 328\,525{,}00$ Mark

Dagegen beträgt der Endwert der $9 \times 5 = 45$ Jahre vorschüssig zahlbaren Rente (Formel XIX):

$\dfrac{12\,000 \times 1{,}04^5 \times (1{,}04^{45} - 1)}{1{,}04^5 - 1} =$ . . . . 326,237,52 Mark

Differenz: 2 287,48 Mark.

Hiernach hat die Rentenanstalt noch diesen auf 0,88 Jahre entfallenden Betrag am Ende des 45ten Jahres auszuzahlen, also der letzten Rate zuzufügen. —

g) Siebente Reihe (218–225).

aa) Renten, welche in **geometrischer** Progression zunehmen.

(Anwendung der Formeln XXVI—XXVI c.)

Erster Fall.

(Gegeben: r, e, p und n. Gesucht: $A = a \,.\, 1{,}0p^n$. Anwendung der Formel XXVI: $A = \dfrac{r\,.\,(e^n - 1{,}0p^n)}{e - 1{,}0p}$)

218. Es hat Jemand für die Dauer von 18 Jahren eine nachschüssige Rente zu beziehen, welche mit einer Rate von 400 Mark beginnt, in der Folge aber von Jahr zu Jahr um je $^1/_8$ oder 12,5 Prozent gesteigert wird. Wenn der Bezugsberechtigte diese Rente auf Zinseszins anstehen lässet: Wie groß ist dann das Kapital, welches er am Schlusse der Zeitdauer des Rentenlaufes bei Anrechnung eines Zinsfußes von 4 Prozent zu fordern hat?

A. $$A = \frac{400 \times (1{,}125^{18} - 1{,}04^{18})}{1{,}125 - 1{,}04}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}125 &= 0{,}0511525 \\
&\quad \times 18 \\
\log. 1{,}125^{18} &= 0{,}9207450 \\
\text{num.} \log. 1{,}125^{18} &= \mathbf{8{,}3319195} \\[6pt]
\log. 1{,}04 &= 0{,}0170333 \\
&\quad \times 18 \\
\log. 1{,}04^{18} &= 0{,}3065994 \\
\text{num.} \log. 1{,}04^{18} &= \mathbf{2{,}0258129}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{num.} \log. 1{,}125^{18} &= 8{,}3319195 \\
-\,\text{num.} \log. 1{,}04^{18} &= 2{,}0258129 \\
&\quad 6{,}3061066 \\
400 \times 6{,}3061066 &= 2\,522{,}44264 \\
1{,}125 - 1{,}04 &= 0{,}085
\end{aligned}$$

$$A = \frac{2\,522{,}44264}{0{,}085} = \frac{2\,522\,442{,}64}{85} = \mathbf{29\,675{,}80} \text{ Mark.}$$

Anmerkung 1. Wird die Rente je am Anfange des Jahres bezogen, so hat man analog dem Verfahren der Anwendung der Formel XV in den Dividendus noch den Faktor 1,04 einzustellen.

Anmerkung 2. Läge der Fall vor, daß die gleiche Rente je am Schlusse des Jahres in dem gleichen Verhältnisse vermindert würde, so wäre der Endwert derselben, bezogen auf den Ablauf von 18 Jahren, gemäß den Andeutungen in der Fußnote zur Formel XXVI (S. 159) zu berechnen, wie folgt:

Beträgt die fortschreitende Reduktion $^1/_8$, so erübrigen von den jeweiligen Raten $^7/_8 = 0{,}875 = \dfrac{1}{1{,}142857}$. Somit ist:

$$A = \frac{400 \times (1{,}04^{18} - 0{,}875^{18})}{1{,}04 - 0{,}875}$$

Die Rechnung ergibt alsdann:

$$\begin{aligned}
1{,}04^{18} &= 2{,}0258129 \\
-\,0{,}875^{18} &= 0{,}0903953 \\
&\quad 1{,}9354176
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&1{,}9354176 \\
&\times 400 \\
&774{,}1670
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&1{,}040 \\
&-0{,}875 \\
&0{,}165
\end{aligned}$$

$$A = \frac{774{,}1670}{0.165} = \mathbf{4\,691{,}92} \text{ Mark.}$$

Zweiter Fall.

(Gegeben: r, e, p und n. Gesucht: a. Anwendung der Formel XXVI. a.:

$$a = \frac{r \cdot (e^n - 1{,}0p^n)}{1{,}0p^n \cdot (e - 1{,}0p)}\Big)$$

219. Bei einer Rentenbank geht der Antrag auf ein Abkommen ein, nach welchem sie gegen den Empfang eines sofort einzuzahlenden Kapitales eine 15 Jahre hindurch laufende nachschüssige Rente zu verabfolgen hat, deren erste Rate 600 Mark beträgt, indessen die weiteren Raten von Jahr zu Jahr um je $^1/_{20}$ oder 5 Prozent erhöht werden sollen. Fragen: 1. Welche Einlage hat die Bank zu fordern, sofern sie der Berechnung einen Zinsfuß von $3^1/_2$ Prozent zu Grunde legt? 2. Wie hoch würde sich das Einstands-Kapital belaufen, wenn der Käufer unter im übrigen gleichen Bedingungen den Beginn des Rentenbezuges um 5 Jahre hinausschieben will?

A. Zu 1.) $a = \frac{600 \times (1{,}05^{15} - 1{,}035^{15})}{1{,}035^{15} \times (1{,}05 - 1{,}035)}$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}05 &= 0{,}0211893 \\ &\times 15 \\ \log. 1{,}05^{15} &= 0{,}3178395 \\ \text{num. log. } 1{,}05^{15} &= \mathbf{2{,}0789281} \\ \log. 1{,}035 &= 0{,}0149403 \\ &\times 15 \\ \log. 1{,}035^{15} &= 0{,}2241045 \\ \text{num. log. } 1{,}035^{15} &= \mathbf{1{,}6753458} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{num. log. } 1{,}05^{15} &= 2{,}0789281 \\ - \text{num. log. } 1{,}035^{15} &= 1{,}6753458 \\ &\quad 0{,}4035823 \\ &\quad \times 600 \\ &\quad 242{,}14938 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{num. log. } 1{,}035^{15} &= 1{,}6753458 \\ \times (1{,}05 - 1{,}035) &= 0{,}015 \\ &\quad 0{,}02513019 \end{aligned}$$

$$a = \frac{242{,}1493800}{0{,}02513019} = \mathbf{9\,635{,}80} \text{ Mark.}$$

Division logarithmisch ausgeführt:

$$\begin{aligned} \log. 242{,}14938 &= 2{,}3840833 \\ - \log. 0{,}02513019 &= 0{,}4001958 - 2 \\ &\quad 3{,}9838875 \\ \text{num.} &= \mathbf{9\,635{,}79} \text{ Mark (wie oben).} \end{aligned}$$

Anmerkung. Benutzt man die in Fußnote S. 160 angegebene einfachere Formel, so hat man:

$$a = \frac{600 \times \left(\frac{1{,}05^{15}}{1{,}035^{15}} - 1\right)}{1{,}05 - 1{,}035}$$

$$\frac{1{,}05^{15}}{1{,}035^{15}} - 1 = \frac{2{,}0789281}{1{,}6753458} - 1 = 1{,}240895 - 1 = 0{,}240895$$

$$\begin{aligned} &\times 600 \\ &144{,}537 \end{aligned}$$

$$a = \frac{144{,}537}{0{,}015} = \frac{144\,537}{15}$$

$$= \mathbf{9\,635{,}80} \text{ Mark (wie oben).}$$

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$a = \frac{600 \times (2{,}0789282 - 1{,}6753488) \times 0{,}5968906}{0{,}015}$$

$$= 40\,000 \times 0{,}4035794 \times 0{,}5968906 = \mathbf{9635{,}71} \text{ Mark.}$$

A. Zu 2.) Stellt der Käufer der Rente die Bedingung, daß die Ratenzahlungen erst nach Ablauf von 5 Jahren beginnen sollen, dann ermittelt sich das Einlage-Kapital, indem man den auf den Zeitpunkt des Beginns der Ratenzahlungen bezogenen Barwert (a) der Rente auf die Gegenwart discontiert. Die Rechnung ergibt dann:

$$\frac{9\,635{,}80}{1{,}035^5}$$

$$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$$
$$\times 5$$
$$\log. 1{,}035^5 = 0{,}0747015$$
$$\text{num.} \log. 1{,}035^5 = 1{,}1876854$$

$$a = \frac{9\,635{,}80}{1{,}1876854} = \mathbf{8\,113{,}09} \text{ Mark}$$

oder:

$$\log. 9\,635{,}80 = 3{,}9838878$$
$$- \log. 1{,}1876854 = 0{,}0747015$$
$$3{,}9091863$$
$$\text{num.} = \mathbf{8\,113{,}09} \text{ Mark (wie oben).}$$

Dritter Fall.

(Gegeben: a, e, p und n. Gesucht: r. Anwendung der Formel XXVI. b:

$$r = \frac{a \,.\, 1{,}0p^n \,.\, (e - 1{,}0p)}{e^n - 1{,}0p^n}\Bigg)$$

220. Der Besitzer eines Bar-Kapitales von 25 000 Mark will diese Summe bei einer Rentenanstalt derart anlegen, daß er oder sein Rechtsnachfolger als Gegenleistung eine nach 12 Jahren beginnende, nachschüssige, durch 25 Jahre laufende, von Jahr zu Jahr um $^1/_{10}$ oder 10 Prozent des jeweiligen Ratenbetrages sich vergrößernde Rente beziehen kann. Wie hoch beläuft sich die erste Rate dieser Rente, wenn $4^1/_2$ Prozent Zinsen berechnet werden?

A. Die Rechnung kann in der Weise geschehen, daß man zunächst den Endwert ermittelt, welchen die Einlage (25 000 Mark) nach Ablauf von 12 Jahren erreichen wird, um dann diesen Betrag ($25\,000 \times 1{,}045^{12} = 42\,397{,}00$ Mark) mit dem zugehörigen Faktor für die Dauer des Rentenlaufes ($1{,}045^{25}$) in den Dividendus der vorangestellten Formel einsetzt. Wohl noch einfacher gestaltet sich aber das Verfahren, wenn man das Einstands-Kapital in diese Formel aufnimmt, dann aber den Zinsfaktor mit der Gesamtzahl der Jahre (12 + 25) potenziert, in welchem Falle die Gleichung lautet:

$$r = \frac{25\,000 \times 1{,}045^{12+25} \times (1{,}10 - 1{,}045)}{1{,}10^{25} - 1{,}045^{25}}$$

$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$
$\times 37$
$\log. 1{,}045^{37} = \mathbf{0{,}7073031}$
$\log. 1{,}045^{25} = 0{,}4779075$
$\text{num} \log. 1{,}045^{25} = 3{,}0054355$
$\log. 1{,}10 = 0{,}0413927$
$\times 25$
$\log. 1{,}10^{25} = 1{,}0348175$
$\text{num.} \log. 1{,}10^{25} = 10{,}8347150$
$\log. (1{,}10 - 1{,}045) = \log. 0{,}055 = \mathbf{0{,}7403627 - 2}$
$\log. (1{,}10^{25} - 1{,}045^{25}) = \log. 7{,}8292795 = \mathbf{0{,}8937218}$

$\log. 25\,000 = 4{,}3979400$
$+ \log. 1{,}045^{37} = 0{,}7073031$
$+ \log. (1{,}10 - 1{,}045) = 0{,}7403627 - 2$
$3{,}8456058$
$- \log. (1{,}10^{25} - 1{,}045^{25}) = 0{,}8937218$
$2{,}9518840$
$\text{num.} = 895{,}125$
$r = \mathbf{895{,}12}$ M. (rd.).

Anmerkung. Die vorliegende Rechnung ließe sich übrigens noch etwas vereinfachen, indem man nur den Dividendus der Gleichung logarithmisch behandelt und dann den numerus desselben durch die Größe von $1{,}10^{25} - 1{,}045^{25} = 7{,}82928$ dividiert. Man erhält dann: $\frac{7\,008{,}188}{7{,}82928} = 895{,}12$ Mark (w. o.).

Vierter Fall.

(Gegeben: a, r, e und p. Gesucht: n. Anwendung der Formel: XXVI. c:

$$n = \frac{\log. [r + a . (e - 1{,}0p)] - \log. r}{\log. \frac{e}{1{,}0p}}$$)

221. Durch eine bare Einlage (Mise) im Betrage von 18 000 Mark will sich S. den Bezug einer nachschüssigen Rente sichern, welche, mit 900 Mark beginnend, regelmäßig alljährlich um $^1/_{16}$ oder 6,25 Prozent steigt. Wie viele Jahre hindurch wird ihm die Bank diese Rente bei Anrechnung eines Zinsfußes von $3^3/_4$ Prozent auszuzahlen haben?

A. $$n = \frac{\log. [900 + 18\,000 \times (1{,}0625 - 1{,}0375)] - \log. 900}{\log. \frac{1{,}0625}{1{,}0375}}$$

$1{,}0625 - 1{,}0375 = 0{,}025$
$\frac{1{,}0625}{1{,}0375} = 1{,}0240964$
$\log. 1{,}0240964 = \mathbf{0{,}0103409}$

$18\,000 \times 0{,}025 = 18 \times 25 = 450$
$900 + 450 = 1\,350$
$\log. 1\,350 = 3{,}1303338$
$- \log. 900 = 2{,}9542425$
$0{,}1760913$
$n = \frac{0{,}1760913}{0{,}0103409} = \frac{1760913}{103409}$
$= \mathbf{17}{,}029$ Jahre.

Logarithmische Division:

$$\log. 0{,}1760913 = 0{,}2457379 - 1$$
$$-\log. 0{,}0103409 = 0{,}0145583 - 2$$
$$1{,}2311796$$
$$\text{num.} = \mathbf{17{,}029} \text{ Jahre (wie oben).}$$

Anmerkung. Hinsichtlich der Ausgleichung der beiderseitigen Ansprüche in Bezug auf den Jahresbruchteil sei auf die Ausführungen zu den Aufgaben 174 und 217 verwiesen.

bb) Renten, welche in **arithmetischer** Progression zunehmen.

(Anwendung der Formeln XXVII—XXVII. b. β.)

Erster Fall.

(Gegeben: r, d, p und n. Gesucht: $A = 1{,}0p^n$. Anwendung der Formel

$$\text{XXVII.:}\quad A = \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} + \left\{\frac{d}{0{,}0p} \cdot \left[\frac{1{,}0p^n - 1{,}0p}{0{,}0p} - (n-1)\right]\right\}\Bigg)$$

222. Ein Beamter zahlt an die Sparkasse 250 Mark mit dem Vorhaben, diese Einlage am Ende eines jeden folgenden Jahres mit einem Zuschusse von 50 Mark = $^1/_5$ oder 20 Prozent des ursprünglichen Betrages zu wiederholen. Wenn ihm nun die Kasse einen Zins von $3^1/_2$ Prozent vergütet: Auf welche Summe werden dann die Einzahlungen mit Ablauf des 12ten Jahres angewachsen sein?

A.

$$A = \frac{250 \times (1{,}035^{12} - 1)}{0{,}035} + \left\{\frac{250 \times 0{,}20}{0{,}035} \times \left[\frac{1{,}035^{12} - 1{,}035}{0{,}035} - (12-1)\right]\right\}$$

$$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$$
$$\times 12$$
$$\log. 1{,}035^{12} = 0{,}1792836$$
$$\text{num.} \log. 1{,}035^{12} = 1{,}5110666$$
$$\text{num.}\log. 1{,}035^{12} - 1 = 0{,}5110666$$
$$\log. (1{,}035^{12} - 1) = \mathbf{0{,}7084775 - 1}$$
$$1{,}035^{12} - 1{,}035 = \mathbf{0{,}4760666}$$
$$\log. 0{,}035 = \mathbf{0{,}5440680 - 2}$$

$$\log. 250 = 2{,}3979400$$
$$+\log. (1{,}035^{12} - 1) = 0{,}7084775 - 1$$
$$2{,}1064175$$
$$-\log. 0{,}035 = 0{,}5440680 - 2$$
$$3{,}5623495$$
$$\text{num.} = 3\,650{,}4758$$

$$\frac{250 \times 0{,}20}{0{,}035} = \frac{50}{0{,}035} = \frac{100}{0{,}07} = \frac{10\,000}{7} = 1\,428{,}5714$$

$$\frac{1{,}035^{12} - 1{,}035}{0{,}035} = \frac{0{,}4760666}{0{,}035} =$$
$$\frac{0{,}9521332}{0{,}07} = \frac{95{,}21332}{7} = 13{,}60190$$
$$-(12-1) = 11{,}00000$$
$$2{,}60190$$

$$1\,428{,}5714 \times 2{,}6019 = \ldots\ldots\ 3\,716{,}9999$$

$A = 3\,650{,}4758 + 3\,716{,}9999 = 7\,367{,}4757$ oder rund: **7 367,48** Mark.

Mit Hilfe der Tafel I:

$$A = \frac{250 \times 0{,}5110687}{0{,}035} + \left[\frac{50}{0{,}035} \times \left(\frac{1{,}5110687 - 1{,}035}{0{,}035} - 11\right)\right]$$

$$= 3\,650{,}462 + [1\,428{,}5714 \times (13{,}6019 - 11)]$$

$$= 3\,650{,}462 + (1\,428{,}5714 \times 2{,}6019) = 3\,650{,}462 + 3\,717{,}00 = \mathbf{7\,367{,}46}\text{ M.}$$

Anmerkung. Wenn die Einlagen bezw. die Raten durch eine fallende arithmetische Progression laufen, muß die obige Formel einfach in der Weise abgeändert werden, daß der ganze rechtsseitige Teil derselben, statt als Summand, als Subtrahend aufgeführt wird. Darnach wäre in Anlehnung an das gegebene Beispiel, wenn die Einzahlungen sich von Jahr zu Jahr um $^1/_5$ des anfänglichen Betrages vermindern, also nach Ablauf des 5ten Jahres ganz aufhören, der Endwert derselben an diesem Zeitpunkte:

$$A = \frac{250 \times (1{,}035^6 - 1)}{0{,}035} - \frac{250 \times 0{,}20}{0{,}035} \times \left[\frac{1{,}035^6 - 1{,}035}{0{,}035} - (6-1)\right]$$

$$A = \frac{57{,}3136}{0{,}035} - 1\,428{,}5714 \times \left(\frac{0{,}1942543}{0{,}035} - 5\right)$$

$$= 1\,637{,}5314 - 1\,428{,}5714 \times 0{,}555012$$

$$= 1\,637{,}5314 - 792{,}8743 = \mathbf{844{,}66}\text{ Mark.}$$

Zweiter Fall.

(Gegeben: r, d, p und n. Gesucht: a. Anwendung der Formel XXVII. a:

$$a = \frac{1}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p} \cdot \left\{r \cdot (1{,}0p^n - 1) + d \cdot \left[\frac{1{,}0p^n - 1{,}0p}{0{,}0p} - (n-1)\right]\right\})$$

223. M. will durch einmalige Kapital-Einzahlung eine 20 Jahre laufende nachschüssige Rente erwerben, welche mit einer Rate von 500 Mark beginnt, in der Folge aber von Jahr zu Jahr um $^1/_4$ = 25 Prozent der ersten Rate steigt. Welche Summe hat die Bank, welche die Rentenzahlung übernimmt, zu fordern, wenn ein Zinsfuß von 4 Prozent zu Grunde gelegt wird?

A. $$a = \frac{1}{1{,}04^{20} \times 0{,}04} \times \left\{500 \times (1{,}04^{20} - 1) + 125 \times \left[\frac{1{,}04^{20} - 1{,}04}{0{,}04} - (20-1)\right]\right\}$$

$$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$$
$$\times 20$$
$$\log. 1{,}04^{20} = 0{,}3406660$$
$$\text{num.}\log. 1{,}04^{20} = \mathbf{2{,}1911191}$$
$$\text{num.}\log. 1{,}04^{20} - 1 = 1{,}1911191$$

$$\frac{1}{1{,}04^{20} \times 0{,}04} = \frac{25}{2{,}1911191} = 11{,}4096947$$

$$500 \times (1{,}04^{20} - 1) = 500 \times 1{,}1911191 = 595{,}559550$$

$$+125 \times \left[\frac{2{,}1911191 - 1{,}04}{0{,}04} - (20-1)\right]$$

$$= 125 \times \left(\frac{1{,}1511191}{0{,}04} - 19\right) =$$

$$125 \times \left(\frac{115{,}11191}{4} - 19\right) = 125 \times (28{,}777977 - 19)$$

$$= 125 \times 9{,}777977 = \ldots\ldots\ 1\,222{,}247125$$

$$1\,817{,}806675$$

$$a = 1\,817{,}806675 \times 11{,}4096947 = \mathbf{20\,740{,}62}\text{ Mark.}$$

Logarithmische Ausführung der Multiplikation:

$$\begin{aligned} \log.\ 1\,817{,}806675 &= 3{,}2595477 \\ +\log.\ 11{,}409695 &= 1{,}0572740 \\ &\ \overline{4{,}3168217} \end{aligned}$$

num. = **20 740,62** Mark (wie oben).

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$\begin{aligned} a &= 25 \times 0{,}4563869 \times \left[(500 \times 1{,}1911231) + 125 \times \left(\frac{1{,}1511231}{0{,}04} - 19\right)\right] \\ &= 11{,}40967 \times [595{,}56 + 125 \times (28{,}77807 - 19)] \\ &= 11{,}40967 \times (595{,}56 + 1\,222{,}25) \\ &= 11{,}40967 \times 1\,817{,}81 = \mathbf{20\,740{,}61}\ \text{Mark.} \end{aligned}$$

Dritter Fall.

(Gegeben: a, d, p und n. Gesucht: r. Anwendung der Formel XXVII. b. α:

$$r = \frac{a \,.\, 1{,}0p^n \,.\, 0{,}0p - d \,.\left[\frac{1{,}0p^n - 1{,}0p}{0{,}0p} - (n-1)\right]}{1{,}0p^n - 1}\ )$$

224. Es beabsichtigt Jemand, ein ihm zur Verfügung stehendes Kapital von 12 000 Mark bei einer Rentenanstalt in der Weise anzulegen, daß dieselbe ihm oder seinen Erben als Gegenleistung eine mit Ablauf von 24 Jahren einsetzende und 18 Jahre hindurch zu beziehende Rente, welche alljährlich um 200 Mark zunimmt, auszahlen soll. Wie hoch wird sich die erste Rate dieser Rente belaufen, wenn die Rentenanstalt einen Zinsfuß von $3^3/_4$ Prozent berechnet?

A. Im gegebenen Falle ist natürlich der Betrag des Einstands-Kapitales auf den Schluß der Zwischenzeit, bis zu welchem der Rentenbezug aufgeschoben wird, zu prolongieren. Dies kann durch gesonderte Berechnung, oder auch gemäß früherer Darlegungen durch Einbeziehung der betreffenden Potenz in obige Formel geschehen. Wendet man letzteres Verfahren an, so erhält man:

$$r = \frac{12\,000 \times 1{,}0375^{24+18} \times 0{,}0375 - 200 \times \left[\frac{1{,}0375^{18} - 1{,}0375}{0{,}0375} - (18-1)\right]}{1{,}0375^{18} - 1}$$

$$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$$
$$\times 42$$
$$\log. 1{,}0375^{42} = \mathbf{0{,}6715002}$$

$$\log. 1{,}0375^{18} = 0{,}2877858$$
$$\text{num. log. } 1{,}0375^{18} = \mathbf{1{,}9399290}$$
$$\text{num. log. } 1{,}0375^{18} - 1 = \mathbf{0{,}9399290}$$
$$\log. 0{,}0375 = \mathbf{0{,}5740313 - 2}$$

$$\log. 12\,000 = 4{,}0791812$$
$$+ \log. 1{,}0375^{42} = 0{,}6715002$$
$$+ \log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$$
$$3{,}3247127$$
$$\text{num.} = 2\,112{,}0914$$

$$\frac{1{,}0375^{18} - 1{,}0375}{0{,}0375} = \frac{0{,}9024289}{0{,}0375} =$$
$$\frac{7{,}2194312}{0{,}3} = \ldots\ 24{,}064770$$
$$-17{,}000000$$
$$7{,}064770$$
$$200 \times 7{,}064770 = \ldots\ldots\ 1412{,}9540$$

$$2\,112{,}0914 - 1\,412{,}9540 = 699{,}1374$$
$$r = \frac{699{,}1374}{0{,}9399290} = \mathbf{743{,}82} \text{ Mark.}$$

Logarithmische Ausführung der Division:

$$\log. 699{,}1374 = 2{,}8445624$$
$$- \log. 0{,}9399290 = 0{,}9730950 - 1$$
$$2{,}8714674$$
$$\text{num.} = \mathbf{743{,}82} \text{ Mark (wie oben).}$$

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$r = \left[450 \times 4{,}6935389 - 200 \times \left(\frac{0{,}9024293}{0{,}0375} - 17\right)\right] \times \frac{1}{0{,}9399293}$$
$$= [2\,112{,}0925 - 200 \times (24{,}06478 - 17)] \times 1{,}0639$$
$$= (2\,112{,}0925 - 1\,412{,}956) \times 1{,}0639 = 699{,}1365 \times 1{,}0639 = \mathbf{743{,}81} \text{ Mark.}$$

Anmerkung 1. Wäre vereinbart worden, daß die Rente je am Beginne des Jahres zu entrichten, also eine vorschüssige sei, so müßte der Divisor der Formel noch durch Einschaltung des Faktors 1,0375 verstärkt werden, wodurch der Quotient der ganzen Gleichung sich vermindert. Die Rechnung ergibt dann:

$$\frac{699{,}1374}{0{,}9399290 \times 1{,}0375} = 717{,}00 \text{ Mark.}$$

Anmerkung 2. Handelte es sich darum, die Größe der ersten Rate r dann zu ermitteln, wenn statt des absoluten Betrages der jährlichen Steigerung derselben nur das Verhältnis beider Werte zu einander gegeben ist, so wird man der Aufgabe auf dem Wege der Umformung obiger Gleichung beikommen können. In Anknüpfung an das vorliegende Beispiel erhielte man dann, da in demselben jenes Verhältnis 743,82 : 200 oder 26,888 Prozent = 1 : 1,26888; 1 : 1,53776; 1 : 1,80664 . . . beträgt, die jährliche Zunahme der Raten also $\frac{26{,}888}{100} = \frac{1}{3{,}719}$ der unbekannten ersten Rate ausmacht:

$$r \times (1{,}0375^{18}-1) - 12\,000 \times 1{,}0375^{42} \times 0{,}0375 - \frac{1}{3{,}719} \times \left[\frac{1{,}0375^{18}-1{,}0375}{0{,}0375} - (18-1)\right]$$

$$r \times (1{,}0375^{18}-1) + \frac{1}{3{,}719} \times \left[\frac{1{,}0375^{18}-1{,}0375}{0{,}0375} - (18-1)\right] = 12\,000 \times 1{,}0375^{42} \times 0{,}0375$$

$$r \times (1{,}0375^{18}-1) + \left(\frac{1{,}0375^{18}-1{,}0375}{0{,}0375 \times 3{,}719} - \frac{18-1}{3{,}719}\right) = 12\,000 \times 1{,}0375^{42} \times 0{,}0375$$

$$r = \frac{12\,000 \times 1{,}0375^{42} \times 0{,}0375}{1{,}0375^{18} - 1 + \left(\frac{1{,}0375^{18}-1{,}0375}{0{,}0375 \times 3{,}719} - \frac{17}{3{,}719}\right)}$$

Die rechnerische Behandlung dieser Gleichung ergibt dann:

$$12\,000 \times 1{,}0375^{42} \times 0{,}0375 = 2\,112{,}0914$$

$$1{,}0375^{18} - 1 = 0{,}9399290$$

$$+ \frac{0{,}9024290}{0{,}1394625} - \frac{17}{3{,}719} = 6{,}4707640 - 4{,}5711215 = 1{,}8996425$$

$$2{,}8395715$$

$$r = \frac{2\,112{,}0914}{2{,}8395715} = \mathbf{743{,}82} \text{ Mark (wie oben).}$$

Vierter Fall.

(Gegeben: a, r, p und n. Gesucht: d. Anwendung der Formel XXVII. b. β.:

$$\frac{a \,.\, 1{,}0p^n \,.\, 0{,}0p - r \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{\frac{1{,}0p^n - 1{,}0p}{0{,}0p} - (n-1)}\Bigg)$$

225. Ein junger Mann ist entschlossen, mittelst regelmäßiger, 15 Jahre hindurch sich wiederholender Spar-Einlagen, welche mit 275 Mark beginnen sollen, ein Kapital von 15000 Mark anzusammeln. Die Bank, welche mit ihm ein Abkommen treffen und einen Zinsfuß von $3^1/_2$ Prozent berechnen will, hat Auskunft darüber zu geben, welcher Betrag den Einlagen von Jahr zu Jahr zugefügt werden müßte, damit die ganze Reihe der Zahlungen innerhalb der gegebenen Frist bis zu der verlangten Summe anwächst. Wie wird die Antwort lauten?

A. Im vorliegenden Falle wird der Endwert der Einlagen durch den Ausdruck $a \,.\, p^n$ der Formel bezeichnet. Somit ist:

$$d = \frac{15\,000 \times 0{,}035 - 275 \times (1{,}035^{15} - 1)}{\frac{1{,}035^{15} - 1{,}035}{0{,}035} - (15-1)}$$

$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$
$\times 15$
$\log. 1{,}035^{15} = 0{,}2241045$
$\text{num. log. } 1{,}035^{15} = 1{,}6753458$
$\text{num. log. } 1{,}035^{15} - 1 = 0{,}6753458$

$15\,000 \times 0{,}035 = 15 \times 35 = \;.\;.\; 525{,}000000$
$-275 \times 0{,}6753458$
$= -11 \times 16{,}883645 = \;.\;.\;.\; 185{,}720095$
$339{,}279905$

$$\frac{1{,}035^{15} - 1{,}035}{0{,}035} = \frac{0{,}6403458}{0{,}035}$$

$$= \frac{128{,}06916}{7} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 18{,}29559$$

$$-(15-1) = 14{,}00000$$

$$4{,}29559$$

$$d = \frac{339,279905}{4,29559} = \mathbf{79} \text{ Mark (nahezu).}$$

Das macht aber von der ersten Rate rund $^2/_7$ oder 29 Prozent.

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$d = [525 - (275 \times 0,67534888)] \times \frac{1}{18,2957 - 14}$$

$$= (525 - 185,7209) \times \frac{1}{4,2957}$$

$$= 339,2791 \times 0,2328 = \mathbf{79} \text{ Mark (rund).}$$

Sonder-Aufgaben.
(226—240.)

Wie bei den Beispielen aus den verschiedenen Rubriken der Zinseszinsrechnung, so ist auch bei denjenigen über die Zeitrenten abschließend noch mehrerer Aufgaben zu gedenken, welche zwar ebenfalls auf Grundlage des seither dargelegten Verfahrens behandelt werden können, jedoch in Folge der eigenartigen Fragestellung, bildlich gesprochen, eine Frontveränderung, oder aber noch eine Heranziehung von rechnerischen Beihilfen erheischen. Zur leichteren Orientierung über derartige Vorkommnisse sollen in Nachfolgendem zunächst nur solche Fälle in's Auge gefaßt werden, welche im Kapitalverkehr auftauchen. Vorbehalten bleibt hiernach eine Erörterung von Aufgaben, welche der land- und forstwirtschaftlichen Produktion angehören. (Beispiele aus diesem Gebiete enthalten der Unter-Abschnitt C. der Rentenrechnung [Ewige Renten] und der Schluß-Abschnitt [Anhang]).

a) Rentenbezug, welcher auf einer einmaligen Kapital-Einlage und auf gleichmäfsig wiederkehrenden Zuschüssen zu solcher beruht.

226. Ein junger Mann, welcher über ein Kapital von 25000 Mark verfügt, beabsichtigt, sich mit demselben eine nach Ablauf von 15 Jahren beginnende und dann während 18 Jahren am Ende eines jeden Jahres beziehbare Rente zu erwerben. Um diese aber auf die Höhe von 5000 Mark zu bringen, will er einen hierfür weiter noch erforderlichen Betrag in Form eines innerhalb der Zwischenzeit von 15 Jahren am Ende eines jeden Jahres zu leistenden Zuschusses zu der ursprünglichen Kapital-Einlage aufwenden. Die Bank, mit welcher er eine bezügliche Vereinbarung trifft, berechnet 4 Prozent Zinseszinsen. Wie hoch wird sich hiernach jener jährliche Zuschuß belaufen müssen?[1])

A. Das nächstliegende Verfahren der Ermittlung der jährlichen Zulagen besteht darin, daß man den Barwert (a) der verlangten Rente (r), bezogen auf den Abschluß der Vorperiode von 15 Jahren, also auf den Beginn des Rentenlaufes, berechnet, von demselben den Endwert ($A_,$), auf welchen die ursprüngliche Kapital-Einlage ($a_,$) bis dahin anwächst, in Abzug bringt, und schließlich nach Maßgabe der Differenz ($a - A_,$), welche als Endwert aufzufassen ist, den Betrag der entsprechenden, 15 Jahre hindurch zu zahlenden jährlichen Zuschüsse ($r_,$) bestimmt. Hiernach gestaltet sich die Rechnung folgendermaßen:

---

[1]) Man vergleiche hierzu die verwandten Aufgaben 171, 201, 208 und 211.

$$a = \frac{5000 \times (1{,}04^{18} - 1)}{1{,}04^{18} \times 0{,}04}$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$
$\times 18$
$\log. 1{,}04^{18} = \mathbf{0{,}3065994}$
$\text{num.} \log. 1{,}04^{18} = 2{,}0258130$
$\text{num.} \log. 1{,}04^{18} - 1 = 1{,}0258130$
$\log. (1{,}04^{18} - 1) = \mathbf{0{,}0110682}$
$\log. 0{,}04 = \mathbf{0{,}6020600 - 2}$

$\log. 5000 = 3{,}6989700$
$+ \log. (1{,}04^{18} - 1) = 0{,}0110682$
$3{,}7100382$
$\log. 1{,}04^{18} = 0{,}3065994$
$+ \log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$
$- 0{,}9086594 - 2$
$4{,}8013788$
$\text{num.} = 63\,296{,}36$
$a = \mathbf{63\,296{,}36}$ Mark.

Die ursprüngliche Kapital-Einlage ($a_{,}$) von 25 000 M. wächst in 15 Jahren auf: $A_{,} = 25\,000 \times 1{,}04^{15}$.

Nun ist $\log. 1{,}04^{15} = 0{,}2554995$, und $\text{num.} \log. 1{,}04^{15} = 1{,}8009412$. Daher der Endwert $A_{,}$:

$25\,000 \times 1{,}8009412 = \mathbf{45\,023{,}53}$ Mark.
$a - A_{,} = \mathbf{18\,272{,}83}$ Mark.

Somit ist:
$$r_{,} = \frac{18\,272{,}83 \times 0{,}04}{1{,}04^{15} - 1} \quad (\text{XIV. b.})[1]$$

Das macht aber (da $\text{num.} \log. 1{,}04^{15} - 1 = 0{,}8009412$):
$$\frac{730{,}9132}{0{,}8009412} = \mathbf{912{,}57} \text{ Mark.}$$

Ein anderer, beispielshalber heranzuziehender Weg ist folgender:

Man betrachtet die Rente (r) als eine um 15 Jahre aufgeschobene Rente, ermittelt deren gegenwärtigen Wert (a), bringt von demselben den Betrag des Einlage-Kapitales ($a_{,}$) in Abzug, und bestimmt nach Maßgabe des Restes ($a - a_{,}$), indem man denselben als Einlage (Mise) auffaßt, den ihm entsprechenden Jahresbetrag ($r_{,}$) der 15 Jahre hindurch zu entrichtenden Zulagen. Die Rechnung lautet alsdann:

$$a = \frac{5000 \times (1{,}04^{18} - 1)}{1{,}04^{15+18} \times 0{,}04} \quad (\text{XX. a.})$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$
$\times 33$
$\log. 1{,}04^{33} = \mathbf{0{,}5620989}$

(Die übrigen logarithmisch bestimmten Einzelwerte wie oben — Verfahren 1 —)

$\log. 5000 = 3{,}6989700$
$+ \log. (1{,}04^{18} - 1) = 0{,}0110682$
$3{,}7100382$
$\log. 1{,}04^{33} = 0{,}5620989$
$+ \log. 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$
$- 1{,}1641589 - 2$
$4{,}5458793$
$\text{num.} = 35\,146{,}27$
$a = 35\,146{,}27$ M.

Hiervon ab der Betrag des Einlage-Kapitales ($a_{,}$) mit . . 25 000,00 „
$a - a_{,} = \mathbf{10\,146{,}27}$ M.

[1] Es ist zu beachten, daß hier der Wert von 18 272,83 die Bedeutung von $a \cdot 1{,}0p^{n}$ der Formel besitzt.

Die Schlußrechnung ergibt:

$$r_, = \frac{10\,146,27 \times 1,04^{15} \times 0,04}{1,04^{15} - 1} \text{ (XIV. b.)}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1,04 &= 0,0170333 \\
&\times 15 \\
\log. 1,04^{15} &= 0,2554995 \\
\text{num.} \log. 1,04^{15} &= 1,8009412 \\
\text{num.} \log. 1,04^{15} - 1 &= 0,8009412 \\
\log. (1,04^{15} - 1) &= 0,9036007 - 1 \\
\log. 0,04 &= 0,6020600 - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 10\,146,27 &= 4,0063065 \\
+ \log. 1,04^{15} &= 0,2554995 \\
+ \log. 0,04 &= 0,6020600 - 2 \\
& 4,8638660 - 2 \\
- \log. (1,04^{15} - 1) &= 0,9036007 - 1 \\
& 2,9602653 \\
\text{num.} &= 912,57 \\
r_, &= \mathbf{912,57} \text{ Mark}
\end{aligned}$$

(wie oben).

Anmerkung. Auch auf den vorliegenden Fall ließe sich das bei früheren Aufgaben bereits erörterte indirekte Verfahren der Aufstellung einer zusammenfassenden Gleichung anwenden.

Bezeichnet man nämlich den in Frage stehenden Betrag der jährlichen Zuschüsse wiederum mit $r_,$, so ist der Barwert $(a_,)$ aller Leistungen des Rentenempfängers einschließlich der ursprünglichen Kapital-Einlage:

$$a_, = 25\,000 + \frac{r_, \times (1,04^{15} - 1)}{1,04^{15} \times 0,04} \text{ (XIV. a.)}$$

Hingegen ist der Barwert (a) der um 15 Jahre aufgeschobenen, 18 Jahre lang laufenden Rente (r), welche die Bank zu zahlen hat:

$$a = \frac{5\,000 \times (1,04^{18} - 1)}{1,04^{33} \times 0,04} \text{ (XX. a.)}$$

Wenn nun diese Barwerte die gleiche Größe erreichen, müssen sich auch die beiderseitigen Ansprüche decken. Entscheidend hierfür ist aber die eine unbekannte Größe $r_,$. Um diese festzustellen, bedarf es ihrer Auslösung aus der Gleichung:

$$25\,000 + \frac{r_, \times (1,04^{15} - 1)}{1,04^{15} \times 0,04} = \frac{5\,000 \times (1,04^{18} - 1)}{1,04^{33} \times 0,04}.$$

Unter Bezugnahme auf die oben bereits auf logarithmischem Wege ermittelten Einzelwerte ergibt dann die Ausführung:

$$\frac{r_, \times (1,04^{15} - 1)}{1,04^{15} \times 0,04} = \frac{5\,000 \times (1,04^{18} - 1)}{1,04^{33} \times 0,04} - 25\,000$$

$$r_, \times (1,04^{15} - 1) = \frac{5\,000 \times (1,04^{18} - 1) \times 1,04^{15} \times 0,04}{1,04^{33} \times 0,04} - 25\,000 \times 1,04^{15} \times 0,04$$

$$r_, \times (1,04^{15} - 1) = \frac{5\,000 \times (1,04^{18} - 1)}{1,04^{18}} - 25\,000 \times 1,04^{15} \times 0,04$$

$$r_, \times 0,8009412 = \frac{5\,000 \times 1,025813}{2,025813} - 1\,000 \times 1,8009412$$

$$r_, \times 0,8009412 = \frac{5\,129,065}{2,025813} - 1\,800,9412$$

$$r_, \times 0,8009412 = 2\,531,855 - 1\,800,9412$$

$$r_, \times 0,8009412 = 730,9138$$

$$r_, = \frac{730,9138}{0,8009412} = \mathbf{912,57} \text{ Mark (wie oben).}$$

b) Zeitlich verschiedener Zinsfufs.

227. Auf sein bei der Rentenanstalt versichertes Kapital erhebt F. einen Vorschuß von 20000 Mark, welchen er zu $3\frac{1}{2}$ Prozent zu ver-

zinsen hat. Der Schuldner möchte aber diese Summe durch gleiche, am Schlusse eines jeden Jahres neben den Zinsen zu entrichtende Tilgungsraten im Betrage von 580 Mark zurückerstatten. Nachdem er die betreffenden Annuitäten (700 + 580 = 1280 Mark) 11 Jahre lang gezahlt hat, beansprucht die Gläubigerin eine Erhöhung des Zinsfußes auf $4^1/_4$ Prozent. Damit drängen sich dem Schuldner folgende Fragen auf:

1.) Wie hoch beläuft sich die Restschuld am Ende des 11ten Jahres?
2.) Wie viele Jahre hindurch müßten die Annuitätenzahlungen im seitherigen Betrage (also bei einer der Zinssteigerung entsprechend verminderten Tilgungsquote) fortgesetzt werden, um die Schuld vollends abzustoßen?
3.) Nach wieviel Jahren würde diese dann abgetragen sein, wenn die Annuitäten um den Betrag der Mehrforderung an Zinsen ($200 \times 0{,}75 = 150$ Mark) auf $1280 + 150 = 1430$ Mark erhöht werden?
4.) Wenn der Schuldner die Tilgung der Restschuld mittelst Annuitäten auf Höhe des ursprünglichen Betrages (1280 Mark) innerhalb eines Zeitraumes von nur noch 9 Jahren erreichen will: Welche Summe würde derselbe am Schlusse des 11ten Jahres in einmaliger Zahlung abzutragen haben?

A. 1.) $$A_{,} = \frac{580 \times (1{,}035^{11} - 1)}{0{,}035} \quad \text{(XIV.)}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}035 &= 0{,}0149403 \\
&\quad \times 11 \\
\log. 1{,}035^{11} &= 0{,}1643433 \\
\text{num.}\log. 1{,}035^{11} &= 1{,}4599679 \\
\text{num.}\log. 1{,}035^{11} - 1 &= 0{,}4599679 \\
\log. (1{,}035^{11} - 1) &= 0{,}6627275 - 1 \\
\log. 0{,}035 &= 0{,}5440680 - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 580 &= 2{,}7634280 \\
+\log. (1{,}035^{11} - 1) &= 0{,}6627275 - 1 \\
&\quad 3{,}4261555 - 1 \\
-\log. 0{,}035 &= 0{,}5440680 - 2 \\
&\quad 3{,}8820875 \\
\text{num.} &= 7622{,}33 \\
A_{,} &= \mathbf{7622{,}33} \text{ Mark.}
\end{aligned}$$

Hiernach bleiben noch zu tilgen: $A - A_{,} = 20000{,}00 - 7622{,}33 = \mathbf{12377{,}67}$ Mark.

2.) $$n = \frac{\log. 1280 - \log. [1280 - (12377{,}67 \times 0{,}0425)]}{\log. 1{,}0425} \quad \text{(XIV. c.)}$$

$$= \frac{\log. 1280 - \log. (1280 - 526{,}051)}{\log. 1{,}0425}$$

$$= \frac{\log. 1280 - \log. 753{,}949}{\log. 1{,}0425}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1280 &= 3{,}1072100 \\
-\log. 753{,}949 &= 2{,}8773419 \\
&\quad 0{,}2298681 \\
\log. 1{,}0425 &= 0{,}0180761
\end{aligned}$$

$$n = \frac{2298681}{180761} = \mathbf{12{,}7167} \text{ Jahre.}$$

Anmerkung. Auf den Jahresbruchteil (0,7167) entfallen gemäß dem früher (Aufgaben 153, 172 und 174) entwickelten Verfahren: 885,05 Mark, und bezogen auf den Schluß des 13ten Jahres: 922,67 Mark. — Berechnet man die Endwerte des Schuld-Kapitales und der Annuitäten auf den Schluß des 13ten Jahres, so erhält

man einen Überschuß zu Gunsten der letzteren von 357,33 Mark, welcher Betrag dem Schuldner dann herauszuzahlen wäre, wenn er bis dahin die volle Annuität von 1 280 Mark entrichtet hätte. 1 280,00 — 357,33 ergeben aber wieder jene 922,67 Mark.

3.) $$n = \frac{\log. 1430 - \log. [1430 - (12377{,}67 \times 0{,}0425)]}{\log. 1{,}0425} \quad \text{(XIV. c.)}$$

$$= \frac{\log. 1430 - \log. (1430 - 526{,}051)}{\log. 1{,}0425}$$

$$= \frac{\log. 1430 - \log. 903{,}949}{\log. 1{,}0425}$$

$$\log. 1430 = 3{,}1553360$$
$$- \log. 903{,}949 = 2{,}9561439$$
$$0{,}1991921$$
$$\log. 1{,}0425 = 0{,}0180761$$

$$n = \frac{1991921}{180761} = \mathbf{11}{,}019 \text{ Jahre.}$$

Dem Jahresbruchteil (0,019) entspricht ein Überschuß von 26,43 Mark. (Vgl. die Aufgaben 153, 172 und 174.)

4.) Wenn nach Ablauf der Vorperiode von 11 Jahren während 9 Jahren je am Ende derselben die seitherigen Annuitäten von 1 280 Mark gezahlt werden, so ist deren Barwert an jenem Zeitpunkte bei Anrechnung des erhöhten Zinsfußes:

$$a = \frac{1280 \times (1{,}0425^9 - 1)}{1{,}0425^9 \times 0{,}0425} \quad \text{(XIV. a.)}$$

$$\log. 1{,}0425 = 0{,}0180761$$
$$\times 9$$
$$\log. 1{,}0425^9 = \mathbf{0{,}1626849}$$
$$\text{num. log. } 1{,}0425^9 = 1{,}4544033$$
$$\text{num. log. } 1{,}0425^9 - 1 = 0{,}4544033$$
$$\log. (1{,}0425^9 - 1) = \mathbf{0{,}6574415 - 1}$$
$$\log. 0{,}0425 = \mathbf{0{,}6283889 - 2}$$

$$\log. 1280 = 3{,}1072100$$
$$+ \log. (1{,}0425^9 - 1) = 0{,}6574415 - 1$$
$$3{,}7646515 - 1$$
$$\log. 1{,}0425^9 = 0{,}1626849$$
$$+ \log. 0{,}0425 = 0{,}6283889 - 2$$
$$- 0{,}7910738 - 2$$
$$3{,}9735777$$
$$\text{num.} = 9409{,}74$$
$$a = \mathbf{9409{,}74} \text{ Mark.}$$

Da nun der Betrag der Restschuld am Schlusse des 11ten Jahres nach der Berechnung sub 1. sich auf 12 377,67 Mark beläuft, so sind an diesem Zeitpunkte in einmaliger Zahlung abzutragen: 12 377,67 — 9 409,74 = **2 967,93** Mark.

Zu dem gleichen Ergebnisse würde man übrigens auch gelangen, wenn man den Barwert (a) der in den ersten 11 Jahren entrichteten Annuitäten bestimmt, zu demselben den Barwert (a_r) der während der späteren 9 Jahre erforderlichen Zahlungen, diese als eine aufgeschobene Rente aufgefaßt, addiert, die so erhaltene Summe dem Betrage des zu tilgenden Kapitales gegenüberstellt und die Differenz auf den Zeitpunkt des Ablaufes der Vorperiode prolongiert. Alsdann ergibt sich unter Benutzung der oben aufgeführten logarithmischen Werte:

$$a = \frac{1280 \times (1{,}035^{11} - 1)}{1{,}035^{11} \times 0{,}035} \quad \text{(XIV. a.)}$$

$$\begin{aligned} \log. 1280 &= 3{,}1072100 \\ + \log. (1{,}035^{11} - 1) &= 0{,}6627275 - 1 \\ & \overline{3{,}7699375 - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}035^{11} &= 0{,}1643433 \\ + \log. 0{,}035 &= 0{,}5440680 - 2 \\ & - 0{,}7084113 - 2 \\ & \overline{4{,}0615262} \\ \text{num.} &= 11521{,}95 \\ a &= \mathbf{11521{,}95} \text{ Mark.} \end{aligned}$$

$$a_{,} = \frac{1280 \times (1{,}0425^{9} - 1)}{1{,}0425^{9} \times 1{,}035^{11} \times 0{,}0425} \quad \text{(XX. a.)}$$

$$\log. 1280 + (\log. 1{,}0425^{9} - 1) = 3{,}7646515 - 1 \quad \text{(wie oben)}$$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}0425^{9} &= 0{,}1626849 \\ + \log. 1{,}035^{11} &= 0{,}1643433 \\ + \log. 0{,}0425 &= 0{,}6283889 - 2 \\ & - 0{,}9554171 - 2 \\ & \overline{3{,}8092344} \\ \text{num.} &= 6445{,}17 \\ a_{,} &= \mathbf{6445{,}17} \text{ Mark.} \end{aligned}$$

$$a + a_{,} = 11521{,}95 + 6445{,}17 = \mathbf{17967{,}12} \text{ Mark.}$$

Bringt man die Summe dieser beiden Barwerte = 17967,12 Mark von dem Betrage der zu tilgenden Schuld = 20000 Mark in Abzug, so verbleiben: 20000,00 — 17967,12 = 2032,88 Mark. Das ist aber der Barwert der zu leistenden Nachzahlung. Wird derselbe auf den Schluß der 11 jährigen Vorperiode prolongiert, so erhält man:

$2032{,}88 \times 1{,}035^{11} = 2032{,}88 \times 1{,}4599679 = \mathbf{2967{,}93}$ Mark (wie oben).

c) Ungleicher Zinsfufs bei Zahlung und bei Empfang von Renten.

228. In der Voraussicht eines nach 12 Jahren eintretenden außerordentlichen Bedarfs an Mitteln zur Bestreitung der Kosten des Studiums seines Sohnes will der Vater während jenes Zeitraumes am Anfange eines jeden Jahres eine bestimmte Summe an die Rentenanstalt zahlen, um von dieser nach Ablauf der ganzen Periode eine über 5 Jahre sich erstreckende vorschüssige Jahresrente von 1500 Mark beziehen zu können. Wenn nun die Rentenanstalt für die Einzahlungen $3^3/_4$, dagegen für die Auszahlung der bedungenen Rente $4^1/_2$ Prozent Zinsen berechnet: Wie hoch wird sich dann die Summe belaufen, welche je am Beginne der 12 Jahre an dieselbe einzuzahlen ist?

A. Auch dieser Aufgabe kann auf mehrfachem Wege näher getreten werden. Zunächst mag es sich darum handeln, den Vorwert (a) der verlangten, 5 Jahre laufenden Rente (r), bezogen auf den Schluß der

Vorperiode von 12 Jahren, und dann den diesem Werte entsprechenden Betrag der jährlichen Einzahlungen (r,) zu bestimmen. Darnach ergibt sich:

$$a = \frac{1\,500 \times (1{,}045^5 - 1)}{1{,}045^{5-1} \times 0{,}045} \quad \text{(XV. a.)}$$

$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$
$\times 5$
$\log. 1{,}045^5 = 0{,}0955815$
$\text{num. log. } 1{,}045^5 = 1{,}2461821$
$\text{num. log. } 1{,}045^5 - 1 = 0{,}2461821$
$\log. (1{,}045^5 - 1) = 0{,}3912563 - 1$
$\log. 1{,}045^4 = 0{,}0764652$
$\log. 0{,}045 = 0{,}6532125 - 2$

$\log. 1\,500 = 3{,}1760913$
$+ \log. (1{,}045^5 - 1) = 0{,}3912563 - 1$
$3{,}5673476 - 1$
$\log. 1{,}045^4 = 0{,}0764652$
$+ \log. 0{,}045 = 0{,}6532125 - 2$
$- 0{,}7296777 - 2$
$3{,}8376699$
$\text{num.} = 6\,881{,}292$
$a = $ **6 881,292** Mark.

$$r, = \frac{6\,881{,}292 \times 0{,}0375}{(1{,}0375^{12} - 1) \times 1{,}0375} \quad \text{(XV. b.)}$$

$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$
$\times 12$
$\log. 1{,}0375^{12} = 0{,}1918572$
$\text{num. log. } 1{,}0375^{12} = 1{,}5554539$
$\text{num. log. } 1{,}0375^{12} - 1 = 0{,}5554539$
$\log. (1{,}0375^{12} - 1) = 0{,}7446480 - 1$
$\log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$

$\log. 6\,881{,}292 = 3{,}8376699$ (w.o.)
$+ \log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$
$4{,}4117012 - 2$
$\log. (1{,}0375^{12} - 1) = 0{,}7446480 - 1$
$+ \log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$
$- 0{,}7606361 - 1$
$2{,}6510651$
$\text{num.} = 447{,}78$
$r, = $ **447,78** Mark.

Behandelt man den Rentenbezug im Gesichtspunkte einer aufgeschobenen Rente, so erhält man für deren Barwert unter Benutzung der oben bereits angegebenen logarithmischen Werte:

$$a = \frac{1\,500 \times (1{,}045^5 - 1)}{1{,}045^{5-1} \times 0{,}045 \times 1{,}0375^{12}} \quad \text{(XXI. a.)}$$

$\log. 1\,500 = 3{,}1760913$
$+ \log. (1{,}045^5 - 1) = 0{,}3912563 - 1$
$3{,}5673476 - 1$
$\log. 1{,}045^4 = 0{,}0764652$
$+ \log. 0{,}045 = 0{,}6532125 - 2$
$+ \log. 1{,}0375^{12} = 0{,}1918572$
$- 0{,}9215349 - 2$
$3{,}6458127$
$\text{num.} = 4\,423{,}975$
$a = $ **4 423,975** Mark.

$$r_, = \frac{4\,423{,}975 \times 1{,}0375^{12} \times 0{,}0375}{(1{,}0375^{12} - 1) \times 1{,}0375} \quad \text{(XV. b.)}$$

$$\begin{aligned} \log. 4\,423{,}975 &= 3{,}6458127 \text{ (w. o.)} \\ + \log. 1{,}0375^{12} &= 0{,}1918572 \\ + \log. 0{,}0375 &= 0{,}5740313 - 2 \\ & \quad 4{,}4117012 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. (1{,}0375^{12} - 1) &= 0{,}7446480 - 1 \\ + \log. 1{,}0375 &= 0{,}0159881 \\ & \qquad - 0{,}7606361 - 1 \\ & \qquad\quad 2{,}6510651 \\ \text{num.} &= 447{,}78 \end{aligned}$$

$$r_, = \mathbf{447{,}78} \text{ Mark (wie oben).}$$

Anmerkung. Soll dagegen das seither schon mehrfach besprochene Verfahren der Aufstellung einer zusammenfassenden Gleichung angewendet werden, so ist zu beachten, daß sich der unbekannte Betrag ($r_,$) der in der Vorperiode zu leistenden Einzahlungen ermitteln lässet, wenn man den ihm entsprechenden Barwert ($a_,$) dem Barwert (a) der beanspruchten Rente, beide bezogen auf den Beginn des Inkrafttretens der Übereinkunft, gegenüberstellt. Alsdann hat man:

$$a_, = \frac{r_, \times (1{,}0375^{12} - 1)}{1{,}0375^{12-1} \times 0{,}0375} \quad \text{(XV. a.)}$$

$$a = \frac{1\,500 \times (1{,}045^5 - 1)}{1{,}045^{5-1} \times 0{,}045 \times 1{,}0375^{12}} \quad \text{(XXI. a.)}$$

Die in Frage stehende Gleichung würde also lauten:

$$\frac{r_, \times (1{,}0375^{12} - 1)}{1{,}0375^{12-1} \times 0{,}0375} = \frac{1\,500 \times (1{,}045^5 - 1)}{1{,}045^4 \times 0{,}045 \times 1{,}0375^{12}}$$

$$r_, \times (1{,}0375^{12} - 1) = \frac{1\,500 \times (1{,}045^5 - 1) \times 1{,}0375^{11} \times 0{,}0375}{1{,}045^4 \times 0{,}045 \times 1{,}0375^{12}}$$

$$r_, = \frac{1\,500 \times (1{,}045^5 - 1) \times 0{,}0375}{1{,}045^4 \times 0{,}045 \times 1{,}0375 \times (1{,}0375^{12} - 1)}$$

In weiterer Ausführung erhält man dann:

$$\frac{1\,500 \times 0{,}246182 \times 0{,}0375}{1{,}19252 \times 0{,}045 \times 1{,}0375 \times 0{,}555454}$$

$$= \frac{369{,}273 \times 0{,}0375}{0{,}053663 \times 1{,}0375 \times 0{,}555454}$$

$$= \frac{13{,}84774}{0{,}053663 \times 0{,}576283}$$

$$= \frac{13{,}84774}{0{,}030925}$$

$$r_, = \mathbf{447{,}78} \text{ Mark (wie oben).}$$

Das gleiche Resultat würde man natürlich auch erhalten, wenn man den Endwert ($A_,$) der in der Vorperiode zu leistenden Einzahlungen ($r_,$) dem Vorwerte (a) der gleichzeitig fälligen Rente (r) gegenüberstellt. Alsdann würde es sich um die Werte handeln:

$$A_, = \frac{r_, \times 1{,}0375 \times (1{,}0375^{12} - 1)}{0{,}0375} \quad \text{(XV.)}$$

$$a = \frac{1\,500 \times (1{,}045^5 - 1)}{1{,}045^{5-1} \times 0{,}045} \quad \text{(XV. a.)}$$

Und die Gleichung wäre:

$$r, \times \frac{1{,}0375 \times (1{,}0375^{12} - 1)}{0{,}0375} = \frac{1\,500 \times (1{,}045^5 - 1)}{1{,}045^4 \times 0{,}045}$$

$$r, \times 1{,}0375 \times (1{,}0375^{12} - 1) = \frac{1\,500 \times (1{,}045^5 - 1) \times 0{,}0375}{1{,}045^4 \times 0{,}045}$$

$$r, = \frac{1\,500 \times (1{,}045^5 - 1) \times 0{,}0375}{1{,}0375 \times (1{,}0375^{12} - 1) \times 1{,}045^4 \times 0{,}045}$$

$$r, = \frac{1\,500 \times (1{,}045^5 - 1)}{1{,}0375 \times (1{,}0375^{12} - 1) \times 1{,}045^4 \times 1{,}2}.$$

Das Ergebnis der weiteren rechnerischen Ausführung ist wiederum:

$r, =$ **447.78** Mark (wie oben).

d) Umwandlung von Renten.

229. An Stelle einer 18 Jahre lang am Ende jeden 2ten Jahres fälligen Rente von 2 250 Mark wünscht deren Besitzer eine 15 Jahre laufende vorschüssige Rente zu beziehen, welche halbjährlich zahlbar wird. Auf welchen Betrag würde sich diese berechnen, wenn ein Zinsfuß von $4^1/_4$ Prozent in Anwendung kommt?

A. Die Aufgabe erledigt sich einfach auf dem Wege der Ermittlung des Barwertes (a) der gegebenen Rente und dann auf Grund dessen der Bestimmung des Betrages der einzutauschenden Rente (r,). Alsdann erhält man:

$$a = \frac{2\,250 \times (1{,}0425^{18} - 1)}{1{,}0425^{18} \times (1{,}0425^2 - 1)} \quad \text{(XVIII. a.)}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}0425 &= 0{,}0180761 \\
&\quad \times 18 \\
\log. 1{,}0425^{18} &= \mathbf{0{,}3253698} \\
\text{num.} \log. 1{,}0425^{18} &= 2{,}1152894 \\
\text{num.}\log. 1{,}0425^{18} - 1 &= 1{,}1152894 \\
\log. (1{,}0425^{18} - 1) &= \mathbf{0{,}0473877} \\
\log. 1{,}0425^2 &= 0{,}0361522 \\
\text{num.} \log. 1{,}0425^2 &= 1{,}0868065 \\
\text{num.}\log. 1{,}0425^2 - 1 &= 0{,}0868065 \\
\log. (1{,}0425^2 - 1) &= \mathbf{0{,}9385522 - 2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 2\,250 &= 3{,}3521825 \\
+ \log. (1{,}0425^{18} - 1) &= 0{,}0473877 \\
&\quad 3{,}3995702 \\
\log. 1{,}0425^{18} &= 0{,}3253698 \\
+ \log. (1{,}0425^2 - 1) &= 0{,}9385522 - 2 \\
&\quad - 1{,}2639220 - 2 \\
&\quad 4{,}1356482 \\
\text{num.} &= 13\,666{,}21 \\
a &= \mathbf{13\,666.21} \text{ M.}
\end{aligned}$$

Der Betrag der begehrten gleichwertigen Rente berechnet sich nunmehr, wie folgt:

$$r, = \frac{13\,666{,}21 \times 1{,}0\frac{425}{2}^{2 \times 15} \times 0{,}0\frac{425}{2}}{1{,}0\frac{425}{2} \times (1{,}0\frac{425}{2}^{2 \times 15} - 1)} \quad \text{(XVII. b.)}$$

$$1{,}0\frac{425}{2} = 1{,}02125$$

$$\log 1{,}02125 = 0{,}0091320$$
$$\times 30$$
$$\log 1{,}02125^{30} = 0{,}2739600$$
$$\text{num.} \log 1{,}02125^{30} = 1{,}8791436$$
$$\text{num.} \log 1{,}02125^{30} - 1 = 0{,}8791436$$
$$\log (1{,}02125^{30} - 1) = 0{,}9440598 - 1$$
$$\log 0{,}02125 = 0{,}3273589 - 2$$

$$\log 13\,666{,}21 = 4{,}1356482$$
$$+ \log 1{,}02125^{30} = 0{,}2739600$$
$$+ \log 0{,}02125 = 0{,}3273589 - 2$$
$$4{,}7369671 - 2$$
$$\log 1{,}02125 = 0{,}0091320$$
$$+ \log (1{,}02125^{30} - 1) = 0{,}9440598 - 1$$
$$- 0{,}9531918 - 1$$
$$2{,}7837753$$
$$\text{num.} = 607{,}82$$
$$r, = \mathbf{607{,}82} \text{ Mark.}$$

Anmerkung. Dem schon wiederholt vorgeführten Gleichungsverfahren gemäß würde sich die Rechnung, wenn man die eine Rente mit r, die andere mit r,, und die betreffenden Barwerte mit a und a, bezeichnet, unter Benutzung der oben angegebenen logarithmischen Werte folgendermaßen gestalten:

$$a = \frac{2\,250 \times (1{,}0425^{18} - 1)}{1{,}0425^{18} \times (1{,}0425^{2} - 1)} \quad \text{(XVIII. a.)}$$

$$a, = \frac{r, \times \left(1{,}0\frac{425}{2}^{2 \times 15} - 1\right)}{1{,}0\frac{425}{2}^{2 \times 15 - 1} \times 0{,}0\frac{425}{2}} \quad \text{(XVII. a.)}$$

$$\frac{2\,250 \times (1{,}0425^{18} - 1)}{1{,}0425^{18} \times (1{,}0425^{2} - 1)} = \frac{r, \times \left(1{,}0\frac{425}{2}^{2 \times 15} - 1\right)}{1{,}0\frac{425}{2}^{2 \times 15 - 1} \times 0{,}0\frac{425}{2}}$$

$$r, = \frac{2\,250 \times (1{,}0425^{18} - 1) \times 1{,}0\frac{425}{2}^{2 \times 15 - 1} \times 0{,}0\frac{425}{2}}{1{,}0425^{18} \times (1{,}0425^{2} - 1) \times \left(1{,}0\frac{425}{2}^{2 \times 15} - 1\right)}$$

Die rechnerische Behandlung dieser Gleichung ergibt sodann:

$$\frac{2\,250 \times 1{,}11529 \times 1{,}02125^{29} \times 0{,}02125}{2{,}11529 \times 0{,}0868 \times 0{,}87914}$$
$$= \frac{2\,509{,}4 \times 1{,}84 \times 0{,}02125}{0{,}18362 \times 0{,}87914}$$
$$= \frac{2\,509{,}4 \times 0{,}0391}{0{,}161427}$$
$$= \frac{98{,}1175}{0{,}161427}$$
$$r, = \mathbf{607{,}82} \text{ Mark (wie oben).}$$

230. Eine über 30 Jahre sich erstreckende, am Anfange eines jeden 3ten Jahres fällige Rente von 900 Mark möchte deren Inhaber durch eine mit Ablauf von 5 Jahren beginnende nachschüssige Jahresrente von 500 Mark ersetzen lassen. Wieviel Jahre lang würde er diese beziehen können, wenn der Rentengeber $3\frac{1}{2}$ Prozent Zinsen berechnet?

A. Auch in diesem Falle wird man von dem Barwerte (a) der gegebenen Rente auszugehen haben. Derselbe ermittelt sich also:

$$a = \frac{900 \times (1{,}035^{30} - 1)}{1{,}035^{30-3} \times (1{,}035^{3} - 1)} \quad \text{(XIX. a.)}$$

$$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$$
$$\times 30$$
$$\log. 1{,}035^{30} = 0{,}4482090$$
$$\text{num.}\log. 1{,}035^{30} = 2{,}8067838$$
$$\text{num.}\log. 1{,}035^{30} - 1 = 1{,}8067838$$
$$\log. (1{,}035^{30} - 1) = \mathbf{0{,}2569062}$$
$$\log. 1{,}035^{27} = \mathbf{0{,}4033881}$$
$$\log. 1{,}035^{3} = 0{,}0448209$$
$$\text{num.}\log. 1{,}035^{3} = 1{,}1087176$$
$$\text{num.}\log. 1{,}035^{3} - 1 = 0{,}1087176$$
$$\log. (1{,}035^{3} - 1) = \mathbf{0{,}0362998 - 1}$$

$$\log. 900 = 2{,}9542425$$
$$+ \log. (1{,}035^{30} - 1) = 0{,}2569062$$
$$3{,}2111487$$
$$\log. 1{,}035^{27} = 0{,}4033881$$
$$+ \log.(1{,}035^{3} - 1) = 0{,}0362998 - 1$$
$$- 0{,}4396879 - 1$$
$$3{,}7714608$$
$$\text{num.} = 5\,908{,}27$$
$$a = \mathbf{5\,908{,}27}\ \text{Mark.}$$

Die Frage, während wie vieler Jahre der Berechtigte die gleichwertige Ersatz-Rente werde beziehen können, beantwortet sich nach Maßgabe der Formel XX. c. also:

$$n = \frac{\log. 500 - \log. [500 - (5\,908{,}27 \times 0{,}035 \times 1{,}035^{5})]}{\log. 1{,}035}$$

$$\log. 1{,}035^{5} = 0{,}0149403 \times 5 = 0{,}0747015$$

$$\log. 5\,908{,}27 = 3{,}7714608$$
$$+ \log. 0{,}035 = 0{,}5440680 - 2$$
$$+ \log. 1{,}035^{5} = 0{,}0747015$$
$$2{,}3902303$$
$$\text{num.} = 245{,}601$$
$$500{,}000 - 245{,}601 = 254{,}399$$

$$\log. 500 = 2{,}6989700$$
$$- \log. 254{,}399 = 2{,}4055154$$
$$0{,}2934546$$
$$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$$

$$n = \frac{2934546}{149403} = \mathbf{19}{,}642\ \text{Jahre.}$$

Anmerkung. Wird das Verfahren der Abgleichung der Barwerte der beiden Renten angewandt, bezeichnet man dieselben mit a und a, und die gesuchten Jahre mit n,, so kommen in Betracht:

$$a = \frac{900 \times (1{,}035^{30} - 1)}{1{,}035^{30-3} \times (1{,}035^{3} - 1)} \quad \text{(XIX. a.)}$$

$$a_{,} = \frac{500 \times (1{,}035^{n,} - 1)}{1{,}035^{5+n,} \times 0{,}035} \quad \text{(XX. a.)}$$

Darnach erhält man unter Benutzung der oben bereits angegebenen logarithmischen Werte:

$$\frac{900 \times (1{,}035^{30} - 1)}{1{,}035^{27} \times (1{,}035^{3} - 1)} = \frac{500 \times (1{,}035^{n,} - 1)}{1{,}035^{5+n,} \times 0{,}035}$$

$$\frac{900 \times (1{,}035^{30} - 1) \times 0{,}035}{1{,}035^{27} \times (1{,}035^{3} - 1)} = \frac{500 \times 1{,}035^{n,} - 500}{1{,}035^{5} \times 1{,}035^{n,}}$$

$$\frac{900 \times (1{,}035^{30} - 1) \times 0{,}035}{1{,}035^{27} \times (1{,}035^{3} - 1)} = \frac{500}{1{,}035^{5}} - \frac{500}{1{,}035^{5} \times 1{,}035^{n,}}$$

$$\frac{500}{1{,}035^{5} \times 1{,}035^{n,}} = \frac{500}{1{,}035^{5}} - \frac{900 \times (1{,}035^{30} - 1) \times 0{,}035}{1{,}035^{27} \times (1{,}035^{3} - 1)}$$

$$\frac{500}{1{,}035^{n,}} = 500 - \frac{900 \times (1{,}035^{30} - 1) \times 0{,}035 \times 1{,}035^{5}}{1{,}035^{27} \times (1{,}035^{3} - 1)}$$

$$1{,}035^{n,} = \frac{500}{500 - \frac{900 \times (1{,}035^{30} - 1) \times 0{,}035 \times 1{,}035^{5}}{1{,}035^{27} \times (1{,}035^{3} - 1)}}$$

$$n, = \frac{\log. 500 - \log. \left[500 - \frac{900 \times (1{,}035^{30} - 1) \times 0{,}035 \times 1{,}035^{5}}{1{,}035^{27} \times (1{,}035^{3} - 1)}\right]}{\log. 1{,}035}$$

$\log. 900 = 2{,}9542425$
$+ \log. (1{,}035^{30} - 1) = 0{,}2569062$
$+ \log. 0{,}035 = 0{,}5440680 - 2$
$+ \log. 1{,}035^{5} = 0{,}0747015$
$3{,}8299182 - 2$

$\log. 1{,}035^{27} = 0{,}4033881$
$+ \log. (1{,}035^{3} - 1) = 0{,}0362998 - 1$
$- 0{,}4396879 - 1$
$2{,}3902303$
$\text{num.} = 245{,}601$
$500 - 245{,}601 = 254{,}399.$

$\log. 500 = 2{,}6989700$
$- \log. 254{,}399 = 2{,}4055154$
$0{,}2934546$
$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$

$n, = \frac{2934546}{149403} = \mathbf{19},642$ Jahre (wie oben).

231. Der Besitzer einer 22 Jahre lang zu beziehenden vorschüssigen Rente von 1 250 Mark möchte diese gegen eine ebenfalls vorschüssige, aber nur 16 Jahre laufende Rente von 2 000 Mark vertauschen. Wenn aber hierbei von einer Ausgleichung der beiderseitigen Anforderungen mittelst direkter Abfindung Umgang genommen werden, und ein Zinsfuß von $4\frac{1}{4}$ Prozent in Anrechnung kommen soll: Um wie viele Jahre wird dann der Beginn des Bezuges der Ersatzrente aufgeschoben bleiben müssen?

A. Man ermittelt wiederum zunächst den Barwert der gegebenen Rente. Derselbe ergibt sich aus:

$$a = \frac{1\,250 \times (1{,}0425^{22} - 1)}{1{,}0425^{22-1} \times 0{,}0425} \quad \text{(XV. a.)}$$

$\log. 1{,}0425 = 0{,}0180761$
$\times 22$
$\log. 1{,}0425^{22} = 0{,}3976742$
$\text{num. log. } 1{,}0425^{22} = 2{,}4984700$
$\text{num. log. } 1{,}0425^{22} - 1 = 1{,}4984700$
$\log. (1{,}0425^{22} - 1) = 0{,}1756481$
$\log. 1{,}0425^{21} = 0{,}3795981$
$\log. 0{,}0425 = 0{,}6283889 - 2$

$\log. 1\,250 = 3{,}0969100$
$+ \log. (1{,}0425^{22} - 1) = 0{,}1756481$
$3{,}2725581$

$\log. 1{,}0425^{21} = 0{,}3795981$
$+ \log. 0{,}0425 = 0{,}6283889 - 2$
$- 1{,}0079870 - 2$
$4{,}2645711$
$\text{num.} = 18\,389{,}55$
$a = \mathbf{18\,389{,}55}$ M.

Um nun im Anschlusse hieran die Zahl der Jahre (v) zu bestimmen, nach deren Ablauf der Bezug der Ersatzrente beginnen kann, ist das in den Fußnoten zu den Formeln XX. c und XXI. c (S. 152 und 154) verzeichnete Verfahren anzuwenden, nach welchem man erhält:

$$v = \frac{\log.[2\,000 \times (1{,}0425^{16}-1)] - \log.(18\,389{,}55 \times 0{,}0425 \times 1{,}0425^{16-1})}{\log. 1{,}0425}$$

$$\log. 1{,}0425 = 0{,}0180761$$
$$\times 16$$
$$\log. 1{,}0425^{16} = 0{,}2892176$$
$$\text{num.}\log. 1{,}0425^{16} = 1{,}9463349$$
$$\text{num.}\log. 1{,}0425^{16} - 1 = 0{,}9463349$$
$$\log. 1{,}0425^{15} = 0{,}2711415$$
$$\log. 0{,}0425 = 0{,}6283889 - 2$$

$$2\,000 \times (1{,}0425^{16}-1) = 2\,000 \times 0{,}9463349 = 1\,892{,}670$$

$$\log. 18\,389{,}55 = 4{,}2645711$$
$$+ \log. 0{,}0425 = 0{,}6283889 - 2$$
$$+ \log. 1{,}0425^{15} = 0{,}2711415$$
$$3{,}1641015$$
$$\text{num.} = 1\,459{,}155$$

$$\log. 1\,892{,}670 = 3{,}2770749$$
$$- \log. 1\,459{,}155 = 3{,}1641016$$
$$0{,}1129733$$
$$\log. 1{,}0425 = 0{,}0180761$$

$$v = \frac{1129733}{180761} = \mathbf{6}{,}25 \text{ Jahre (rund).}$$

Anmerkung. Soll auch im vorliegenden Falle das Verfahren der Aufstellung einer zusammenfassenden Gleichung angewendet werden, so hat man sich zu vergegenwärtigen, daß die Barwerte (a und $a_{,}$) der konkurrierenden Rentenbezüge zu kompensieren sind. Alsdann erhält man gemäß den Formeln XV. a und XXI. a:

$$\frac{1\,250 \times (1{,}0425^{22}-1)}{1{,}0425^{22-1} \times 0{,}0425} = \frac{2\,000 \times (1{,}0425^{16}-1)}{1{,}0425^{v+16-1} \times 0{,}0425}$$

$$\frac{1\,250 \times (1{,}0425^{22}-1)}{1{,}0425^{21}} = \frac{2\,000 \times (1{,}0425^{16}-1)}{1{,}0425^{v} \times 1{,}0425^{15}}$$

$$1\,250 \times (1{,}0425^{22}-1) \times 1{,}0425^{v} = \frac{2\,000 \times (1{,}0425^{16}-1) \times 1{,}0425^{21}}{1{,}0425^{15}}$$

$$1{,}0425^{v} = \frac{2\,000 \times (1{,}0425^{16}-1) \times 1{,}0425^{21}}{1\,250 \times (1{,}0425^{22}-1) \times 1{,}0425^{15}}$$

$$v = \frac{\log.[2\,000 \times (1{,}0425^{16}-1) \times 1{,}0425^{21}] - \log.[1\,250 \times (1{,}0425^{22}-1) \times 1{,}0425^{15}]}{\log. 1{,}0425}$$

$$\log. 2\,000 = 3{,}3010300$$
$$+ \log.(1{,}0425^{16}-1) = 0{,}9760448 - 1$$
$$+ \log. 1{,}0425^{21} = 0{,}3795981$$
$$3{,}6566729$$

$$\log. 1\,250 = 3{,}0969100$$
$$+ \log.(1{,}0425^{22}-1) = 0{,}1756481$$
$$+ \log. 1{,}0425^{15} = 0{,}2711415$$
$$3{,}5436996$$

$$\log. 3{,}6566729$$
$$- \log. 3{,}5436996$$
$$0{,}1129733$$
$$\log. 1{,}0425 = 0{,}0180761$$

$$v = \frac{1129733}{180761} = \mathbf{6}{,}25 \text{ Jahre (wie oben).}$$

232.[1]) Es erwirbt Jemand eine 25 Jahre laufende $3^3/_4$-prozentige nachschüssige Rente von 3 000 Mark unter dem Vorbehalte, daß dieselbe, wenn während ihrer Dauerzeit eine Änderung des Zinsfußes eintreten würde, eine entsprechende Umwandlung erfahre, und daß, wenn er vor Ablauf jener Frist sterben sollte, der Wert der dann noch ausstehenden Rente seinen Erben überwiesen werde. Nun stieg der Zinsfuß nach 11 Jahren auf $4^1/_4$ Prozent, und 8 Jahre später trat der Todesfall des Rentenberechtigten ein. Fragen:

Wie hoch belief sich:

1.) Das Einstands-Kapital (Mise) der Rente?

2.) Der Betrag der Raten der Rente vom 12ten Jahre an?

3.) Das Kapital, welches den Erben auszuzahlen war?

A. 1.) $$a = \frac{3\,000 \times (1{,}0375^{25} - 1)}{1{,}0375^{25} \times 0{,}0375} \quad \text{(XIV. a.)}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}0375 &= 0{,}0159881 \\
&\times 25 \\
\log. 1{,}0375^{25} &= 0{,}3997025 \\
\text{num.} \log. 1{,}0375^{25} &= 2{,}5101663 \\
\text{num.} \log. 1{,}0375^{25} - 1 &= 1{,}5101663 \\
\log. (1{,}0375^{25} - 1) &= 0{,}1790247 \\
\log. 0{,}0375 &= 0{,}5740313 - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 3\,000 &= 3{,}4771213 \\
+ \log. (1{,}0375^{25} - 1) &= 0{,}1790247 \\
&\quad 3{,}6561460 \\
\log. 1{,}0375^{25} &= 0{,}3997025 \\
+ \log. 0{,}0375 &= 0{,}5740313 - 2 \\
&- 0{,}9737338 - 2 \\
&\quad 4{,}6824122 \\
\text{num.} &= 48\,129{,}59 \\
a &= \mathbf{48\,129{,}59} \text{ Mark.}
\end{aligned}$$

2.) Die Rente von ursprünglich 3 000 Mark lief noch 25 — 11 = 14 Jahre, und zwar unter Anrechnung eines erhöhten Zinsfußes von $4^1/_4$ Prozent. Wäre der frühere Zinsfuß beibehalten geblieben, so würde der Barwert ($a_,$) der Rente nach Ablauf der ersten Periode sein:

$$a_, = \frac{3\,000 \times (1{,}0375^{14} - 1)}{1{,}0375^{14} \times 0{,}0375} \quad \text{(XIV. a.)}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}0375^{14} &= 0{,}2238334 \\
\text{num.} \log. 1{,}0375^{14} &= 1{,}6743004 \\
\text{num.} \log. 1{,}0375^{14} - 1 &= 0{,}6743004 \\
\log. (1{,}0375^{14} - 1) &= 0{,}8288535 - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 3\,000 &= 3{,}4771213 \\
+ \log. (1{,}0375^{14} - 1) &= 0{,}8288535 - 1 \\
&\quad 4{,}3059748 - 1 \\
\log. 1{,}0375^{14} &= 0{,}2238334 \\
+ \log. 0{,}0375 &= 0{,}5740313 - 2 \\
&- 0{,}7978647 - 2 \\
&\quad 4{,}5081101 \\
\text{num.} &= 32\,218{,}85 \\
a_, &= \mathbf{32\,218{,}85} \text{ Mark.}
\end{aligned}$$

Die Rente ($r_,$) aber, welche diesem Barwerte bei Zugrundelegung des erhöhten Zinsfußes entspricht, ermittelt sich also:

$$r_, = \frac{32\,218{,}85 \times 1{,}0425^{14} \times 0{,}0425}{1{,}0425^{14} - 1} \quad \text{(XIV. b.)}$$

[1]) In Anknüpfung an ein Beispiel von A. Kleyer, in dessen „Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung", Stuttgart 1885.

$\log. 1{,}0425 = 0{,}0180761$
$\times 14$
$\log. 1{,}0425^{14} = 0{,}2530654$
$\text{num.} \log. 1{,}0425^{14} = 1{,}7908756$
$\text{num.}\log. 1{,}0425^{14} - 1 = 0{,}7908756$
$\log. (1{,}0425^{14} - 1) = 0{,}8981082 - 1$
$\log. 0{,}0425 = 0{,}6283889 - 2$

$\log. 32\,218{,}85 = 4{,}5081101$
$+ \log. 1{,}0425^{14} = 0{,}2530654$
$+ \log. 0{,}0425 = 0{,}6283889 - 2$
$5{,}3895644 - 2$
$- \log. (1{,}0425^{14} - 1) = 0{,}8981082 - 1$
$3{,}4914562$
$\text{num.} = 3\,100{,}68$
$r_, = \mathbf{3\,100{,}68}$ Mark.

Anmerkung. Soll der Fall 2. auf dem Gleichungswege behandelt werden, so würde man gemäß dem seither wiederholt dargelegten Verfahren unter Benutzung der Formel XIV. a. anzusetzen haben:

$$\frac{r_, \times (1{,}0425^{14} - 1)}{1{,}0425^{14} \times 0{,}0425} = \frac{3\,000 \times (1{,}0375^{14} - 1)}{1{,}0375^{14} \times 0{,}0375}$$

Alsdann erhält man:

$$r_, = \frac{3\,000 \times (1{,}0375^{14} - 1) \times 1{,}0425^{14} \times 0{,}0425}{1{,}0375^{14} \times 0{,}0375 \times (1{,}0425^{14} - 1)}$$

$$= \frac{80\,000 \times (1{,}0375^{14} - 1) \times 1{,}0425^{14} \times 0{,}0425}{1{,}0375^{14} \times (1{,}0425^{14} - 1)}$$

$$= \frac{3\,400 \times (1{,}0375^{14} - 1) \times 1{,}0425^{14}}{1{,}0375^{14} \times (1{,}0425^{14} - 1)}$$

$$= \frac{3\,400 \times 0{,}6743 \times 1{,}790876}{1{,}6743 \times 0{,}790876}$$

$$= \frac{2\,292{,}62 \times 1{,}790876}{1{,}32416}$$

$$= \frac{4\,105{,}898}{1{,}32416}$$

$r_, = \mathbf{3\,100{,}68}$ Mark (wie oben).

3.) Nach dem Ableben des Käufers der Rente steht diese im Betrage von 3 100,68 Mark noch $25 - (11 + 8) = 6$ Jahre, und zwar zu dem erhöhten Zinsfuße aus. Der an die Erben auszuzahlende Barwert ($a_{,,}$) ist daher an jenem Zeitpunkte, also nach Ablauf der zweiten Periode:

$$a_{,,} = \frac{3\,100{,}68 \times (1{,}0425^6 - 1)}{1{,}0425^6 \times 0{,}0425} \quad \text{(XIV. a.)}$$

$\log. 1{,}0425^6 = 0{,}1084566$
$\text{num.} \log. 1{,}0425^6 = 1{,}2836796$
$\text{num.}\log. 1{,}0425^6 - 1 = 0{,}2836796$
$\log. (1{,}0425^6 - 1) = 0{,}4528281 - 1$
$\log. 0{,}0425 = 0{,}6283889 - 2$

$\log. 3\,100{,}68 = 3{,}4914562$
$+ \log. (1{,}0425^6 - 1) = 0{,}4528281 - 1$
$3{,}9442843 - 1$
$\log. 1{,}0425^6 = 0{,}1084566$
$+ \log. 0{,}0425 = 0{,}6283889 - 2$
$- 0{,}7368455 - 2$
$4{,}2074388$
$\text{num.} = 16\,122{,}75$
$a_{,,} = \mathbf{16\,122{,}75}$ Mark.

e) Mittlerer Termin für die einmalige Abzahlung einer Rentenschuld.

233. Auf Grund einer Erbauseinandersetzung ist der Hofbesitzer D. verpflichtet worden, an den Mitbeteiligten L. eine 24 Jahre laufende nach-

schüssige Rente in Raten von je 400 Mark zu entrichten. Derselbe trifft mit dem Gläubiger ein Übereinkommen, dahin gehend, daß er die Schuld in deren vollem Betrage durch einmalige Zahlung zu begleichen hat. Nach Ablauf von wie vielen Jahren kann dies ohne Benachteiligung eines der Kontrahenten geschehen, wenn der Berechnung ein Zinsfuß von $4^1/_2$ Prozent zu Grunde gelegt wird?

A. Die Bestimmung des Termines für die einmalige Zahlung hat von der Erwägung auszugehen, daß die Abfindung sich auf die Summe aller Raten (ohne Zinszuschlag), im gegebenen Beispiele also auf $r \cdot n = 400 \times 24 = 9\,600$ Mark zu erstrecken hat, sodann aber, daß der gesuchte Zeitpunkt, ausgedrückt in der Zahl der dem Beginne der Rentenpflicht folgenden Jahre ($n_,$), sich ergeben muß, wenn man den Barwert (a) der stipulierten Rente mit dem Betrage der Ablösung ($A_,$) in Beziehung bringt. Die Rechnung gestaltet sich hiernach wie folgt:

$$a = \frac{400 \times (1,045^{24} - 1)}{1,045^{24} \times 0,045} \quad \text{(XIV. a.)}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1,045 &= 0,0191163 \\
&\times 24 \\
\log. 1,045^{24} &= \mathbf{0,4587912} \\
\text{num. log. } 1,045^{24} &= 2,8760153 \\
\text{num. log. } 1,045^{24} - 1 &= 1,8760153 \\
\log. (1,045^{24} - 1) &= 0,2732363 \\
\log. 0,045 &= 0,6532125 - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 400 &= 2,6020600 \\
+ \log. (1,045^{24} - 1) &= 0,2732363 \\
& 2,8752963 \\
\log. 1,045^{24} &= 0,4587912 \\
+ \log. 0,045 &= 0,6532125 - 2 \\
&- 1,1120037 - 2 \\
& 3,7632926 \\
\text{num.} &= 5\,798,19 \\
a &= \mathbf{5\,798,19} \text{ Mark.}
\end{aligned}$$

In Anknüpfung an die somit feststehenden beiden Größen erhält man nun nach Formel IV:

$$n_, = \frac{\log. 9\,600 - \log. 5\,798,19}{\log. 1,045}$$

$$\begin{aligned}
\log. 9\,600 &= 3,9822712 \\
- \log. 5\,798,19 &= 3,7632926 \\
& 0,2189786 \\
\log. 1,045 &= 0,0191163
\end{aligned}$$

$$n_, = \frac{2189786}{191163} = \mathbf{11},455 \text{ Jahre.}$$

Anmerkung 1. Zu einem allerdings einfacheren Verfahren führt die Aufstellung einer Gleichung, in welcher der Barwert (a) der nach $n_,$ Jahren erfolgenden Kapital-Abfindung ($A_,$) dem Barwerte der Rente gegenübersteht. Auf diesem Wege erhält man:

$$\frac{400 \times 24}{1,045^{n_,}} = \frac{400 \times (1,045^{24} - 1)}{1,045^{24} \times 0,045}$$

$$\frac{24}{1,045^{n_,}} = \frac{1,045^{24} - 1}{1,045^{24} \times 0,045}$$

$$\frac{1,045^{n_,}}{24} = \frac{1,045^{24} \times 0,045}{1,045^{24} - 1}$$

$$1,045^{n_,} = \frac{1,045^{24} \times 0,045 \times 24}{1,045^{24} - 1}$$

$$n_, = \frac{\log.(1{,}045^{24} \times 0{,}045 \times 24) - \log.(1{,}045^{24} - 1)}{\log. 1{,}045}$$

Nun ist:

$$2{,}8760153 \times 0{,}045 \times 24 = 2{,}8760153 \times 1{,}08 = 3{,}1060965$$

Daher:

$$\log. 3{,}1060965 = 0{,}4922149$$
$$-\log 1{,}8760153 = 0{,}2732363$$
$$0{,}2189786$$
$$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$$
$$n_, = \frac{2189786}{191163} = \mathbf{11}{,}455 \text{ Jahre (wie oben).}$$

Anmerkung 2. Die Rechnung kann auf ihre Richtigkeit leicht geprüft werden, wenn man die Endwerte (A) der 24 Jahre hindurch zu beziehenden Rente und der 24 — 11,455 = 12,545 Jahre lang zu dem gleichen Zinsfuße ausstehenden Abfindungssumme ($A_,$) ermittelt. Dieselben berechnen sich im vorliegenden Falle aus: $A = \frac{400 \times (1{,}045^{24} - 1)}{0{,}045}$ und $A_, = 9\,600 \times 1{,}045^{12{,}545}$ genau übereinstimmend auf 16 675,70 Mark.

f) Diskontierung von Werten.

Vorbemerkung. Bereits in dem Abschnitte über die Zinseszinsrechnung war (s. Aufgabe 40) von der Diskont-Berechnung die Rede. Zur weiteren Orientierung sei daran erinnert, daß „Diskont" eine indirekte Vergütung der Einbuße an Zinsen bedeutet, welche sich bei der Einlösung einer erst später fälligen Schuld (Vorherzahlung) ergibt und rechnerisch ihren Ausdruck in einem entsprechenden Abzuge von dem nominellen Betrage der zu zahlenden Summe findet.

Die Bedingungen, welche derartigen Kalkulationen zu Grunde liegen, können sich nun allerdings verschieden gestalten.

1. Fall. Es ist eine einzelne, später fällige, zinsfreie Summe zu diskontieren. Hier kommt die Formel II (Aufgabe 40) zur Anwendung. Bezeichnet man den nominellen Betrag des Kapitales mit A, dessen Barwert mit $\frac{A}{1{,}0p^n}$, und faßt man den Unterschied zwischen beiden, den Abzug, als „Diskont" auf, so ermittelt sich dieser direkt also:

$$A - \frac{A}{1{,}0p^n}\ ^{1)}$$

In dem Beispiele (Aufgabe 40): 3 500 — 2 659,71 = 840,29 Mark.

2. Fall. Soll eine in regelmäßigen Raten wiederkehrende Zeitrente diskontiert werden, so ermittelt man deren nominellen Betrag, d. h. die Summe aller Raten, und stellt derselben den Barwert (a) der Rente, d. h. den Wert des Einstands-Kapitals (Mise) gegenüber. Letztere erhält man

---

[1]) Der Ausdruck $A - \frac{A}{1{,}0p^n}$ ist gleichwertig mit $\frac{A}{1{,}0p^n} . 1{,}0p^n - \frac{A}{1{,}0p^n}$. An seine Stelle kann man daher auch setzen: $\frac{A}{1{,}0p^n} . (1{,}0p^n - 1)$ oder: $A . \left(1 - \frac{1}{1{,}0p^n}\right)$.

nach einer der bekannten Formeln (XIV. a—XXVII. a). Der Abzug ist alsdann:

$$(r \,.\, n) - a$$

Vgl. hierzu die Aufgaben 164, 166, 182, 200, 213 und 223. —

Knüpft man beispielsweise an die Aufgabe 164 an, so ist der Diskont-Abzug:

$$(500 \times 20) - 7\,106{,}19 = 10\,000 - 7\,106{,}19 = 2\,893{,}81 \text{ Mark.}$$

Eine weitere Rechnung würde allda ergeben, daß das Einkaufs-Kapital von 7 106,19 Mark mit Zinseszinsen bei einem Zinsfuße von $3^1/_2$ Prozent nach Ablauf von 20 Jahren genau bis auf den nämlichen Betrag (14 139,78 Mark) anwächst, wie die in der gleichen Zeit laufende nachschüssige Jahresrente von 500 Mark.

Wird auf die Diskont-Berechnung ein höherer oder niedrigerer Zinsfuß angewendet, so vergrößert bezw. verringert sich auch der Abzug.

3. Fall. Liegt das Verhältnis derart, daß ein auf Zinsen ausstehendes Kapital vor dem Zeitpunkte, da es fällig wird, auszuzahlen ist, so kommen für die Bestimmung des Diskont-Abzuges — abweichend vom 1. Fall — auch die Zinsen in Betracht. Zur Erläuterung dessen dient die nachfolgende Aufgabe.

234. Der Besitzer einer Forderung von 4 500 Mark, welche nach 6 Jahren rückzahlbar und in der Zwischenzeit am Ende jeden Jahres mit $3^1/_4$ Prozent zu verzinsen ist, sieht sich gegenüber einem Verlangen des Debitors, die Schuld sofort in einem Betrage abzustoßen, vor die Frage gestellt, welche Summe er von seinem Guthaben in Folge der Vorauszahlung desselben als Diskont bei Anrechnung von $3^3/_4$ Prozent in Abzug zu bringen habe. Wie beantwortet sich diese Frage?

A. Der Barwert (a) des Kapitales von 4 500 Mark beträgt nach Formel II:

$$a = \frac{4\,500}{1{,}0375^6} = 4\,500 \times \frac{1}{1{,}2471784} = 4\,500 \times 0{,}80181 = \mathbf{3\,608{,}14} \text{ Mark.}$$

Der Betrag der jährlich eingehenden Zinsen beläuft sich auf:

$$45 \times 3{,}25 = 146{,}25 \text{ Mark.}$$

Betrachtet man die Zinszahlungen als eine nachschüssige Jahresrente, so ermittelt sich deren Barwert (a,) nach der Formel XIV. a also:

$$a_, = \frac{146{,}25 \times (1{,}0375^6 - 1)}{1{,}0375^6 \times 0{,}0375}$$

$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$
$\times 6$
$\log. 1{,}0375^6 = 0{,}0959286$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^6 = 1{,}2471784$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^6 - 1 = 0{,}2471784$
$\log. (1{,}0375^6 - 1) = 0{,}3930105 - 1$
$\log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$

$\log. 146{,}25 = 2{,}1650959$
$+ \log. (1{,}0375^6 - 1) = 0{,}3930105 - 1$
$2{,}5581064 - 1$
$\log. 1{,}0375^6 = 0{,}0959286$
$+ \log. 0{,}0375 = 0{,}5740313 - 2$
$- 0{,}6699599 - 2$
$2{,}8881465$
$\text{num.} = 772{,}94$
$a_, = \mathbf{772{,}94}$ Mark.

Somit erhält man für den Diskont-Abzug:

$4\,500 - (3\,608{,}14 + 772{,}94) = 4\,500 - 4\,381{,}08 =$ **118.92** Mark.

Anmerkung 1. Nimmt man an, daß das seitherige Schuldverhältnis bis zum Ablaufe von 6 Jahren fortdauerte, so würde der Gläubiger an diesem Zeitpunkte den Betrag der gegebenen Schuld beziehen mit . . . . . 4 500,00 Mark, dann aber hinzurechnen müssen den Endwert ($A_,$) der inzwischen empfangenen Zinsen $= \frac{146{,}25 \times (1{,}0325^6 - 1)}{0{,}0325}$. 951,97 „

Zusammen: 5 451,97 Mark.

Demgegenüber beläuft sich der Endwert (A) der bei der Diskontierung empfangenen Beträge bei dem gleichen Zinsfuße auf $4\,381{,}08 \times 1{,}0325^6 =$ . . . . 5 307,89 „

Der Diskont-Wert ist also, bezogen auf den Schluß der Leihfrist, 144,08 „

Und dessen Barwert: $\frac{144{,}08}{1{,}0325^6} =$ . . . . 118.92 M (w. o.).

Anmerkung 2. Wie leicht einzusehen, sind durchaus analog solche Fälle zu behandeln, in welchen eine ausstehende Forderung an eine Drittperson übertragen (cediert) wird, wobei dem Cessionar als Käufer der Diskont-Abzug zu gute kommt.

g) Kurs-Werte.

Vorbemerkung. Im Kapital-Verkehr pflegt man mit der Bezeichnung „Kurs“ den in Geldwert bemessenen Preis auszudrücken, welcher für die Übertragung des Rechtes auf den Bezug oder die Nutzung einer Wert-Anlage entrichtet wird. Derjenige Geldbetrag, welcher für das zu veräußernde Objekt nach Maßgabe der Bedingungen seiner Entstehung und Begründung als Ausgangspunkt in Betracht gezogen wird, bedeutet seinen nominellen oder Nennwert, indessen der Geldbetrag, mit welchem die Erwerbung des Objektes je nach der zeitlichen Gestaltung der Verkehrslage geschieht, den effektiven Wert desselben darstellt.

In dem Kurse von Kapital-Anlagen wird also ein Verhältnis zwischen dem nominellen und dem effektiven Werte derselben zum Ausdruck gebracht. Der Einfachheit und Vergleichbarkeit willen erfolgen jedoch die betreffenden Angaben regelmäßig nach dem Maßstabe von je 100.

Selbstverständlich können sich Rechnungen über die Kurswerte auch derart gestalten, daß nicht diese selbst, sondern auf Grund gegebener Kurswerte deren Bedingungen oder Anforderungen zu ermitteln sind.

235. Ein Gutsbesitzer empfängt von der Genossenschaftsbank (Landschaft) ein Hypothekar-Darlehen in Form von Pfandbriefen, welche zu $3^1/_2$ Prozent verzinslich sind und ihm zum Nominalwerte (100) übergeben werden. Der Schuldner, welchem es vorbehalten blieb, die Briefe zu veräußern, zieht den Zinsstand in Erwägung und fragt sich, auf welchen Kurswert er rechnen könne, wenn der Verkehr $3^3/_4$ oder aber nur $3^1/_3$ Prozent notiert. Wie lautet die Antwort?

A. Bezeichnet man den gesuchten Kurswert mit $a_,$, so ist nach Maßgabe der allgemeinen Formel XIV. b. bei entsprechender, durch die Zeiteinheit von einem Jahre bedingter Reduktion derselben:

$$100 \times 0{,}035 = a_, \times 0{,}0375 \text{ bezw.} = a_, \times 0{,}0333.$$

Und daher:

$$a_{,} = \frac{35}{37,5} \text{ bezw. } \frac{35}{33,33}$$

Somit würde der Kurswert sein: **93,33** bezw. **105,00.**

Wie man sieht, läuft das Verfahren schließlich auf eine einfache Zinsrechnung hinaus, nach welcher man anzusetzen hätte:

$$3,75 : 100 = 3,50 : x; \text{ bezw. } 3,33 : 100 = 3,50 : x.$$

In beiden Fällen würden die Käufer der Pfandbriefe: $93,33 \times 0,0375$ bezw. $105 \times 0,0333 = 3,5$ Prozent von dem angelegten Kurswerte beziehen.

Anmerkung. Mit der vorliegenden Frage ist an Vorkommnisse angeknüpft, welche bei allen nach gleichem Systeme aufgebauten Kredit-Instituten, so z. B. auch bei den Landeskulturrentenbanken (Rentenscheine) eintreten können. Zur Sache selbst sei noch erwähnt, daß die betreffenden Darlehnsbanken auch wohl die Verwertung der Schuldbriefe selbst übernehmen und die bewilligten Beträge direkt aushändigen, ebenso, daß sie Rückzahlungen wiederum auch in ihren Pfandbriefen, und zwar zu deren Nominalwert, akzeptieren.

236. Ein Landwirt beabsichtigt, bei der Landes-Hypothekenbank ein in 34 Jahren zu amortisierendes Anleihen von 36 000 Mark aufzunehmen. Auf Grund älterer Bestimmungen der Bank würde er zu diesem Zwecke jährlich für die Verzinsung $3^3/_4$ und für die Tilgung $1^1/_2$, zusammen $5^1/_4$ Prozent, somit $360 \times 5,25 = 1\,890,00$ Mark zu entrichten gehabt haben. Wenn nun aber die Darleiherin inzwischen den Zins auf 4 Prozent erhöhte, indessen der Antragsteller es bei einer Zinsleistung von $3^3/_4$ Prozent bewenden lassen will: Wie hoch beläuft sich dann der Betrag des den gesteigerten Zinsanforderungen entsprechenden Kapitales, welches dem Landwirt ausgehändigt werden kann?

A. Bezeichnet man den gesuchten Barwert des Anleihens mit $a_{,}$, so stellt sich der Betrag der Annuitäten (r) für beide Fälle dar in der Gleichung:

$$\frac{36\,000 \times 1,0375^{34} \times 0,0375}{1,0375^{34} - 1} = \frac{a_{,} \times 1,04^{34} \times 0,04}{1,04^{34} - 1} \quad \text{(XIV. b.)}$$

Die Auslösung des Wertes von $a_{,}$ aus dieser Gleichung ergibt:

$$\frac{36\,000 \times 1,0375^{34} \times 0,0375 \times (1,04^{34} - 1)}{1,0375^{34} - 1} = a_{,} \times 1,04^{34} \times 0,04$$

$$a_{,} = \frac{36\,000 \times 1,0375^{34} \times 0,0375 \times (1,04^{34} - 1)}{(1,0375^{34} - 1) \times 1,04^{34} \times 0,04}$$

Aus der weiteren Berechnung folgt dann:

$\log. 1,0375 = 0,0159881$	$\log. 1,04 = 0,0170333$
$\times 34$	$\times 34$
$\log. 1,0375^{34} = 0,5435954$	$\log. 1,04^{34} = 0,5791322$
$\text{num. log. } 1,0375^{34} = 3,4961928$	$\text{num. log. } 1,04^{34} = 3,7943043$
$\text{num. log. } 1,0375^{34} - 1 = 2,4961928$	$\text{num. log. } 1,04^{34} - 1 = 2,7943043$
$\log. (1,0375^{34} - 1) = 0,3972782$	$\log. (1,04^{34} - 1) = 0,4462737$
$\log. 0,0375 = 0,5740313 - 2$	$\log. 0,04 = 0,6020600 - 2$

$$\begin{aligned}
\log. 36\,000 &= 4{,}5563025 \\
+ \log. 1{,}0375^{34} &= 0{,}5435954 \\
+ \log. 0{,}0375 &= 0{,}5740313 - 2 \\
+ \log. (1{,}04^{34} - 1) &= 0{,}4462737 \\
& \overline{6{,}1202029 - 2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. (1{,}0375^{34} - 1) &= 0{,}3972782 \\
+ \log. 1{,}04^{34} &= 0{,}5791322 \\
+ \log. 0{,}04 &= 0{,}6020600 - 2 \\
& \quad - 1{,}5784704 - 2 \\
& \quad\; 4{,}5417325 \\
\text{num.} &= 34\,812{,}28 \\
a_{,} &= \mathbf{34\,812{,}28} \text{ Mark.}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Tafel I:

$$\frac{36\,000}{0{,}04} \times 0{,}0375 = 33\,750 ; \quad \frac{3{,}4961945}{2{,}4961945} = 1{,}40061 ; \quad \frac{2{,}7943163}{3{,}7943163} = 0{,}736447.$$

Somit ist:

$$a_{,} = 33\,750 \times 1{,}40061 \times 0{,}736447 = \mathbf{34\,812{,}28} \text{ Mark.}$$

Der Effektivbetrag des Darlehens beträgt also vom Nominalbetrage (100) desselben:

$$\frac{34\,812{,}28}{36\,000{,}00} \times 100 = \mathbf{96{,}7}.$$

Und die gesamte Jahresrate (Zins und Tilgungsquote) würde sich belaufen auf:

$$34\,812{,}28 : 1\,890{,}00 = 100 : x;$$

$$x = 5{,}429 \text{ oder rund } 5{,}43 \text{ Prozent.}$$

Das sind wiederum: . . $\frac{5{,}25}{0{,}967} = 5{,}429.$

Jene 34 812,28 Mark ergeben mit diesem Prozentsatz für Zinsen und Tilgung genau den Betrag der effektiv zu zahlenden Annuitäten von 1 890,00 Mark.

Anmerkung. Aus dem vorliegenden Beispiele ist zugleich zu ersehen, wie mit der Erhöhung des Zinsfußes die Tilgungsquoten geringer ausfallen. Bringt man nämlich von jenen 5,43 Prozent die Zinsen mit 4 Prozent in Abzug, so bleiben für die Tilgung 1,43 Prozent vom Kapitale, statt wie früher: 1,50 Prozent.

237. Zum Zwecke der Herstellung elektrischer Anlagen bedarf eine Stadtgemeinde der Aufnahme eines Anleihens von 500 000 Mark, welches sie innerhalb 40 Jahren in gleichen Raten zu verzinsen und abzutragen beabsichtigt. Von zwei Bankinstituten, welche dasselbe zu übernehmen geneigt sind, berechnet das eine einen Kurswert von 85 bei $3^3/_4$-prozentiger, das andere einen Kurswert von 90 bei $4^1/_4$-prozentiger Verzinsung. Welches dieser Anerbieten ist für die Anleiherin das vortheilhaftere?

A. Der Fragestellung gemäß handelt es sich hier um den Nachweis der Annuitäten (Zinsen und Tilgungsraten), welche die Stadt in jedem der vorliegenden Fälle zu entrichten haben würde. Um hierfür aber die richtigen Ansätze zu finden, hat man sich zu vergegenwärtigen, daß die Käufer

der Schuldscheine für je 100 Mark nur 85 bezw. 90 Mark ausgeben, von welchen sie im einen Falle $0,85 \times 3,75 = 3,1875$, im anderen Falle $0,90 \times 4,25 = 3,825$ Mark, somit auf einen Schuldschein von $\frac{100}{85} \times 100 = 117,65$ bezw. $\frac{100}{90} \times 100 = 111,11$ Mark, für welchen sie nur 100 Mark bezahlen, $117,65 \times 0,031875 = 3,75$ bezw. $111,11 \times 0,03825 = 4,25$ Mark Zinsen beziehen würden.

Hiernach erhält man für die Beträge der Annuitäten (r und r,) nach der Formel XIV. b.:

$$r = \frac{500000 \times \frac{100}{85} \times 1,0375^{40} \times 0,0375}{1,0375^{40} - 1} = \frac{588235 \times 1,0375^{40} \times 0,0375}{1,0375^{40} - 1}$$

$$r_{,} = \frac{500000 \times \frac{100}{90} \times 1,0425^{40} \times 0,0425}{1,0425^{40} - 1} = \frac{555555 \times 1,0425^{40} \times 0,0425}{1,0425^{40} - 1}$$

log. 1,0375 = 0,0159881	log. 1,0425 = 0,0180761
× 40	× 40
log. $1,0375^{40}$ = **0,6395240**	log. $1,0425^{40}$ = **0,7230440**
num. log. $1,0375^{40}$ = 4,3603766	num. log. $1,0425^{40}$ = 5,2849873
num.log. $1,0375^{40}$ – 1 = 3,3603766	num.log. $1,0425^{40}$ – 1 = 4,2849873
log. ($1,0375^{40}$ — 1) = **0,5263880**	log. ($1,0425^{40}$ — 1) = **0,6319495**
log. 0,0375 = **0,5740313 — 2**	log. 0,0425 = **0,6283889 — 2**

1.

log. 588 235 = 5,7695509
+ log. $1,0375^{40}$ = 0,6395240
+ log. 0,0375 = 0,5740313 — 2
4,9831062
— log. ($1,0375^{40}$ — 1) = 0,5263880
4,4567182
num. = 28 623,20
r = **28 623,20** M.

2.

log. 555 555 = 5,7447271
+ log. $1,0425^{40}$ = 0,7230440
+ log. 0,0425 = 0,6283889 — 2
5,0961600
— log. ($1,0425^{40}$ — 1) = 0,6319495
4,4642105
num. = 29 121,28
r, = **29 121,28** M.

Darnach wäre der Betrag der Annuitäten im ersteren Falle um:

29 121,28 — 28 623,20 = **498,08** Mark

geringer, als im zweiten. Bezogen auf das effektive Schuld-Kapital beläuft sich derselbe auf 588 235 : 28 623,20 bezw. 555 555 : 29 121,28 = 100 : x; x = **4,866** bezw. **5,242** Prozent. Die erstere Offerte ist also die vorteilhaftere. —

Anmerkung. Die effektiven Beträge des Anleihens entsprechen in beiden Fällen einem Nominalwert von:

588 235 × 0,85 und 555 555 × 0,90 = 500 000 Mark.

238. Behufs Erweiterung ihres Betriebes beabsichtigt eine Aktien-Gesellschaft ein 4-prozentiges, in 30 Jahren zu tilgendes Anleihen im Betrage von 1,5 Millionen Mark aufzubringen. Ein Bank-Konsortium er-

klärt sich bereit, dasselbe zum Kurswerte von 88 zu übernehmen. Frage: Wie hoch müßte sich der Kurswert dann gestalten, wenn ein Zinsfuß von $4^1/_2$ Prozent zu Grunde gelegt wird, der Betrag der zu zahlenden Annuitäten aber demjenigen, welchen die 4-prozentige Verzinsung bei einem Kurswerte von 88 ergibt, gleich ausfallen soll?

A. Zur Beantwortung der vorliegenden Frage führt die Aufstellung einer Gleichung, in welcher die in beiden Fällen erforderlichen jährlichen Leistungen (r und $r_,$) der Darlehnsnehmerin balanziert werden. Bezeichnet man dann den gesuchten Kurswert mit K. W., so erhält man:

$$\frac{1\,500\,000 \times \frac{100}{88} \times 1{,}04^{30} \times 0{,}04}{1{,}04^{30} - 1} = \frac{1\,500\,000 \times \frac{100}{K.W.} \times 1{,}045^{30} \times 0{,}045}{1{,}045^{30} - 1}$$

$$\frac{\frac{100}{88} \times 1{,}04^{30} \times 0{,}04 \times (1{,}045^{30} - 1)}{1{,}04^{30} - 1} = \frac{1{,}045^{30} \times 4{,}5}{K.W.}$$

$$\frac{100 \times 1{,}04^{30} \times 0{,}04 \times (1{,}045^{30} - 1) \times K.W.}{88 \times (1{,}04^{30} - 1)} = 1{,}045^{30} \times 4{,}5$$

$$\frac{4 \times 1{,}04^{30} \times (1{,}045^{30} - 1) \times K.W.}{88 \times (1{,}04^{30} - 1)} = 1{,}045^{30} \times 4{,}5$$

$$\frac{1{,}04^{30} \times (1{,}045^{30} - 1) \times K.W.}{22 \times (1{,}04^{30} - 1)} = 1{,}045^{30} \times 4{,}5$$

$$K.W. = \frac{1{,}045^{30} \times 4{,}5 \times 22 \times (1{,}04^{30} - 1)}{1{,}04^{30} \times (1{,}045^{30} - 1)}$$

$$K.W. = \frac{1{,}045^{30} \times 99 \times (1{,}04^{30} - 1)}{1{,}04^{30} \times (1{,}045^{30} - 1)}$$

Die weitere Rechnung ergibt alsdann:

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}04 &= 0{,}0170333 \\
&\times 30 \\
\log. 1{,}04^{30} &= \mathbf{0{,}5109990} \\
\text{num.} \log. 1{,}04^{30} &= 3{,}2433889 \\
\text{num.} \log. 1{,}04^{30} - 1 &= 2{,}2433889 \\
\log. (1{,}04^{30} - 1) &= \mathbf{0{,}3509046}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 1{,}045 &= 0{,}0191163 \\
&\times 30 \\
\log. 1{,}045^{30} &= \mathbf{0{,}5734890} \\
\text{num.} \log. 1{,}045^{30} &= 3{,}7453208 \\
\text{num.} \log. 1{,}045^{30} - 1 &= 2{,}7453208 \\
\log. (1{,}045^{30} - 1) &= \mathbf{0{,}4385931}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log. 99 &= 1{,}9956352 \\
+ \log. 1{,}045^{30} &= 0{,}5734890 \\
+ \log. (1{,}04^{30} - 1) &= 0{,}3509046 \\
&\ 2{,}9200288 \\
\log. 1{,}04^{30} = 0{,}5109990 & \\
+ \log. (1{,}045^{30} - 1) = 0{,}4385931 & \\
&- 0{,}9495921 \\
&\ 1{,}9704367 \\
\text{num.} &= 93{,}4193
\end{aligned}$$

K. W., d. i. Kurswert = **93,41** (93)

Anmerkung. Zur Kontrolle dient folgende Rechnung:
Die Annuitäten der Schuld betragen in beiden Fällen (XIV. b.):

$$r = \frac{1\,500\,000 \times \frac{100}{88} \times 1{,}04^{30} \times 0{,}04}{1{,}04^{30} - 1} = \frac{1\,500\,000 \times 4 \times 1{,}04^{30}}{88 \times (1{,}04^{30} - 1)} = \frac{1\,500\,000 \times 1{,}04^{30}}{22 \times (1{,}04^{30} - 1)}$$

$$= \frac{4\,865\,084}{49{,}3545} = \mathbf{98\,574{,}14} \text{ Mark.}$$

$$r_{,} = \frac{1\,500\,000 \times \frac{100}{93{,}41\,(93)} \times 1{,}045^{30} \times 0{,}045}{1{,}045^{30} - 1} = \frac{1\,500\,000 \times 4{,}5 \times 1{,}045^{30}}{93{,}41\,(93) \times (1{,}045^{30} - 1)}$$

$$= \frac{25\,280\,915}{93{,}41\,(93) \times 2{,}745321} = \frac{25\,280\,915}{256{,}466} = \mathbf{98\,574{,}14} \text{ Mark.}$$

Und die effektiven Kapitalwerte derselben sind (XIV. a):

$$a = \frac{98\,574\,(14) \times (1{,}04^{30} - 1)}{1{,}04^{30} \times 0{,}04} = \frac{221\,140{,}16}{0{,}1297356} = \mathbf{1\,704\,545} \text{ Mark.}$$

$$a_{,} = \frac{98\,574\,(14) \times (1{,}045^{30} - 1)}{1{,}045^{30} \times 0{,}045} = \frac{270\,617{,}27}{0{,}1685394} = \mathbf{1\,605\,662} \text{ Mark.}$$

Diesen entspricht aber der gleiche Nominalwert von:

$$\left.\begin{array}{l} 1\,704\,545 \times 0{,}88 = \\ 1\,605\,662 \times 0{,}93\,(42) = \end{array}\right\} \mathbf{1\,500\,000} \text{ Mark.}$$

239. Eine Staatsverwaltung beabsichtigt, mittelst Anleihe ein mit 4 Prozent zu verzinsendes und in 60 Jahren zu tilgendes Kapital von 10 Mill. Mark aufzubringen und zu diesem Behufe 10 000 Obligationen à 1 000 Mark zum Nominalwert auszugeben. Vor definitiver Entscheidung zieht sie aber noch den Fall einer Erniedrigung des Zinsfußes auf $3\frac{1}{2}$ Prozent und einer entsprechenden Senkung des Kurswertes der Obligationen unter deren Nominalwert in Betracht. Dabei stellt sie sich zugleich die Aufgabe, nachzuweisen, wie weit der Kurs für die zu veräußernden Obligationen erhöht werden müßte, damit der Fiskus nicht eine stärkere Belastung mit Annuitätenzahlungen zu tragen habe, als bei der Veräußerung 4-prozentiger Obligationen zu deren Nominalwerte. Wie wird diese Rechnung ausgeführt?

A. Wenn die Obligationen, statt zu 4, zu $3\frac{1}{2}$ Prozent verzinst werden, so zahlt der Käufer für je 100 Mark nur $\frac{3{,}5}{4} \times 100 = 87{,}5$ Mark, welchem ein Zinsbezug von $87{,}5 \times 0{,}04 = 3{,}5$ Mark entspricht. Wenn aber ein Nominalwert von 100 Mark 4 Mark Zinsen einbringen soll, so müßte der Schuldner dem Käufer bei einem Kurswert von 87,5 den Betrag von $\frac{100}{87{,}5} \times 100 = 114{,}28\,(571)$ Mark verschreiben, so daß im gegebenen Falle die gesamte Staatsschuld 11 428 571 Mark betragen würde.

Die Rechnung gestaltet sich hiernach analog dem Verfahren in Aufgabe 238 folgendermaßen:

$$\frac{10\,000\,000 \times 1{,}04^{60} \times 0{,}04}{1{,}04^{60} - 1} = \frac{10\,000\,000 \times \frac{100}{\text{K. W.}} \times 1{,}035^{60} \times 0{,}035}{1{,}035^{60} - 1}$$

$$\frac{1{,}04^{60} \times 0{,}04 \times (1{,}035^{60} - 1)}{1{,}04^{60} - 1} = \frac{100 \times 1{,}035^{60} \times 0{,}035}{\text{K. W.}}$$

$$\frac{1{,}04^{60} \times 0{,}04 \times (1{,}035^{60} - 1) \times \text{K. W.}}{1{,}04^{60} - 1} = 1{,}035^{60} \times 3{,}5$$

$$\text{K.W.} = \frac{1{,}035^{60} \times 3{,}5 \times (1{,}04^{60} - 1)}{1{,}04^{60} \times 0{,}04 \times (1{,}035^{60} - 1)}$$

Die Schlußrechnung ergibt sodann:

$$\begin{array}{rl} \log. 1{,}04 = & 0{,}0170333 \\ & \times 60 \\ \hline \log. 1{,}04^{60} = & 1{,}0219980 \\ \text{num.}\log. 1{,}04^{60} = & 10{,}5195691 \\ \text{num.}\log. 1{,}04^{60} - 1 = & 9{,}5195691 \\ \log. (1{,}04^{60} - 1) = & 0{,}9786173 \\ \log. 0{,}04 = & 0{,}6020600 - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log. 1{,}035 = & 0{,}0149403 \\ & \times 60 \\ \hline \log. 1{,}035^{60} = & 0{,}8964180 \\ \text{num.}\log. 1{,}035^{60} = & 7{,}8780353 \\ \text{num.}\log. 1{,}035^{60} - 1 = & 6{,}8780353 \\ \log. (1{,}035^{60} - 1) = & 0{,}8374644 \\ \log. 3{,}5 = & 0{,}5440680 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log. 1{,}035^{60} = & 0{,}8964180 \\ + \log. 3{,}5 = & 0{,}5440680 \\ + \log. (1{,}04^{60} - 1) = & 0{,}9786173 \\ \hline & 2{,}4191033 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log. 1{,}04^{60} = & 1{,}0219980 \\ + \log. 0{,}04 = & 0{,}6020600 - 2 \\ + \log. (1{,}035^{60} - 1) = & 0{,}8374644 \\ \hline & - 0{,}4615224 \\ \hline & 1{,}9575809 \\ \text{num.} = & 90{,}69448 \end{array}$$

K. W., d. i. Kurswert = **90,69** (448)

Anmerkung 1. Zur Ermittlung des Betrages der Annuitäten (r und $r_,$) hat man nach Anleitung in Aufgabe 238 anzusetzen:

$$r = \frac{10\,000\,000 \times 1{,}04^{60} \times 0{,}04}{1{,}04^{60} - 1} = \mathbf{442\,019} \text{ Mark.}$$

$$r_, = \frac{10\,000\,000 \times \frac{100}{90{,}694} \times 1{,}035^{60} \times 0{,}035}{1{,}035^{60} - 1} = \mathbf{442\,019} \text{ Mark.}$$

Somit ist der effektive Wert derselben:

$$a = \frac{442\,019 \times (1{,}04^{60} - 1)}{1{,}04^{60} \times 0{,}04} = \mathbf{10\,000\,000} \text{ Mark.}$$

$$a_, = \frac{442\,019 \times (1{,}035^{60} - 1)}{1{,}035^{60} \times 0{,}035} = \mathbf{11\,026\,030} \text{ Mark.}$$

Entsprechend einem nominellen Werte von:

10 000 000 Mark bezw. von 11 026 030 $\times$ 0,9069 = **10 000 000** Mark.

Anmerkung 2. Die Bedeutung des hier dargelegten Verhältnisses wird ersichtlich, wenn man beachtet, daß der Betrag der Annuitäten, wie gezeigt wurde, von 4-prozentigen, zum Nominalwerte veräußerten Obligationen sich auf 442 019 Mark beläuft, indessen er dann, wenn die Schuldscheine gemäß der Herabsetzung des Zinsfußes auf $3\frac{1}{2}$ Prozent zu einem Kurswerte von 87,5 ausgegeben werden, sich erhöht, und zwar (Formel XIV. b.) auf:

$$r = \frac{10\,000\,000 \times \frac{100}{87{,}5} \times 1{,}035^{60} \times 0{,}035}{1{,}035^{60} - 1} = \frac{11\,428\,571 \times 1{,}035^{60} \times 0{,}035}{1{,}035^{60} - 1}$$

Darnach erhält man:

$$\begin{aligned} \log.\ 11\,428\,571 &= 7{,}0579919 \\ +\log.\ 1{,}035^{60} &= 0{,}8964180 \\ +\log.\ 0{,}035 &= 0{,}5440680-2 \\ & \quad 6{,}4984779 \\ -\log.\ (1{,}035^{60}-1) &= 0{,}8374644 \\ & \quad 5{,}6610135 \\ \text{num.} &= 458\,156 \\ r &= \mathbf{458\,156}\ \text{Mark.} \end{aligned}$$

Die Veräußerung der Obligationen zum Kurswert von 87,5 würde also eine Erhöhung des Betrages der Annuitäten bewirken um 458 156 — 442 019 = 16 137 Mark. (Genauer: 458 156,10 — 442 018,75 = 16 137,35 Mark.)

Anmerkung 3. Wird schließlich die Frage gestellt, auf welchem Wege sich die Abgleichung tatsächlich vollziehen würde, so ist zu erwägen, daß die Anleihe bei einem $3\,^1/_2$-prozentigen Kursstand von 87,5 den Betrag von 11 428 571 Mark erreicht, der Schuldner aber in Folge einer Erhöhung des Kurses von 87,5 auf 90,69 (448) mehr bezieht:

$$\frac{11\,428\,571}{100} \times (90{,}69\,[448] - 87{,}50) = 114\,285{,}71 \times 3{,}19(448) = 365\,083{,}30 \text{ Mark.}$$

Dieses Kapital (Mehrbezug seitens des Schuldners) erfordert dann bei Anwendung eines Zinsfußes von wiederum 4 Prozent zu seiner Tilgung (XIV. b):

$$\begin{aligned} \log.\ 365\,083{,}30 &= 5{,}5623916 \\ +\log.\ 1{,}04^{60} &= 1{,}0219980 \\ +\log.\ 0{,}04 &= 0{,}6020600-2 \\ & \quad 5{,}1864496 \\ -\log.\ (1{,}04^{60}-1) &= 0{,}9786173 \\ & \quad 4{,}2078323 \\ \text{num.} &= 16\,137{,}35 \end{aligned}$$

Also genau den oben ermittelten Mehrbetrag von **16 137,35** Mark.

240. Ein Staatsanleihen im Nominalbetrage von 6 Millionen Mark soll in der Weise zu Stande kommen, daß als Gegenwert 12 000, zu $3\,^1/_2$ Prozent verzinsliche Obligationen à 500 Mark ausgegeben, während 40 Jahren am Ende jeden Jahres 300 Obligationen (150 000 Mark) zurückgekauft, und gleichzeitig die Zinsen von der jeweiligen Restschuld entrichtet werden. Eine Bankfirma ist bereit, das Anleihen zu 4 Prozent zu übernehmen. Wie hoch berechnet sich das Kapital, welches sie dem Fiskus übergibt, und wieviel beträgt demgemäß der Kurswert der Obligationen?

A. Der Nennwert des Anleihens setzt sich zusammen aus dem Barwerte aller Tilgungsquoten und dem Barwerte aller in dem Zeitraume von 40 Jahren einlaufenden Zinsen. Letztere bilden in ihrer Jahresfolge eine abnehmende arithmetische Reihe, welche mit 60 000 × 3,5 = 210 000 Mark beginnt, indessen die weiteren Glieder von Jahr zu Jahr um den Zins von dem inzwischen zurückgezahlten Kapital von 150 000 Mark, also um 1 500 × 3,5 = 5 250 Mark zurückgehen und am Ende des 40sten Jahres mit diesem Betrage abschließen. Bezogen auf die erste Zahlung bedeutet daher dieser Verlauf eine fortschreitende Abnahme um 525 000 : 210 000 = 2,5 Prozent oder um $^1/_{40}$.

In Anwendung auf den gegebenen Fall führt natürlich diese Rechnungsweise auf einen Nominalwert des Anleihens von 6 Millionen Mark. Überträgt man nun das Verfahren auf die vorliegende Offerte (4 Prozent), so ergibt sich auf Grund der Formeln XIV. a und XXVII. a Folgendes:

Der Barwert der Rückzahlungen ist (XIV. a.):

$$a = \frac{150\,000 \times (1{,}04^{40} - 1)}{1{,}04^{40} \times 0{,}04}$$

Und derjenige der Zinsbezüge (XXVII. a.):

$$a = \frac{1}{1{,}04^{40} \times 0{,}04} \times \left[210\,000 \times (1{,}04^{40} - 1) - 5250 \times \left(\frac{1{,}04^{40} - 1{,}04}{0{,}04} - 39\right)\right]$$

Der summarische effektive Wert des Anleihens ist also:

$$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$$
$$\times 40$$
$$\log. 1{,}04^{40} = 0{,}6813320$$
$$\text{num. log. } 1{,}04^{40} = \mathbf{4{,}8010033}$$
$$\text{num. log. } 1{,}04^{40} - 1 = \mathbf{3{,}8010033}$$

1. Barwert der Rückzahlungen:

$$\frac{150\,000 \times 3{,}8010033}{4{,}8010033 \times 0{,}04} = \frac{570\,150{,}5}{0{,}192040132} = \ldots\ldots\ldots \quad 2\,968\,914 \text{ Mark.}$$

2. Barwert der Zinsbezüge:

$$\frac{25}{4{,}8010033} \times \left[210\,000 \times 3{,}8010033 - 5\,250 \times \left(\frac{3{,}7610033}{0{,}04} - 39\right)\right]$$
$$= 5{,}207244 \times [798\,210{,}7 - 5\,250 \times (94{,}02508 - 39)]$$
$$= 5{,}207244 \times (798\,210{,}7 - 5\,250 \times 55{,}02508)$$
$$= 5{,}207244 \times (798\,210{,}7 - 288\,881{,}7)$$
$$= 5{,}207244 \times 509\,329 = \ldots\ldots\ldots \quad 2\,652\,200 \text{ „}$$

Zusammen: 5 621 114 Mark.

Somit beläuft sich das Kapital, welches die Bank auszahlt, auf **5 621 114** Mark, ist also der Kurswert, zu welchem sie die Obligationen übernimmt:

$$6 : 5{,}621\,114 = 100 : x; \;\; x = \mathbf{93{,}63}.$$

C. Die ewigen (dauernden oder immerwährenden) Renten.

Das Verfahren.

1. Entwicklung der Formeln.

Vorbemerkung. In der rechnerischen Darstellung des Verhaltens zeitlich unbegrenzt fortlaufender Renten konkurrieren überhaupt nur drei Größen, und zwar der Bar- oder Vorwert (a), der Wert der einzelnen Raten (r) und der Zinsfuß (p). Die Ermittlung eines Nach- oder Endwertes (A) fällt, da derselbe durchweg eine unendliche Größe bildet, von vornherein ganz außer Betracht. Das Gleiche gilt selbstverständlich von der gesamten Zeitdauer (n) des Rentenlaufes.

Sind die Werte für a und r gegeben, so lässet sich auch derjenige für p gerade bei der ewigen Rente, wenigstens für eine Reihe von Fällen, auf einfachem Wege ermitteln. Aufgaben dieser Art tauchen aber im Leben sehr selten auf. und kann darum hier von einer besonderen Behandlung einschlagender Fragen Umgang genommen werden. —

a) Ewige Jahresrenten.

aa) Nachschüssige.

Nach der Formel XIV. a. (S. 143) berechnet sich der Bar- oder Vorwert einer alljährlich fälligen, nachschüssigen Zeitrente also:

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)}$$

Werden der Zähler und der Nenner dieses Bruches durch q^n dividiert, so erhält man:

$$a = \frac{r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n}}{q - 1} = \frac{r \cdot \left(1 - \frac{1}{q^n}\right)}{q - 1}$$

Da aber die Zahl n der Jahre bei der ewigen Rente $= \infty$, d. h. unendlich groß ist, und demgemäß bei beständigem Anwachsen derselben der in dem Dividendus der rechten Seite dieser Gleichung enthaltene Bruch $1 - \frac{1}{q^n}$ unendlich klein, d. h. = Null werden muß, so verbleibt schließlich für den Bar- oder Vorwert der Rente:

$$a = \frac{r}{q - 1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{XXVIII. a.}$$ [1]

$$a = \frac{r}{0{,}0p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Aufgaben 241—243.

Nun ist ferner $q - 1$ oder $0{,}0p = \frac{p}{100}$. Man kann daher der vorliegenden Formel auch die Fassung geben:

$$a = \frac{r}{\frac{p}{100}} = \frac{100 \cdot r}{p}$$ [2]

[1] Zu dem gleichen Ergebnisse würde man übrigens gelangen, wenn man an die in dem Dividendus der Formel XIV. a angedeutete Multiplikation anknüpft. Es folgt dann:

$$a = \frac{r \cdot q^n - r}{q^n \cdot (q - 1)} = \frac{r \cdot q^n}{q^n \cdot (q - 1)} - \frac{r}{q^n \cdot (q - 1)} = \frac{r}{q - 1} - \frac{r}{q^n \cdot (q - 1)}$$

Vergegenwärtigt man sich nun wiederum, daß bei der ewigen Rente die Zahl der Jahre n, und demgemäß auch der Nenner $q^n \cdot (q - 1)$ in dem Subtrahendus der Gleichung beständig größer, daher aber der betreffende Quotient immer kleiner und schließlich = Null wird, so reduziert sich der Wert von a auf: $\frac{r}{q - 1}$.

[2] Diese Schlußformel erhält man auch auf dem einfachen Wege des Ansatzes einer Proportion, welche lautet:

$$p : 100 = r : a$$

Soll die Rate einer nachschüssigen ewigen Jahresrente aus deren Vorwert a und dem Zinsfuße p bestimmt werden, so hat man einfach von der Grundformel XXVIII. a. auszugehen. Man erhält dann:

$$\left\{\begin{array}{l} r = a \cdot (q - 1) \\ r = a \cdot 0{,}0p = \dfrac{a \cdot p}{100} \end{array}\right\} \quad \text{XXVIII. b.}$$

Aufgaben 245 und 246.

Die Beziehungen, welche zwischen den Werten von a und r bei gleichem Zinsfuße bestehen, lassen sich nach dieser Darlegung in Worten ausdrücken, wie folgt:

Der Bar- oder Vorwert a einer ewigen Rente ist ein Kapital, dessen einfache jährliche Zinsen $\frac{a \cdot p}{100}$ gleich dem Betrage einer Rate r sind.

bb) Vorschüssige.

Geht man analog dem seither erörterten Verfahren zu Werke, so wird man hier auf die Formel XV. a. (S. 144) zurückzugreifen haben, nach welcher sich der Bar- oder Vorwert einer jährlich eingehenden, vorschüssigen Zeitrente berechnet. Diese Formel lautet:

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{n-1} \cdot (q - 1)}$$

Dividiert man alsdann den Zähler und Nenner dieses Bruches wiederum durch $q^{n-1} = \frac{q^n}{q}$, so ergibt sich:

$$a = \frac{r \cdot \dfrac{q^n - 1}{\dfrac{q^n}{q}}}{q - 1} = \frac{r \cdot q \cdot \left(1 - \dfrac{1}{q^n}\right)}{q - 1}$$

Und wenn man gemäß dem oben dargelegten Verfahren die Größe von $1 - \frac{1}{q^n}$ ausschaltet:

$$\left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{r \cdot q}{q - 1} \\ a = \dfrac{r \cdot 1{,}0p}{0{,}0p} = \dfrac{100 \cdot r \cdot 1{,}0p}{p} \end{array}\right\} \quad \text{XXIX. a.}$$

Aufgabe 244.

Hieraus folgt aber weiter:

$$\left\{\begin{array}{l} r = \dfrac{a \cdot (q - 1)}{q} \\ r = \dfrac{a \cdot 0{,}0p}{1{,}0p} = \dfrac{a \cdot p}{100 \cdot 1{,}0p} \end{array}\right\} \quad \text{XXIX. b.}$$

Aufgabe 247.

Dieselbe ergibt:

$$\frac{100}{p} = \frac{a}{r}, \text{ und weiter: } a = \frac{100 \cdot r}{p} \text{ (w. o.).}$$

Anmerkung. Ewige Renten, deren Raten je an bestimmten Zeitabschnitten des Jahres fällig sind, kommen im Leben nur ausnahmsweise vor. In Anbetracht dessen, und da sich die bezüglichen Formeln durchaus entsprechend den für die ewigen Jahresrenten (XXVIII und XXIX) gestalten, kann hier von einer separaten Darlegung des auf sie anzuwendenden Rechnungsverfahrens, wie auch von einer Vorführung von Beispielen abgesehen werden. Gegebenen Falles dienen zur Orientierung über die gangbaren Bezeichnungen der Teilfristen des Jahres und der zugehörigen Zinsfaktoren die einleitenden Ausführungen zu dem Abschnitte, welcher von den gleichnamigen Zeitrenten handelt. (Formeln XVI und XVII. S. 146 u. 147.)
Hiernach würden die heranzuziehenden Formeln lauten müssen:
Wenn die Renten sind:

Nachschüssige:

$$a = \frac{r}{0{,}0\frac{p}{m}} = \frac{100 \,.\, r}{\frac{p}{m}}$$

$$r = a \,.\, 0{,}0\frac{p}{m} = \frac{a \,.\, \frac{p}{m}}{100}$$

Vorschüssige:

$$a = \frac{r \,.\, 1{,}0\frac{p}{m}}{0{,}0\frac{p}{m}} = \frac{100 \,.\, r \,.\, 1{,}0\frac{p}{m}}{\frac{p}{m}}$$

$$r = \frac{a \,.\, 0{,}0\frac{p}{m}}{1{,}0\frac{p}{m}} = \frac{a \,.\, \frac{p}{m}}{100 \,.\, 1{,}0\frac{p}{m}}$$

b) Ewige Renten, deren Raten in Zwischenräumen von je mehreren Jahren fällig sind. (Aussetzende Renten.)

Die nachfolgenden Erörterungen knüpfen an die Vorbemerkungen zu dem Abschnitte über die aussetzenden Zeitrenten (Formeln XVIII und XIX. S. 148 u. 149) an.[1]

aa) Nachschüssige.

Nach der Formel XVIII. a (S. 148) ermittelt man den Bar- oder Vorwert einer nachschüssigen aussetzenden Zeitrente, deren Raten je nach b Jahren fällig werden, also:

$$a = \frac{r \,.\, (q^n - 1)}{q^n \,.\, (q^b - 1)}$$

Dividiert man den Zähler und den Nenner des rechtsseitigen Bruches durch q^n, so kommt:

$$a = \frac{r \,.\, \frac{q^n - 1}{q^n}}{q^b - 1} = \frac{r \,.\, \left(1 - \frac{1}{q^n}\right)}{q^b - 1}.$$

Und ferner, wenn gemäß früherer Weisung der Wert von $1 - \frac{1}{q^n}$ eliminiert wird:

$$\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{r}{q^b - 1} \quad \dots\dots\dots\dots \\[2ex] a = \dfrac{r}{1{,}0p^b - 1} \quad \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \text{XXX. a.}$$

Aufgaben 248—250.

[1] Es soll an dieser Stelle nicht unbemerkt bleiben, daß die für die nachfolgenden Rubriken ebenfalls in Frage kommenden Größen a und r, anstatt in Anknüpfung an die gleichnamigen Zeitrenten, auch auf Grundlage der bereits entwickelten Formeln XXVIII und XXIX festgestellt werden können, indem man diese

Auf Grund dieser Formel erhält man dann:

$$\left\{\begin{array}{l} r = a \cdot (q^b - 1) \\ r = a \cdot (1{,}0p^b - 1) \end{array}\right\}$$ XXX. b. *Aufgaben 253 und 254.*

bb) Vorschüssige.

Richtschnurgebend ist hier die Formel XIX. a. (S. 149), aus welcher sich der Bar- oder Vorwert einer vorschüssigen, je b Jahre aussetzenden Zeitrente ergibt. Dieselbe lautet:

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{n-b} \cdot (q^b - 1)}$$

Analog dem oben bereits angegebenen Verfahren erhält man durch Division des Zählers und des Nenners des rechtsseitigen Bruches durch $q^{n-b} = \frac{q^n}{q^b}$:

$$a = \frac{r \cdot \frac{q^n - 1}{\frac{q^n}{q^b}}}{q^b - 1} = \frac{r \cdot q^b \cdot \left(1 - \frac{1}{q^n}\right)}{q^b - 1}$$

Und nach Ausschaltung der Größe von $1 - \frac{1}{q^n}$:

$$\left\{\begin{array}{l} a = \frac{r \cdot q^b}{q^b - 1} = \frac{r}{q^b - 1} + r \\ a = \frac{r \cdot 1{,}0p^b}{1{,}0p^b - 1} = \frac{r}{1{,}0p^b - 1} + r \end{array}\right\}$$ XXXI. a. *Aufgaben 251 und 252.*

Hieraus folgt dann auch:

$$\left\{\begin{array}{l} r = \frac{a \cdot (q^b - 1)}{q^b} = a - \frac{a}{q^b} \\ r = \frac{a \cdot (1{,}0p^b - 1)}{1{,}0p^b} = a - \frac{a}{1{,}0p^b} \end{array}\right\}$$ XXXI. b. *Aufgabe 255.*

c) Aufgeschobene ewige Renten.

Die Darlegung der hier anzuwendenden Leitsätze stützt sich auf die Ausführungen zu dem Abschnitte über die gleichnamigen Zeitrenten (Formeln XX. a und XXI. a).

aa) Nachschüssige.

Laut Formel XX. a (S. 151) berechnet sich der Bar- oder Vorwert einer nachschüssigen, aufgeschobenen Zeitrente also:

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{v+n} \cdot (q - 1)}$$

---

durch Einbeziehung der hinzutretenden Größen für b bezw. v, und bezw. b und v entsprechend erweitert.

Auf dem seither wiederholt eingeschlagenen Wege der Division des Zählers und des Nenners des rechtsseitig benannten Bruches — im gegebenen Falle durch $q^{v+n} = q^v \cdot q^n$ — erhält man:

$$a = \frac{r \cdot \frac{q^n - 1}{q^v \cdot q^n}}{q - 1} = \frac{\frac{r}{q^v} \cdot \left(1 - \frac{1}{q^n}\right)}{q - 1}$$

Und, wenn man die im Zähler des letztgenannten Bruches vorkommende Größe $1 - \frac{1}{q^n}$ ausschaltet:

$$\left\{\begin{array}{l} a = \frac{r}{q^v \cdot (q - 1)} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a = \frac{r}{1{,}0p^v \cdot 0{,}0p} = \frac{100 \cdot r}{1{,}0p^v \cdot p} \; \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \text{XXXII. a.}$$

Aufgaben 256—258.

Aus dieser Formel folgt dann auch:

$$\left\{\begin{array}{l} r = a \cdot q^v \cdot (q - 1) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r = a \cdot 1{,}0p^v \cdot 0{,}0p = \frac{a \cdot 1{,}0p^v \cdot p}{100} \; \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \text{XXXII. b.}$$

Aufgaben 260 und 261.

bb) Vorschüssige.

Geht man entsprechend der bisherigen Praxis von der Formel XXI. a (S. 153) aus, nach welcher man den Bar- oder Vorwert einer vorschüssigen, aufgeschobenen Zeitrente erhält, und zwar nach dem Ansatze:

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{v+n-1} \cdot (q - 1)},$$

und dividiert man den Zähler und den Nenner in dem vorstehenden Bruche durch $q^{v+n-1} = \frac{q^v \cdot q^n}{q}$, so kommt:

$$a = \frac{r \cdot \frac{q^n - 1}{\frac{q^v \cdot q^n}{q}}}{q - 1} = \frac{\frac{r}{q^{v-1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{q^n}\right)}{q - 1}$$

Nach Ausschaltung der in dem Zähler dieses Bruches enthaltenen Größe $1 - \frac{1}{q^n}$ folgt dann:

$$\left\{\begin{array}{l} a = \frac{r}{q^{v-1} \cdot (q - 1)} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a = \frac{r}{1{,}0p^{v-1} \cdot 0{,}0p} = \frac{100 \cdot r}{1{,}0p^{v-1} \cdot p} \; \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \text{XXXIII. a.}$$

Aufgabe 259.

Ansätze, aus welchen sich ferner ableitet:

$$\left\{\begin{array}{l} r = a \cdot q^{v-1} \cdot (q - 1) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r = a \cdot 1{,}0p^{v-1} \cdot 0{,}0p = \frac{a \cdot 1{,}0p^{v-1} \cdot p}{100} \; \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \text{XXXIII. b.}$$

Aufgabe 262.

Anmerkung. Die gleichen Beweggründe, welche zu einer nur andeutungsweisen Behandlung ewiger Renten, deren Raten je an bestimmten Teilabschnitten eines Jahres fällig sind, geführt haben (vgl. Anmerkung S. 252), treffen auch dann zu, wenn derartige Renten aufgeschobene sind. Vorkommenden Falles würde man daher wiederum auf die Gesichtspunkte zurückzugreifen haben, welche dort der Beachtung empfohlen wurden. Eine wesentliche Richtschnur für die Darlegung des Zusammenhanges bilden übrigens hier auch die Ausführungen über die gleichnamigen Zeitrenten. (Formeln XXII. a und XXIII. a. S. 155 u. 156.)
Es würden somit folgende Formeln in's Auge zu fassen sein:
Wenn die Renten sind:

Nachschüssige:

$$a = \frac{r}{1{,}0p^v \cdot 0{,}0\frac{p}{m}} = \frac{100 \cdot r}{1{,}0p^v \cdot \frac{p}{m}}$$

$$r = a \cdot 1{,}0p^v \cdot 0{,}0\frac{p}{m} = \frac{a \cdot 1{,}0p^v \cdot \frac{p}{m}}{100}$$

Vorschüssige:

$$a = \frac{r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}}{1{,}0p^v \cdot 0{,}0\frac{p}{m}} = \frac{100 \cdot r \cdot 1{,}0\frac{p}{m}}{1{,}0p^v \cdot \frac{p}{m}}$$

$$r = \frac{a \cdot 1{,}0p^v \cdot 0{,}0\frac{p}{m}}{1{,}0\frac{p}{m}} = \frac{a \cdot 1{,}0p^v \cdot \frac{p}{m}}{100 \cdot 1{,}0\frac{p}{m}}$$

d) Aufgeschobene ewige Renten, deren Raten in Zwischenräumen von je mehreren Jahren fällig sind.

aa) Nachschüssige.

Nach dem seither befolgten Verfahren können die betreffenden Ansätze aus der Formel XXIV. a (S. 156), welche den Bar- oder Vorwert einer gleichnamigen Zeitrente ergibt, hergeleitet werden. Dieselbe lautet:

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{v+n} \cdot (q^b - 1)}$$

Werden nun der Zähler und der Nenner des angezeigten Bruches durch $q^{v+n} = q^v \cdot q^n$ dividiert, so erhält man:

$$a = \frac{r \cdot \frac{q^n - 1}{q^v \cdot q^n}}{q^b - 1} = \frac{\frac{r}{q^v} \cdot \left(1 - \frac{1}{q^n}\right)}{q^b - 1}$$

Und nach Ausschaltung der Größe von $1 - \frac{1}{q^n}$:

$$\left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{r}{q^v \cdot (q^b - 1)} \\ a = \dfrac{r}{1{,}0p^v \cdot (1{,}0p^b - 1)} \end{array}\right\} \text{ XXXIV. a.}$$

Aufgabe 263.

Hiernach ergibt sich dann auch:

$$\left\{\begin{array}{l} r = a \cdot q^v \cdot (q^b - 1) \\ r = a \cdot 1{,}0p^v \cdot (1{,}0p^b - 1) \end{array}\right\} \text{ XXXIV. b.}$$

Aufgaben 266 und 267.

bb) Vorschüssige.

In Anlehnung an die Formel XXV. a. (S. 158), welche den Bar- oder Vorwert einer gleichnamigen Zeitrente zum Ausdruck bringt, und lautet:

$$a = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{v+n-b} \cdot (q^b - 1)},$$

hat man, wie seither beobachtet, den Zähler und den Nenner des rechtsseitig aufgeführten Bruches durch $q^{v+n-b} = \frac{q^v \cdot q^n}{q^b}$ zu dividieren. Auf diesem Wege findet man:

$$a = \frac{\dfrac{r \cdot \dfrac{q^n - 1}{\dfrac{q^v \cdot q^n}{q^b}}}{}}{q^b - 1} = \frac{\dfrac{r}{q^{v-b}} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{q^n}\right)}{q^b - 1}$$

Und wenn der in dem Zähler des Bruches enthaltene Faktor $1 - \frac{1}{q^n}$ eliminiert wird:

$$\left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{r}{q^{v-b} \cdot (q^b - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a = \dfrac{r}{1{,}0p^{v-b} \cdot (1{,}0p^b - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$ XXXV. a.

Aufgaben 264 und 265.

Der Betrag einer Rate ermittelt sich aber wiederum auf Grund dieser Formel, nach welcher sich ergibt:

$$\left\{\begin{array}{l} r = a \cdot q^{v-b} \cdot (q^b - 1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r = a \cdot 1{,}0p^{v-b} \cdot (1{,}0p^b - 1) \quad \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$ XXXV. b.

Aufgabe 268.

Sonder-Aufgaben: 269—275.

2. Rechnungs-Aufgaben.

a) Erste Reihe (241—247).

(Anwendung der Formeln XXVIII. a und b und XXIX. a und b.)

Erste Gruppe.

(Gegeben: r und p. Gesucht: a. Anwendung der Formeln XXVIII. a und XXIX. a.:

$$\left\{\begin{array}{l} (\text{Ns}):\ a = \dfrac{r}{0{,}0p} \text{ oder } \dfrac{100 \cdot r}{p} \\ (\text{Vs}):\ a = \dfrac{r \cdot 1{,}0p}{0{,}0p} \text{ oder } \dfrac{100 \cdot r \cdot 1{,}0p}{p} \end{array}\right)$$

241. Einem Landwirt, welcher die Erwerbung eines Gutshofes beabsichtigt, wird das 56 ha umfassende Besitztum G. zum Kaufe angeboten. Eingehende Berechnungen überzeugten ihn, daß auf Grundlage des ortsüblichen Wirtschaftssystems und der innerhalb desselben erzielbaren Durchschnittserträge, allerdings auch mit Berücksichtigung der Eventualität künftiger Verschiebungen in der Marktlage für landwirtschaftliche Erzeugnisse und Bedarfsgegenstände, sowie in der Gestaltung der Arbeitslöhne, ein dauernder Reinertrag aus dem Liegenschaftsvermögen, d. h. eine Grundrente von 95 Mark p. ha, also im ganzen von $95 \times 56 = 5\,320$ Mark mit Sicherheit zu gewärtigen sei. Wie hoch würde sich hiernach der als Maßstab für die Bestimmung des Ankaufspreises dienende

Ertragswert des Gutes belaufen, wenn ein Zinsfuß von $3^1/_2$ Prozent angenommen wird?

A. Es handelt sich hier um eine nachschüssige ewige Rente, deren Raten 5 320 Mark betragen. Der Kapitalwert derselben ist daher nach Formel XXVIII. a:

$$a = \frac{5\,320}{0,035} = \frac{100 \times 5\,320}{3,5} = \mathbf{152\,000} \text{ Mark.}^{1)}$$

Anmerkung. Das vorliegende Beispiel dient zugleich zur Verdeutlichung des oben (S. 251) aufgeführten Satzes, indem es zeigt, daß der Ertrags-Vorwert des Landgutes von 152 000 Mark ein Kapital darstellt, dessen auf $3^1/_2$ Prozent berechneten einfachen jährlichen Zinsen genau dem Betrage der jährlich zu erzielenden Grundrente von 5 320 Mark gleich sind.

Aus der Behandlung dieser Aufgabe ist überdies zu ersehen, daß der Ertragswert des Landgutes bei Anwendung des gleichen Zinsfußes proportional der Größe der Grundrente, aber auch, daß derselbe bei gleicher Grundrente im umgekehrten Verhältnisse zu der Höhe des Zinsfußes steigt und fällt. Würde in unserem Beispiele die gleiche Grundrente mit einem Zinsfuße von 4 Prozent kapitalisiert, so beliefe sich der Ertragswert auf nur $\frac{100}{4} \times 5\,320 = 133\,000$ Mark, dagegen bei Annahme eines Zinsfußes von nur 3 Prozent auf $\frac{100}{3} \times 5\,320 = 177\,333$ Mark. So kann es im Leben geschehen, daß der Ertragswert eines Landgutes bei sinkender Grundrente im Verhältnis zu deren Rückgang noch stärker abnimmt, wenn gleichzeitig der Zinsfuß steigt, indessen ein Fallen des Zinsfußes dem Einflusse sinkender Grundrente entgegenwirkt. Und andererseits kann bei einem Steigen der Grundrente die demselben entsprechende Bewegung der Boden-Ertragswerte aufgehalten oder zurückgeworfen werden, wenn eine Erhöhung des Zinsfußes dazwischentritt.

Landankauf ist — Rentenkauf. Bei einem Abschlusse wird der Erwerber nur dann dauernde ökonomische Sicherstellung erreichen, wenn er in seinen Vorausberechnungen auch den Grad möglicher Verschiebungen in den grundlegenden Größen — Reinertrag (Grundrente) und Zinsfuß, letzteren zugleich mit Rücksicht auf die Zuhilfenahme des Hypothekarkredites — in's Auge faßt.

242. Die Gemeinde B. will eine Weideservitut, mit welcher ein ihr zugehörender Landkomplex belastet ist, mittelst einmaliger Kapitalzahlung ablösen. Nach einer dieserhalb durchgeführten Expertise, welche den Umfang des Weiderechtes nach der zugelassenen Tiergattung, der Höchstzahl des Auftriebes, der zeitlichen Abgrenzung der Weidezeit festzustellen und anknüpfend hieran die naturale Größe und den Geldwert der Nutzung zu veranschlagen hatte, soll ein Jahresertrag von 525 Mark zu Grunde gelegt werden. Mit welcher Barsumme ist die Servitut bei Anwendung eines Zinsfußes von 4 Prozent abzulösen?

---

[1]) Den gleichen Betrag für a erhält man auch durch Multiplikation der Rente r mit dem Quotienten aus der Division von 100 durch p, ein Verfahren, welches indessen nur dann eine Erleichterung gewährt, wenn diese Division eine abgerundete oder überhaupt schlank zu handhabende Zahl ergibt. So z. B. $\frac{100}{2} = 50$; $\frac{100}{2,5} = 40$; $\frac{100}{4} = 25$; $\frac{100}{5} = 20$. — Im gegebenen Falle trifft dieses Verhältnis allerdings nicht zu, da der Quotient von $\frac{100}{3,5} = 28,5714$ ist.

A. Auch in diesem Falle handelt es sich um die Auswertung einer immerwährenden, nachschüssigen Jahresrente. Das Ablösungs-Kapital wird daher betragen:

$$a = \frac{525}{0,04} = \frac{100 \times 525}{4} = \mathbf{13\,125} \text{ Mark.}$$

243. Von einem Forstrevier wurde nachgewiesen, daß sein durchschnittlicher jährlicher Reinertrag sich auf 2 750 Mark beläuft. Welchen Kapitalwert (Bodenerwartungswert) stellt dieser Reinertrag dar, wenn ein Zinsfuß von 3 Prozent anzusetzen ist?

A. Analog den seither behandelten Fällen berechnet man den Kapitalwert also:

$$a = \frac{2\,750}{0,03} = \frac{100 \times 2\,750}{3} = \mathbf{91\,667} \text{ Mark.}$$

244. Behufs Erweiterung des Terrains für ihre baulichen Anlagen hat die Stadtverwaltung H. ein in den Plan fallendes in nur einer Hand befindliches Areal zu erwerben. Der Besitzer der Liegenschaft bezog aus dieser eine durchschnittliche reine Pachtrente von 1824 Mark, welche am Beginne eines jeden Jahres entrichtet wurde. Wenn nun dieser Rentenbezug als eine gleichmäßige und dauernd wiederkehrende Einnahme betrachtet wird: Wie hoch muß sich dann die Entschädigungssumme berechnen, welche der Eigentümer für die Abtretung des Geländes bei Zugrundelegung von 4 Prozent Zinsen zu beanspruchen hat?

A. Da hier eine ewige, vorschüssig eingehende Jahresrente in Frage steht, erhält man deren Jetztwert (nach Formel XXIX. a) also:

$$a = \frac{1\,824 \times 1,04}{0,04} = \frac{100 \times 1\,824 \times 1,04}{4} = \frac{189\,696}{4} = \mathbf{47\,424} \text{ Mark.}$$

Zweite Gruppe.

(Gegeben: a und p. Gesucht: r. Anwendung der Formeln XXVIII. b. und XXIX. b.:

$$\begin{cases} (Ns): r = a \cdot 0{,}0p \text{ oder } \dfrac{a \cdot p}{100} \\[2ex] (Vs): r = \dfrac{a \cdot 0{,}0p}{1{,}0p} \text{ oder: } \dfrac{a \cdot p}{100 \cdot 1{,}0p} \end{cases}$$)

245. Eine Waldkorporation steht im Begriffe, ein ihr zugehörendes, planmäßig bewirtschaftetes Revier an den Fiskus zu veräußern. Bekannt ist, daß dieser die Rente aus der Waldkultur mit $3^1/_4$ Prozent auswerten will. Wenn nun ein Angebot von 35000 Mark erfolgt: Wie hoch ist dann der am Ende eines jeden Jahres durchschnittlich erzielbare Reinertrag eingeschätzt?

A. $r = 35\,000 \times 0{,}0325 = 350 \times 3{,}25 = \mathbf{1137{,}50}$ Mark.

246. Um ein zum Verkauf ausstehendes Landgut gehen zwei Bewerbungen ein. Der Vertreter A. der einen gedenkt mit einem Zinsfuße zu rechnen, welcher die für Hypothekar-Anleihen in Zukunft beanspruchte Höchstgrenze von $3^3/_4$ Prozent voraussichtlich nicht übersteigt,

und bietet daraufhin einen Kaufpreis von 255 000 Mark. Sein kapitalkräftigerer Konkurrent B., welcher jenen Gesichtspunkt ignoriert, will sich unter allen Umständen einen Reinertrag von 4 Prozent sichern und auf Grund dessen nur 242 500 Mark anlegen. Wie hoch ist hiernach der mit Ablauf eines jeden Jahres zu gewärtigende Reinertrag des Landgutes (Grundrente) in beiden Fällen veranschlagt worden?

A. Der Bewerber A. sieht einen Reinertrag voraus von

$$r = 255\,000 \times 0{,}0375 = 2\,550 \times 3{,}75 = \mathbf{9\,562{,}50} \text{ Mark},$$

indessen der Kaufliebhaber B. die Grundrente also berechnet:

$$r = 242\,500 \times 0{,}04 = 2\,425 \times 4 = \mathbf{9\,700{,}00} \text{ Mark.}$$

247. Wieviel betrug eine am Anfange eines jeden Jahres fällige ewige Rente, welche mit der einmaligen Kapitalzahlung von 4435,70 Mark bei Anwendung eines Zinsfußes von $3^1/_2$ Prozent abgelöst wurde?

A. $$r = \frac{4435{,}70 \times 0{,}035}{1{,}035} = \frac{4435{,}70 \times 3{,}5}{103{,}5} = \frac{15\,524{,}95}{103{,}5} = \mathbf{150} \text{ Mark.}$$

b) Zweite Reihe (248—255).

(Anwendung der Formeln XXX. a. und b. und XXXI. a. und b.)

Erste Gruppe.

(Gegeben: r, p und b. Gesucht: a. Anwendung der Formeln XXX. a. und

$$\text{XXXI. a.:} \begin{cases} (\text{Ns}): a = \dfrac{r}{1{,}0p^b - 1} \\ (\text{Vs}): a = \dfrac{r \cdot 1{,}0p^b}{1{,}0p^b - 1} \end{cases}$$

248. Auf einem Landgutsbesitze ruht die Verpflichtung, zur Instanderhaltung öffentlicher Bauanlagen je nach Ablauf von 10 Jahren den Betrag von 1250 Mark zu zahlen. Wie hoch berechnet sich die Summe, welche die Ablösung dieser Last erfordert, wenn ein Zinsfuß von $3^1/_4$ Prozent in Anwendung kommen soll?

A. $$a = \frac{1250}{1{,}0325^{10} - 1}$$

$$\log. 1{,}0325 = 0{,}0138901$$
$$\times 10$$
$$\log. 1{,}0325^{10} = 0{,}1389010$$
$$\text{num. log. } 1{,}0325^{10} = 1{,}3768954$$
$$\text{num. log. } 1{,}0325^{10} - 1 = 0{,}3768954$$

$$\frac{1250}{1{,}0325^{10} - 1} = \frac{1250}{0{,}3768954} = \mathbf{3316{,}57} \text{ Mark.}$$

Mit Hilfe der Tafel I:

$$\frac{1}{0{,}3768954} = 2{,}653256.$$

$$a = \frac{26\,532{,}56}{8} = \mathbf{3316{,}57} \text{ Mark.}$$

249. Es ist der Kapitalwert (Bodenerwartungswert) eines 2 ha umfassenden Nadelholzwaldes zu ermitteln, welcher im 80-jährigen Umtriebe je einen Reinertrag von 11 700 Mark abwirft. Wie lautet die Rechnung, wenn derselben ein Zinsfuß von 3 Prozent zu Grunde gelegt wird?

A.
$$a = \frac{11\,700}{1{,}03^{80} - 1}$$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}03 &= 0{,}0128372 \\ &\times 80 \\ \log. 1{,}03^{80} &= 1{,}0269760 \\ \text{num.}\log. 1{,}03^{80} &= 10{,}6408430 \\ \text{num.}\log. 1{,}03^{80} - 1 &= 9{,}6408430 \end{aligned}$$

$$\frac{11\,700}{1{,}03^{80} - 1} = \frac{11\,700}{9{,}6408430} = \mathbf{1213{,}59} \text{ Mark.}$$

250. Ein 3 ha großes Forstgrundstück liefert nachweislich mit Ablauf von je 25 Jahren einen Reinertrag von 3 500 Mark. Welchen Kapitalwert (Bodenerwartungswert) stellt dasselbe bei Annahme eines Zinsfußes von $3^1/_2$ Prozent dar, und welcher jährlichen Rente würde derselbe bei dem gleichen Zinssatze entsprechen?

A. Der Kapitalwert des Grundstücks berechnet sich also:

$$a = \frac{3\,500}{1{,}035^{25} - 1}$$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}035 &= 0{,}0149403 \\ &\times 25 \\ \log. 1{,}035^{25} &= 0{,}3735075 \\ \text{num.}\log. 1{,}035^{25} &= 2{,}3632381 \\ \text{num.}\log. 1{,}035^{25} - 1 &= 1{,}3632381 \end{aligned}$$

$$\frac{3\,500}{1{,}035^{25} - 1} = \frac{3\,500}{1{,}3632381} = \mathbf{2\,567{,}42} \text{ Mark.}$$

Diese für den Bar- oder Vorwert der Erträge ermittelte Summe ist nach Formel XXVIII. b. gleichwertig dem Betrage einer alljährlich nachschüssig eingehenden Zinsrente von:

$$2\,567{,}42 \times 0{,}035 = \mathbf{89{,}86} \text{ Mark.}$$

Anmerkung. Würde es sich lediglich um eine Auskunft über den zweiten Teil der Frage nach der jährlichen Rente handeln, so ließe sich die Aufgabe durch Aufstellung nur einer Gleichung, und zwar in der Weise lösen, daß man in obiger Formel den Dividendus 3 500 mit 0,035 multipliziert. Es resultiert alsdann:

$$\frac{3\,500 \times 0{,}035}{1{,}035^{25} - 1} = \frac{122{,}50}{1{,}3632381} = \mathbf{89{,}86} \text{ Mark (w. o.).}$$

251. Die Altersversorgungs-Anstalt der Gemeinde R. bezieht von einem Herrschaftsbesitze als Abfindung für frühere Naturalbezüge einen alle 5 Jahre fälligen Beitrag zu ihrem Unterhalt auf Höhe von 1 800 Mark. Der Gutsinhaber will diese Verpflichtung durch eine einmalige Kapitalzahlung ablösen, und zwar zu einem Zeitpunkte, welcher mit der Auszahlung eines Beitrages zusammenfällt. Wenn nun ein Zinsfuß von 3 Prozent angenommen wird: Wie hoch berechnet sich dann die Ablösungssumme?

A. Da im gegebenen Falle die Ablösung an dem Termine für eine Ratenzahlung erfolgen soll, steht eine vorschüssige, aussetzende ewige Rente in Frage. Man hat daher zu rechnen:

$$a = \frac{1\,800 \times 1{,}03^5}{1{,}03^5 - 1}$$

$\log. 1{,}03 = 0{,}0128372$
$\times 5$
$\log. 1{,}03^5 = \mathbf{0{,}0641860}$
$\text{num.}\log. 1{,}03^5 = 1{,}1592738$
$\text{num.}\log. 1{,}03^5 - 1 = 0{,}1592738$
$\log. (1{,}03^5 - 1) = \mathbf{0{,}2021444 - 1}$

$\log. 1\,800 = 3{,}2552725$
$+ \log. 1{,}03^5 = 0{,}0641860$
$3{,}3194585$
$- \log. (1{,}03^5 - 1) = 0{,}2021444 - 1$
$4{,}1173141$
num. $= 13\,101{,}20$
$a =$ **13 101,20** Mark.

252. Ein in 60jährigem Umtriebe bewirtschafteter Nadelholzwald erfordert zur Zeit und dann mit Beginn jeder neuen Umtriebsperiode einen einmaligen Kulturaufwand von 450 Mark. Welchen Bar- oder Vorwert (Jetztwert) stellen alle diese Kosten bei Zugrundelegung eines Zinsfußes von $3^1/_2$ Prozent dar, und einem wie hohen dauernd wiederkehrenden Jahresaufwande würde dieser Barwert entsprechen?

A.
$$a = \frac{450 \times 1{,}035^{60}}{1{,}035^{60} - 1}$$

$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$
$\times 60$
$\log. 1{,}035^{60} = \mathbf{0{,}8964180}$
$\text{num.}\log. 1{,}035^{60} = 7{,}8780354$
$\text{num.}\log. 1{,}035^{60} - 1 = 6{,}8780354$
$\log. (1{,}035^{60} - 1) = \mathbf{0{,}8374644}$

$\log. 450 = 2{,}6532125$
$+ \log. 1{,}035^{60} = 0{,}8964180$
$3{,}5496305$
$- \log. (1{,}035^{60} - 1) = 0{,}8374644$
$2{,}7121661$
num. $= 515{,}43$
$a =$ **515,43** Mark.

In Anwendung der Formel XXVIII. b berechnet sich dann der diesem Kapitalwert entsprechende Jahresaufwand auf:

$515{,}43 \times 0{,}035 =$ **18,04** Mark.

Anmerkung. Auch in diesem Falle würde die Aufgabe, wenn nur der Jahresaufwand in Frage steht, durch Aufstellung einer zusammenfassenden Gleichung zu lösen sein, indem man den Dividendus $450 \times 1{,}035^{60}$ der obigen Formel mit 0,035 multipliziert. Alsdann ergibt sich: $\frac{450 \times 1{,}035^{60} \times 0{,}035}{1{,}035^{60} - 1} = \frac{124{,}082}{6{,}878} =$ **18,04** Mark (w. o.). — Vgl. hierzu die Anmerkung zur Aufgabe 250.

Zweite Gruppe.

(Gegeben: a, p und b. Gesucht: r. Anwendung der Formeln XXX. b und XXXI. b.:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{Ns}): \; r = a \,.\, (1{,}0p^b - 1) \\ (\text{Vs}): \; r = \frac{a \,.\, (1{,}0p^b - 1)}{1{,}0p^b} \end{array} \right)$$

253. Behufs Ablösung der vertragsgemäß übernommenen Verpflichtung, einer Korporation für den Betrieb einer Weidewirtschaft ein diesem dienendes Stallgebäude (Schuppen mit Vorratsräumen) je mit Ablauf von 75 Jahren

neu herstellen zu lassen, hat die Gemeinde S. unmittelbar nach Vollendung eines Baues das Abfindungs-Kapital von 165 Mark, und zwar unter Annahme eines Zinsfußes von 4 Prozent, bar ausbezahlt. Wie hoch ist hiernach der Kostenbetrag je eines Baues veranschlagt worden?

A. $$r = 165 \times (1{,}04^{75} - 1)$$

$$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333 \times 75$$
$$\log. 1{,}04^{75} = 1{,}2774975$$
$$\text{num.}\log. 1{,}04^{75} = 18{,}9451261$$
$$\text{num.}\log. 1{,}04^{75} - 1 = 17{,}9451261$$

$$165 \times (1{,}04^{75} - 1) = 165 \times 17{,}945 = \mathbf{2960{,}92}\ \text{Mark.}$$

Mit Hilfe der Tafel I:

$$r = 165 \times 17{,}9452547 = \mathbf{2\,960{,}96}\ \text{Mark.}$$

254. Ein 15 ha umfassendes Grundstück, welches wegen seiner geringen Bonitätsstufe und seiner exponierten Lage seither nur als Weide diente, lieferte in dieser Benutzungsweise einen jährlichen Reinertrag von 378 Mark. Dem Besitzer wird empfohlen, dasselbe mit Fichten aufforsten zu lassen. Wenn nun für diese Kultur ein 70jähriger Umtrieb in Aussicht genommen wird: Welchen Reinertrag müßte dann die Waldwirtschaft bis zum Ende jeder Umtriebsperiode mindestens abwerfen, wenn derselbe demjenigen aus dem Betrieb der Weide bei einer Zinsforderung von 3 Prozent gleichkommen soll?

A. Der Kapitalwert des Reinertrages von dem Weideland ist nach Formel XXVIII. a.:

$$a = \frac{378}{0{,}03} = \frac{37\,800}{3} = \mathbf{12\,600}\ \text{Mark.}$$

Um auf den gleichen Betrag zu kommen, müßte die Fichtenwaldung bis zum Schlusse von je 70 Jahren liefern:

$$r = 12\,600 \times (1{,}03^{70} - 1)$$

$$\log. 1{,}03 = 0{,}0128372 \times 70$$
$$\log. 1{,}03^{70} = 0{,}8986040$$
$$\text{num.}\log. 1{,}03^{70} = 7{,}9177910$$
$$\text{num.}\log. 1{,}03^{70} - 1 = 6{,}9177910$$

$$12\,600 \times (1{,}03^{70} - 1) = 12\,600 \times 6{,}9178 = \mathbf{87\,164{,}28}\ \text{Mark.}$$

255. Zur Ablösung einer alle 3 Jahre eingehenden ewigen Rente bedurfte es bei Zugrundelegung eines Zinssatzes von $3^1/_2$ Prozent eines Kapitales von 7 500 Mark. Die Abfindung erfolgte an dem Tage, da eine Ratenzahlung fällig war. Auf welchen Betrag belief sich eine Rate dieser Rente?

A. Da die Ablösung zeitlich mit dem Anspruch auf eine Ratenzahlung zusammenfiel, ist der Bezug der Rente als ein vorschüssiger aufzufassen. Man hat daher:

$$r = \frac{7\,500 \times (1{,}035^3 - 1)}{1{,}035^3}$$

$\log. 1,035 = 0,0149403$
$\times 3$
$\log. 1,035^3 = 0,0448209$
$\text{num.} \log. 1,035^3 = 1,1087176$
$\text{num.} \log. 1,035^3 - 1 = 0,1087176$
$\log. (1,035^3 - 1) = 0,0362998 - 1$

$\log. 7\,500 = 3,8750613$
$+ \log. (1,035^3 - 1) = 0,0362998 - 1$
$2,9113611$
$- \log. 1,035^3 = 0,0448209$
$2,8665402$
$\text{num.} = 735,43$
$a = \mathbf{735,43}$ Mark.

c. Dritte Reihe (256—262.)

(Anwendung der Formeln XXXII. a und b und XXXIII a und b.)

Erste Gruppe.

(Gegeben: r, p und v. Gesucht: a. Anwendung der Formeln XXXII. a und XXXIII. a:

$$\begin{cases} (Ns)\colon\ a = \dfrac{r}{1{,}0p^v \cdot 0{,}0p} \text{ oder } \dfrac{100 \cdot r}{1{,}0p^v \cdot p} \\ (Vs)\colon\ a = \dfrac{r}{1{,}0p^{v-1} \cdot 0{,}0p} \text{ oder } \dfrac{100 \cdot r}{1{,}0p^{v-1} \cdot p} \end{cases}$$

256. Es soll eine nachschüssige ewige Jahresrente von 275 Mark, welche zum ersten Male nach 12 Jahren fällig wird, durch eine einmalige Kapitalzahlung bei Anrechnung von $3^3/_4$ Prozent Zinsen abgelöst werden. Wie hoch berechnet sich das hierfür erforderliche Ablösungs-Kapital?

$$a = \frac{275}{1{,}0375^{12} \times 0{,}0375} = \frac{27\,500}{1{,}0375^{12} \times 3{,}75}$$

$\log. 1,0375 = 0,0159881$
$\times 12$
$\log. 1,0375^{12} = 0,1918572$
$\log. 3,75 = 0,5740313$

$\log. 27\,500 = 4,4393327$
$\log. 1,0375^{12} = 0,1918572$
$+ \log. 3,75 = 0,5740313$
$- 0,7658885$
$3,6734442$
$\text{num.} = 4\,714,59$
$a = \mathbf{4\,714,59}$ M.

Mit Hilfe der Tafel II:

$$a = \frac{275}{0{,}0375} \times 0{,}642899 = 7\,333{,}33 \times 0{,}642899 = \mathbf{4\,714{,}59} \text{ Mark.}$$

257. Die Bürgerguts-Korporation zu M. will eine ihr zugehörende Fläche Ödlandes durch Rodung, Drainage und Wege-Anlagen der dauernden Kultur unterwerfen. Die Gemeinde ist bereit, die Bestreitung des Aufwandes in der Weise zu vermitteln, daß sie auf Grund der vorliegenden Pläne und Voranschläge die Kosten der Ausführung der Melioration übernimmt und als Gegenleistung von den Interessenten eine nach 3 Jahren beginnende und mit Ablauf eines jeden Jahres fällige Rente von 405 Mark beansprucht. Frage: Wie hoch würde sich bei Annahme eines Zinsfußes

von 4 Prozent das Kapital berechnen, welches dem Betrage jener Rente gleichwertig ist?

A. $$a = \frac{405}{1{,}04^3 \times 0{,}04} = \frac{40\,500}{1{,}04^3 \times 4}$$

log. 1,04 = 0,0170333
× 3

log. $1{,}04^3$ = 0,0510999
num. log. $1{,}04^3$ = **1.1248637**

$1{,}04^3 \times 4 = 1{,}1248637 \times 4 = 4{,}499455$

$\frac{40\,500}{4{,}499455}$ = **9 001,09** Mark.

258. Ein Wald liefert nach Ablauf von 30 Jahren erstmalig und dann fortdauernd einen jährlichen Reinertrag von 5 045 Mark. Welchem Kapitalwerte (Bodenerwartungswerte) entspricht dieser Reinertrag bei Anrechnung eines Zinsfußes von $3\,^1/_2$ Prozent?

A. $$a = \frac{5\,045}{1{,}035^{30} \times 0{,}035} = \frac{504\,500}{1{,}035^{30} \times 3{,}5}$$

log. 1,035 = 0,0149403
× 30

log. $1{,}035^{30}$ = 0,4482090
num.log. $1{,}035^{30}$ = **2,8067838**

$1{,}035^{30} \times 3{,}5 = 2{,}8067838 \times 3{,}5 = 9{,}82374$

$\frac{504\,500}{9{,}82374}$ = **51 355,18** Mark.

259. Zum Zwecke der Aufforstung einer größeren Fläche Außenfeldes beabsichtigen die beteiligten Besitzer nach Maßgabe der vorliegenden gesetzlichen Bestimmungen eine Waldbau-Genossenschaft zu gründen. Um das Zustandekommen derselben zu fördern, erbietet sich die Gemeinde, den Interessenten die Aufbringung der erstmaligen Kosten für Arrondierung und Aussteinen des Geländes, für Wege-Anlagen und Beschaffung von Pflanzgut in der Weise zu erleichtern, daß sie diese Aufwendungen direkt unter dem vertragsmäßigen Vorbehalte des Bezuges einer Gegenleistung übernimmt, welche in einer erstmalig am Ende des 20sten Jahres einsetzenden und dann je am Jahresbeginn sich wiederholenden dauernden Rente von 400 Mark bestehen soll. Die Teilhaber an dem Unternehmen möchten nun wissen, welche einmalige Kapitalzahlung dieser Rente bei Zugrundelegung eines Zinsfußes von 3 Prozent gleichwertig sein würde. Wie beantwortet sich diese Frage?

A. $$a = \frac{400}{1{,}03^{20-1} \times 0{,}03} = \frac{40\,000}{1{,}03^{20-1} \times 3}$$

log. 1,03 = 0,0128372
× 19

log. $1{,}03^{19}$ = 0,2439068
num. log. $1{,}03^{19}$ = **1,7535040**

$1{,}03^{19} \times 3 = 1{,}753504 \times 3 = 5{,}260512$

$\frac{40\,000}{5{,}260512}$ = **7 603,82** Mark.

Zweite Gruppe.

(Gegeben: a, p und v. Gesucht: r. Anwendung der Formeln XXXII. b und XXXIII. b:

$$\begin{cases} (Ns)\colon\ r = a \,.\, 1{,}0p^{v} \,.\, 0{,}0p \text{ oder: } \dfrac{a \,.\, 1{,}0p^{v} \,.\, p}{100} \\ (Vs)\colon\ r = a \,.\, 1{,}0p^{v-1} \,.\, 0{,}0p \text{ oder: } \dfrac{a \,.\, 1{,}0p^{v-1} \,.\, p}{100} \end{cases}$$
)

260. Zur Förderung ihrer Unterrichtszwecke wird der landwirtschaftlichen Schule zu W. Seitens eines vermögenden Ortsbürgers ein Kapital im Betrage von 25 000 Mark mit dem Vorbehalte gestiftet, daß die Anstalt den Zinsertrag desselben in Form einer immerwährenden, nach Ablauf der ersten 4 Jahre am Schlusse eines jeden Jahres fälligen Rente zu beziehen habe. Wird nun hierbei ein Durchschnittszinsfuß von $4^1/_4$ Prozent angenommen: Wie hoch berechnen sich dann die Raten dieser aufgeschobenen Jahresrente?

A. $r = 25\,000 \times 1{,}0425^4 \times 0{,}0425 = 250 \times 1{,}0425^4 \times 4{,}25$

$$\begin{array}{rl} \log. 1{,}0425 = & 0{,}0180761 \\ & \times 4 \\ \hline \log. 1{,}0425^4 = & \mathbf{0{,}0723044} \\ \log. 4{,}25 = & \mathbf{0{,}6283889} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log. 250 = & 2{,}3979400 \\ + \log. 1{,}0425^4 = & 0{,}0723044 \\ + \log. 4{,}25 = & 0{,}6283889 \\ \hline & 3{,}0986333 \\ \text{num.} = & 1\,254{,}97 \\ r = & \mathbf{1\,254{,}97} \text{ Mark.} \end{array}$$

Mit Hilfe der Tafel I:

$$r = 25\,000 \times 0{,}0425 \times 1{,}1811478 = \frac{5\,019{,}878}{4} = \mathbf{1\,254{,}97} \text{ Mark.}$$

261. An Stelle des zur Ablösung eines Wegerechtes erforderlichen Kapitales von 2 100 Mark will der pflichtige Teil eine dauernde, erstmalig nach 2 Jahren fällige nachschüssige Rente entrichten. Wieviel würden die Raten dieser Rente bei einem Zinsansatze von 4 Prozent betragen?

A. $r = 2\,100 \times 1{,}04^2 \times 0{,}04 = 21 \times 1{,}04^2 \times 4$

$$\begin{array}{rl} \log. 1{,}04 = & 0{,}0170333 \\ & \times 2 \\ \hline \log. 1{,}04^2 = & 0{,}0340666 \\ \text{num. log. } 1{,}04^2 = & \mathbf{1{,}0816} \end{array}$$

$1{,}04^2 \times 4 = 1{,}0816 \times 4 = 4{,}3264$

$21 \times 4{,}3264 = \mathbf{90{,}85}$ Mark.

262. Auf dem Rittergutsbesitz B. lastet die Verpflichtung, einer benachbarten Gemeinde zur Deckung deren Bedarfes für die Verwaltungsgebäude und die Schulhäuser alljährlich eine bestimmte Zahl von Stere Brennholz zu liefern. Als es sich um die Ablösung dieser Reallast handelte, berechnete man das hierfür erforderliche Kapital auf 4 125 Mark. Die Gemeinde möchte aber dem Ersatze dieser Ablösungssumme durch eine immerwährende Jahresrente den Vorzug geben. Wenn sie nun zur Zeit noch über Vorräte und über anderweite geeignete Bezugsquellen verfügt

und dieserhalb eine Verschiebung des Termines für die erste Ratenzahlung um 3 Jahre wünscht: Wie hoch werden sich dann die Raten der Ablösungsrente unter der Voraussetzung belaufen, daß die erste derselben schon am Schlusse des 3ten Jahres fällig wird und ein Zinsfuß von $4\,^1/_2$ Prozent in Anwendung gebracht werden soll?

A. $r = 4\,125 \times 1{,}045^{3-1} \times 0{,}045 = 41{,}25 \times 1{,}045^{3-1} \times 4{,}5$

$$\begin{array}{rl} \log. 1{,}045 = & 0{,}0191163 \\ & \times 2 \\ \hline \log. 1{,}045^2 = & \mathbf{0{,}0382326} \\ \log. 4{,}5 = & \mathbf{0{,}6532125} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log. 41{,}25 = & 1{,}6154240 \\ + \log. 1{,}045^2 = & 0{,}0382326 \\ + \log. 4{,}5 = & 0{,}6532125 \\ \hline & 2{,}3068691 \\ \text{num.} = & 202{,}71 \\ r = & \mathbf{202{,}71}\ \text{Mark.} \end{array}$$

d) Vierte Reihe (263—268).

(Anwendung der Formeln XXXIV. a und b und XXXV. a und b.)

Erste Gruppe.

(Gegeben: r, p, v und b. Gesucht: a. Anwendung der Formeln XXXIV. a

$$\text{und XXXV. a:} \begin{cases} \text{(Ns):}\ a = \dfrac{r}{1{,}0p^v \,.\, (1{,}0p^b - 1)} \\ \text{(Vs):}\ a = \dfrac{r}{1{,}0p^{v-b} \,.\, (1{,}0p^b - 1)} \end{cases} \Bigg)$$

263. Die Gemeinde L. ist gemäß ihrer Anteilnahme an der Herstellung von Entwässerungs-Anlagen, Flußkorrektionen und Uferschutzbauten vertragsrechtlich zur Zahlung einer dauernden Rente verpflichtet worden, deren Raten im Betrage von 675 Mark nach Ablauf einer Fristerstreckung von 5 Jahren am Schlusse jeden 3ten Jahres, also nachschüssig zu entrichten sind. Welche Kapitalsumme ist erforderlich, um diese Rente bei Annahme eines Zinsfußes von $3\,^1/_2$ Prozent abzulösen?

A. $$a = \frac{675}{1{,}035^5 \times (1{,}035^3 - 1)}$$

$$\begin{array}{rl} \log. 1{,}035 = & 0{,}0149403 \\ & \times 5 \\ \hline \log. 1{,}035^5 = & \mathbf{0{,}0747015} \\ \log. 1{,}035^3 = & 0{,}0448209 \\ \text{num.} \log. 1{,}035^3 = & 1{,}1087176 \\ \text{num.} \log. 1{,}035^3 - 1 = & 0{,}1087176 \\ \log. (1{,}035^3 - 1) = & \mathbf{0{,}0362998 - 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log. 675 = & 2{,}8293038 \\ \log. 1{,}035^5 = & 0{,}0747015 \\ + \log. (1{,}035^3 - 1) = & 0{,}0362998 - 1 \\ \hline & - 0{,}1110013 - 1 \\ \hline & 3{,}7183025 \\ \text{num.} = & 5\,227{,}60 \\ a = & \mathbf{5\,227{,}60}\ \text{Mark.} \end{array}$$

Mit Hilfe der Tafeln I und II:

$$a = \frac{675 \times 0{,}8419732}{0{,}1087179} = \frac{568{,}3319}{0{,}1087179} = \mathbf{5\,227{,}60}\ \text{Mark.}$$

Anmerkung. Zu dem gleichen Ergebnisse würde man übrigens auch gelangen, wenn man die Zahlungen als eine um $5 + 3 = 8$ Jahre aufgeschobene und dann vorschüssig zu entrichtende Rente auffaßt. Die Gleichung würde alsdann lauten: $a = \frac{675}{1{,}035^{8-3} \times (1{,}035^3 - 1)}$.

264. Auf einem Dominium ruht die Verpflichtung, das Schulhaus der Dorfgemeinde mit dem Eintritt der Baufälligkeit desselben regelmäßig wieder neu herstellen zu lassen. Nach den vorliegenden Schätzungen ist die Bestandesdauer eines Baues auf 90 Jahre anzunehmen, indessen die Neubaukosten auf p. p. 22 000 Mark veranschlagt sind. Der pflichtige Teil will sich dieser Last zu einem Zeitpunkte, da das vorhandene Gebäude ein Alter von 50 Jahren erreicht hat, durch einmalige Kapitalzahlung entledigen. Wenn nun die Ablösung mit Zugrundelegung eines Zinsfußes von 4 Prozent erfolgen soll: Wieviel wird dann das hierfür erforderliche Kapital betragen müssen?

A.

$$a = \frac{22\,000}{1{,}04^{40-90} \times (1{,}04^{90} - 1)} = \frac{22\,000}{1{,}04^{-50} \times (1{,}04^{90} - 1)} = \frac{22\,000 \times 1{,}04^{50}}{1{,}04^{90} - 1}$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$	$\log. 22\,000 = 4{,}3424227$
$\times 50$	$+ \log. 1{,}04^{50} = 0{,}8516650$
$\log. 1{,}04^{50} = $ **0,8516650**	$5{,}1940877$
$\log. 1{,}04^{90} = 1{,}5329970$	$- \log. (1{,}04^{90} - 1) = 1{,}5200779$
$\text{num. log. } 1{,}04^{90} = 34{,}1190547$	$3{,}6740098$
$\text{num. log. } 1{,}04^{90} - 1 = 33{,}1190547$	$\text{num.} = 4\,720{,}73$
$\log. (1{,}04^{90} - 1) = $ **1,5200779**	$a = $ **4 720,73** Mark.

Anmerkung. Zur Kontrolle können noch folgende 3 Rechnungswege dienen:

1.) Wenn man die Renten auf den rückwärts liegenden Zeitpunkt des Beginnes der Vorperiode, in welche das gegenwärtige Alter des noch benutzten Gebäudes fällt, diskontiert und dann den erhaltenen Betrag (a,) auf die folgenden 50 Jahre prolongiert, so erhält man nach Formel XXX. a:

$$a, = \frac{22\,000}{1{,}04^{90} - 1} = \frac{22\,000}{33{,}119055} = 664{,}27 \text{ Mark.}$$

Nach 50 Jahren beträgt aber der Endwert dieser Summe gemäß der Zinseszinsformel I:

$$a = 664{,}27 \times 1{,}04^{50} = 664{,}27 \times 7{,}10665 = \mathbf{4\,720{,}73} \text{ Mark (w. o.).}$$

Die beiden hier angewendeten Gleichungen lassen sich jedoch, wie leicht ersichtlich, zusammenziehen. Auf diesem Wege resultiert:

$$a = \frac{22\,000 \times 1{,}04^{50}}{1{,}04^{90} - 1} \text{ (w. o.).}$$

2.) Man ermittelt den Vorwert (a,) der dauernd nach je 90 Jahren wiederkehrenden Ratenzahlungen für den Zeitpunkt ihres erstmaligen Bezuges, welcher mit dem Eintritt der Baufälligkeit des vorhandenen, noch 40 Jahre dauernden Gebäudes stattfindet. Diese Zahlungen sind dann sachgemäß als die Raten einer vorschüssigen, je nach 90 Jahren beziehbaren Rente aufzufassen. Wird nun der also gefundene Vorwert weiter auf den 40 Jahre zurückliegenden Zeitpunkt der Bestandes-Aufnahme diskontiert, so findet man den gesuchten Betrag (a) des derzeitigen Wertes. Die Rechnung würde also lauten:

$$a, = \frac{22\,000 \times 1{,}04^{90}}{1{,}04^{90} - 1} \text{ (XXXI. a.)}$$

Das sind aber:

$$a_{,} = \frac{22\,000 \times 34{,}119}{33{,}119} = \frac{750\,618}{33{,}119} = 22\,664{,}27 \text{ Mark.}$$

Hiernach folgt dann auch (II):

$$a = \frac{22\,664{,}27}{1{,}04^{40}} = \frac{22\,664{,}27}{4{,}801} = \mathbf{4\,720{,}73} \text{ Mark (w. o.).}$$

Zieht man schließlich beide Gleichungen zusammen, so hat man:

$$a = \frac{22\,000 \times 1{,}04^{90}}{(1{,}04^{90} - 1) \times 1{,}04^{40}} = \frac{22\,000 \times 1{,}04^{50}}{1{,}04^{90} - 1} \text{ (w. o.).}$$

3.) Zu dem gleichen Ergebnisse würde auch eine Rechnung führen, nach welcher der Vorwert ($a_{,}$) der nach je 90 Jahren wiederkehrenden, um 40 Jahre aufgeschobenen, als nachschüssig zu behandelnden Rente festgestellt und zu dem also gefundenen Betrage der Vorwert (a) der erstmalig nach 40 Jahren fälligen Rate addiert wird. Darnach erhält man (Formel XXXIV. a):

$$a_{,} = \frac{22\,000}{1{,}04^{40} \times (1{,}04^{90} - 1)} = \frac{22\,000}{4{,}801 \times 33{,}119} = \frac{22\,000}{159{,}03} = \ldots \quad 138{,}36 \text{ Mark.}$$

Sodann nach Formel II:

$$a = \frac{22\,000}{1{,}04^{40}} = \frac{22\,000}{4{,}801} = \ldots\ldots\ldots\ldots \; 4\,582{,}37 \;\text{,,}$$

Zusammen: **4 720,73** Mark (w. o.).

Letztere beiden Gleichungen können nun aber auch zusammengefaßt werden, wie nachstehende Ausführung zeigt:

$$\frac{22\,000}{1{,}04^{40} \times (1{,}04^{90} - 1)} + \frac{22\,000}{1{,}04^{40}} = \frac{22\,000 \times \frac{1{,}04^{40} \times (1{,}04^{90} - 1)}{1{,}04^{40}} + 22\,000}{1{,}04^{40} \times (1{,}04^{90} - 1)}$$

$$= \frac{22\,000 \times \left[\frac{1{,}04^{40} \times (1{,}04^{90} - 1)}{1{,}04^{40}} + 1\right]}{1{,}04^{40} \times (1{,}04^{90} - 1)} = \frac{22\,000 \times 1{,}04^{90}}{1{,}04^{40} \times (1{,}04^{90} - 1)}$$

$$= \frac{22\,000 \times 1{,}04^{50}}{1{,}04^{90} - 1} \text{ (w. o.).}$$

265. Welchen Kapitalwert (Bodenerwartungswert) und welche diesem entsprechende Jahresrente repräsentiert ein in 80jährigem Umtriebe bewirtschafteter Hochwald im Bestandesalter von 30 Jahren, wenn derselbe, bezogen auf das Jahr des Abtriebes, regelmäßig einen Reinertrag von 36 000 Mark abwirft und ein Zinsfuß von 3 Prozent angenommen wird?

A. Die Behandlung der Aufgabe kann durchaus analog dem vorausgegangenen Beispiele geschehen. Wird auch hier die Formel XXXV. a. angewendet, so hat man:

$$a = \frac{36\,000}{1{,}03^{50-80} \times (1{,}03^{80} - 1)} = \frac{36\,000}{1{,}03^{-30} \times (1{,}03^{80} - 1)} = \frac{36\,000 \times 1{,}03^{30}}{1{,}03^{80} - 1}$$

$\log. 1{,}03 = 0{,}0128372$
$\times 30$
$\log. 1{,}03^{30} = 0{,}3851160$
$\log. 1{,}03^{80} = 1{,}0269760$
$\text{num.} \log. 1{,}03^{80} = 10{,}6408428$
$\text{num.} \log. 1{,}03^{80} - 1 = 9{,}6408428$
$\log. (1{,}03^{80} - 1) = 0{,}9841150$

$\log. 36\,000 = 4{,}5563025$
$+ \log. 1{,}03^{30} = 0{,}3851160$
$4{,}9414185$
$- \log. (1{,}03^{80} - 1) = 0{,}9841150$
$3{,}9573035$
$\text{num.} = 9\,063{,}66$
$a = \mathbf{9\,063{,}66}$ Mark.

Die dieser Summe gleichwertige Jahresrente beläuft sich auf:

$9\,063{,}66 \times 0{,}03 = \mathbf{271{,}91}$ Mark.

Zweite Gruppe.

(Gegeben: a, p, v und b. Gesucht: r. Anwendung der Formeln XXXIV. b. und XXXV. b.:

$$\begin{cases} (\text{Ns}):\ r = a \,.\, 1{,}0p^{v} \,.\, (1{,}0p^{b} - 1) \\ (\text{Vs}):\ r = a \,.\, 1{,}0p^{v-b} \,.\, (1{,}0p^{b} - 1) \end{cases}$$)

266. Dem Krankenasyl einer Gemeinde wird ein Kapital von 20 000 Mark mit der Bestimmung vermacht, daß dessen Zinserträge der Anstalt in Form einer in gleichen Raten dauernd wiederkehrenden, nach Ablauf der ersten 5 Jahre je am Schlusse von 2 Jahren fälligen Rente zu Gute kommen sollen. Angenommen, daß das Kapital regelmäßig $3^1/_2$ Prozent Zinsen abwirft: Wieviel werden dann die Raten dieser Rente betragen?

A. $r = 20\,000 \times 1{,}035^5 \times (1{,}035^2 - 1)$

$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$
$\times 5$
$\log. 1{,}035^5 = 0{,}0747015$
$\log. 1{,}035^2 = 0{,}0298806$
$\text{num.} \log. 1{,}035^2 = 1{,}0712247$
$\text{num.} \log. 1{,}035^2 - 1 = 0{,}0712247$
$\log. (1{,}035^2 - 1) = 0{,}8526307 - 2$

$\log. 20\,000 = 4{,}3010300$
$+ \log. 1{,}035^5 = 0{,}0747015$
$+ \log. (1{,}035^2 - 1) = 0{,}8526307 - 2$
$3{,}2283622$
$\text{num.} = 1\,691{,}85$
$r = \mathbf{1\,691{,}85}$ Mark.

Mit Hilfe der Tafel I:

$r = 20\,000 \times 1{,}1876863 \times 0{,}071225 = 23\,753{,}726 \times 0{,}071225 = \mathbf{1\,691{,}85}$ M.

267. Wie hoch werden sich die Raten einer ewigen, nach Ablauf von 10 Jahren, und zwar in Zeitabständen von je 5 Jahren nachschüssig fälligen Rente belaufen, wenn dieselbe bei Zugrundelegung eines Zinsfußes von $3^3/_4$ Prozent einer einmalig zu entrichtenden Kapitalsumme von 12 500 Mark gleichwertig sein soll?

A. $r = 12\,500 \times 1{,}0375^{10} \times (1{,}0375^5 - 1)$

$\log. 1{,}0375 = 0{,}0159881$
$\times 10$
$\log. 1{,}0375^{10} = 0{,}1598810$
$\log. 1{,}0375^5 = 0{,}0799405$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^5 = 1{,}2020997$
$\text{num.} \log. 1{,}0375^5 - 1 = 0{,}2020997$
$\log. (1{,}0375^5 - 1) = 0{,}3055657 - 1$

$\log. 12\,500 = 4{,}0969100$
$+ \log. 1{,}0375^{10} = 0{,}1598810$
$+ \log. (1{,}0375^5 - 1) = 0{,}3055657 - 1$
$3{,}5623567$
$\text{num.} = 3\,650{,}54$
$r = \mathbf{3\,650{,}54}$ Mark.

268. Die Ablösung der auf einem Gutsbesitz lastenden Verpflichtung, der Gemeinde je nach Ablauf von 120 Jahren ein Verwaltungsgebäude neu herstellen zu lassen, erforderte bei Annahme eines Zinsfußes von $4^1/_2$ Prozent ein Kapital von 9000 Mark. Wenn nun zur Zeit der Auseinandersetzung auf Grund vorliegender Schätzung unterstellt werden konnte, daß die Baufälligkeit des vorhandenen Gebäudes nach 30 Jahren eintreten würde: Wie hoch sind dann die Kosten eines Neubau's berechnet worden?

A. Da es sich im vorliegenden Falle um eine zum ersten Male nach 30 Jahren und von da an je am Anfange von 120 Jahren fällige Rente handelt, wird die Formel XXXV. b. angewendet werden müssen. Darnach ist:

$$r = 9000 \times 1{,}045^{30-120} \times (1{,}045^{120} - 1) = 9000 \times 1{,}045^{-90} \times (1{,}045^{120} - 1)$$
$$= \frac{9000 \times (1{,}045^{120} - 1)}{1{,}045^{90}}$$

$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$
$\times 120$
$\log. 1{,}045^{120} = 2{,}2939560$
$\text{num.} \log. 1{,}045^{120} = 196{,}7686767$
$\text{num.} \log. 1{,}045^{120} - 1 = 195{,}7686767$
$\log. (1{,}045^{120} - 1) = 2{,}2917432$
$\log. 1{,}045^{90} = 1{,}7204670$

$\log. 9000 = 3{,}9542425$
$+ \log. (1{,}045^{120} - 1) = 2{,}2917432$
$6{,}2459857$
$- \log. 1{,}045^{90} = 1{,}7204670$
$4{,}5255187$
$\text{num.} = 33\,536{,}57$
$r =$ **33 536,57** Mark.

Sonder-Aufgaben.

(269—275.)

Analog dem seither beobachteten Verfahren sollen hier anschlußweise noch einige, der vorstehenden Rubrik angehörende Fälle ins Auge gefaßt werden, deren Behandlung zwar auf nunmehr bekannten Grundlagen ruht, indessen nach Maßgabe der Fragestellung je einen besonderen Aufbau der Rechnung erfordert.

269. Eine mit Ablauf von je 5 Jahren fällige ewige Rente von 600 Mark soll in eine gleichwertige, ebenfalls dauernde nachschüssige Jahresrente umgewandelt werden. Wie hoch werden sich deren Raten bei Annahme eines Zinsfußes von 4 Prozent belaufen müssen?

A. Zur Lösung der vorliegenden Aufgabe gelangt man einfach auf dem Wege der Anknüpfung an zwei bekannte Formeln, nach welchen sich die gleichen Bar- oder Vorwerte (a) einerseits der bestehenden aussetzenden Rente, und andererseits der zu ermittelnden Jahresrente ergeben.

Bezeichnet man den Betrag der aussetzenden Rente mit r, denjenigen der festzustellenden aequivalenten Jahresrente mit r,, so hat man nach Formel XXX. a.:

$$a = \frac{r}{1{,}0p^b - 1}$$

Und nach Formel XXVIII. a.:

$$a = \frac{r_{,}}{0{,}0p}$$

Hieraus folgt dann: $\frac{r_{,}}{0{,}0p} = \frac{r}{1{,}0p^{b} - 1}$ und:

$$r_{,} = \frac{r \cdot 0{,}0p}{1{,}0p^{b} - 1}$$

Schließlich in Anwendung auf den gegebenen Fall:

$$r_{,} = \frac{600 \times 0{,}04}{1{,}04^{5} - 1}$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$ | $600 \times 0{,}04 = 24$

$\times 5$ | $\frac{24}{0{,}21665} = $ **110,78** Mark.

$\log. 1{,}04^{5} = 0{,}0851665$

$\text{num.} \log. 1{,}04^{5} = 1{,}2166523$

$\text{num.} \log. 1{,}04^{5} - 1 = 0{,}2166523$

270. Bei Übernahme eines Landgutes legt sich der Besitzer desselben die Frage vor, mit welchen jährlichen Kosten der Betrieb für alle Zeiten durch die Amortisation des in den Ökonomiegebäuden angelegten Kapitales belastet werde. Die Dauerzeit des Bestandes der Bauten wurde auf 130 Jahre. und der jedesmalige Aufwand für die Neuherstellung derselben auf 60 000 Mark taxiert. Zur Zeit des Gutsantritts ergab die Schätzung, daß die vorhandenen Gebäude nach 45 Jahren baufällig werden. Der anzuwendende Zinsfuß ist 4 Prozent. — Wie hoch berechnet sich hiernach die sog. Neubaurente. d. h. der vom Gutsertrage alljährlich zurückzustellende Betrag der Raten (r), deren Ansammlung regelmäßig das erforderliche Kapital ergibt?

A. Die Frage läuft auf die Aufgabe hinaus, nachzuweisen, welche Summe jährlich aufgewendet werden müßte, um das zu einem Neubau erforderliche Kapital von 60 000 Mark zum ersten Male nach 45 Jahren und von da an dauernd regelmäßig je nach 130 Jahren beziehen zu können. Im Grunde genommen handelt es sich dabei um die Ermittlung einer ewigen Jahresrente (r). welche gleichwertig ist einer ewigen, um 45 Jahre aufgeschobenen, alle 130 Jahre wiederkehrenden Rente ($r_{,}$) von 60 000 Mark. Zieht man hierbei unter Anknüpfung an die Aufgabe 264 die Formel XXXV. a zu Rate, und berücksichtigt man, daß es sich zunächst um die Jahreszinsen eines Grundkapitales, nicht um dieses selbst handelt, man also in den Dividendus jener Formel den Faktor 0,04 einzuschalten hat, so wird die Rechnung lauten:

$$r = \frac{60\,000 \times 0{,}04}{1{,}04^{45-130} \times (1{,}04^{130} - 1)} = \frac{2\,400}{1{,}04^{-85} \times (1{,}04^{130} - 1)} = \frac{2\,400 \times 1{,}04^{85}}{1{,}04^{130} - 1}$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$ | $\log. 2\,400 = 3{,}3802112$

$\times 85$ | $+ \log. 1{,}04^{85} = 1{,}4478305$

$\log. 1{,}04^{85} = \mathbf{1{,}4478305}$ | $4{,}8280417$

$\log. 1{,}04^{130} = 2{,}2143290$ | $- \log. (1{,}04^{130} - 1) = 2{,}2116696$

$\text{num.} \log. 1{,}04^{130} = 163{,}8056985$ | $2{,}6163721$

$\text{num.} \log. 1{,}04^{130} - 1 = 162{,}8056985$ | $\text{num.} = 413{,}40(15)$

$\log. (1{,}04^{130} - 1) = \mathbf{2{,}2116696}$ | $r =$ **413,40** Mark.

Das macht aber von dem Kapitale je eines Neubaues:

$$60\,000 : 413{,}40 = 100 : x; \quad x = 0{,}689 \text{ Prozent.}$$

271. Im Anschlusse an die vorliegende Aufgabe wird weiter die Frage gestellt, welches Grundkapital der dort ermittelten Rente von 413,40 Mark entspricht und wie sich dasselbe einerseits auf die nach 45 Jahren erstmalig, und andererseits auf die nach Ablauf dieser Periode in Zeitabständen von je 130 Jahren erforderlichen Neubaukosten verteilt. Mit diesem Nachweise soll dann eine Kontrolle der obigen Rechnung verbunden werden. Wie verfährt man?

A. Die beiden Glieder des Grundkapitales berechnen sich also:

1.) Das nach 45 Jahren erstmalig aufzuwendende Kapital von 60 000 Mark besitzt, auf die Gegenwart bezogen, nach Formel II einen Vorwert von $\frac{60\,000}{1{,}04^{45}}$ Mark. Nun ist $\log. 1{,}04^{45} = 0{,}7664985$ und $\text{num. log. } 1{,}04^{45} = 5{,}84115$. Somit erhält man:

$$a = \frac{60\,000}{5{,}84115} = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \; 10\,271{,}95 \text{ Mark}$$

2.) Der ebenfalls auf die Gegenwart bezogene Vorwert aller Neubaukosten, welche in späterer Zeit (nach Ablauf jener Periode) je nach 130 Jahren entstehen, beläuft sich nach Formel XXXIV. a auf:

$$a_, = \frac{60\,000}{1{,}04^{45} \times (1{,}04^{130} - 1)}$$

$\log. 1{,}04 = 0{,}0170333$
$\times 45$
$\log. 1{,}04^{45} = 0{,}7664985$
$\log. (1{,}04^{130} - 1) = 2{,}2116696$
(S. S. 271.)

$\log. 60\,000 = 4{,}7781513$
$\log. 1{,}04^{45} = 0{,}7664985$
$+\log. (1{,}04^{130} - 1) = 2{,}2116696$
$-2{,}9781681$
$\overline{1}{,}7999832$
num. $=$ 63,09 „ [1]

Zusammen: **10 335,04** Mark

Entsprechend einer Jahresrente von $10\,335{,}04 \times 0{,}04 = 413{,}40$ Mark (w. o.).

Der Betrag von 10 335,04 Mark würde auch die Kapitalsumme darstellen, welche für die Ablösung einer Baulast gegebenen Umfanges zu beanspruchen wäre.

Was schließlich die Probe auf die Richtigkeit der in Aufgabe 270 vorgeführten Rechnung anbelangt, so ergibt sich Folgendes:

Der Vorwert a muß nach Formel II einem Endwerte entsprechen von:

$$10\,271{,}95 \times 1{,}04^{45} = 10\,271{,}95 \times 5{,}84115 = \mathbf{60\,000} \text{ Mark.}$$

Und ebenso der Vorwert a, nach der Formel XXXIV. b einer Rente (r,) von:

[1]) Prolongiert auf den Abschluß der Vorperiode von 45 Jahren würde das Kapital betragen: $63{,}09 \times 1{,}04^{45} = 368{,}54$ Mark.

$$63{,}09 \times 1{,}04^{45} \times (1{,}04^{130} - 1)$$

log. $1{,}04^{45}$ (w. o.) = **0,7664985**
log. $(1{,}04^{130} - 1)$ (w. o.) = **2,2116696**

log. 63,09 (w. o.) = 1,7999832
+ log. $1{,}04^{45}$ = 0,7664985
— log. $(1{,}04^{130} - 1)$ = 2,2116696
4,7781513
num. = **60 000** Mark.

272. Die Gemeinde M. ist verpflichtet, für alle Zeiten die Kosten des Neu-Aufbaues eines der Gemeinde N. gehörenden Gebäudes, dessen Bestandesdauer auf 120 Jahre veranschlagt wurde, mit dem Betrage von 16 000 Mark zu bestreiten. Sie gedenkt diese Last in der Weise abzulösen, daß sie dem berechtigten Teile statt einer einmalig zu zahlenden Kapitalsumme eine dieser gleichwertige, nachschüssige Jahresrente bis zu dem Zeitpunkte zu entrichten hat, da der nächstfolgende Neubau erforderlich wird. Wenn nun dieser Fall voraussichtlich nach 55 Jahren eintritt und ein Zinsfuß von $4^1/_2$ Prozent in Anrechnung kommen soll: Wieviel wird dann eine Rate der Ablösungsrente betragen?

A. Um dieser Aufgabe beizukommen, bedarf es zunächst der Ermittlung des Ablösungs-Kapitales (a) der dauernd wiederkehrenden Baukosten. Dasselbe berechnet sich genau nach dem Verfahren in Aufgabe 264 unter Benutzung der Formel XXXV. a. also:

$$a = \frac{16\,000}{1{,}045^{55-120} \times (1{,}045^{120} - 1)} = \frac{16\,000 \times 1{,}045^{65}}{1{,}045^{120} - 1}$$

log. 1,045 = 0,0191163
× 65
log. $1{,}045^{65}$ = **1,2425595**
log. $1{,}045^{120}$ = 2,2939560
num. log. $1{,}045^{120}$ = 196,7686767
num. log. $1{,}045^{120} - 1$ = 195,7686767
log. $(1{,}045^{120} - 1)$ = **2,2917432**

log. 16 000 = 4,2041200
+ log. $1{,}045^{65}$ = 1,2425595
5,4466795
— log. $(1{,}045^{120} - 1)$ = 2,2917432
3,1549363
num. = 1 428,68(4)
a = **1 428,68** Mark.

Mit Hilfe der Tafel I:

$$a = \frac{16\,000 \times 17{,}4807024}{(1{,}045^{100} \times 1{,}045^{20}) - 1} = \frac{279\,691{,}2384}{195{,}76817} = \mathbf{1\,428{,}68} \text{ Mark.}$$

Um nun die diesem Ablösungs-Kapital entsprechende, 55 Jahre lang zu zahlende Tilgungsrente zu finden, hat man auf die Formel XII. b. zurückzugreifen. Man erhält dann:

$$r = \frac{1\,428{,}684 \times 1{,}045^{55} \times 0{,}045}{1{,}045^{55} - 1}$$

$$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163 \times 55$$
$$\log. 1{,}045^{55} = 1{,}0513965$$
$$\text{num.} \log. 1{,}045^{55} = 11{,}2563208$$
$$\text{num.} \log. 1{,}045^{55} - 1 = 10{,}2563208$$
$$\log. (1{,}045^{55} - 1) = 1{,}0109915$$
$$\log. 0{,}045 = 0{,}6532125 - 2$$

$$\log. 1428{,}684 = 3{,}1549363 \text{ (w. o.)}$$
$$+ \log. 1{,}045^{55} = 1{,}0513965$$
$$+ \log. 0{,}045 = 0{,}6532125 - 2$$
$$2{,}8595453$$
$$- \log. (1{,}045^{55} - 1) = 1{,}0109915$$
$$1{,}8485538$$
$$\text{num.} = 70{,}55(9)$$
$$r = \mathbf{70{,}56} \text{ Mark.}$$

Anmerkung. Auch in dem vorliegenden Falle ließe sich übrigens die Rechnung durch eine Zusammenfassung der beiden Gleichungen abkürzen. Setzt man nämlich in die letztere Gleichung an Stelle der in den Dividendus aufgenommenen Größe a den für diese in der oberen Gleichung enthaltenen Zahlenausdruck, so kommt:

$$r = \frac{\dfrac{16\,000 \times 1{,}045^{65} \times 1{,}045^{55} \times 0{,}045}{1{,}045^{120} - 1}}{1{,}045^{55} - 1}$$

$$= \frac{\dfrac{16\,000 \times 1{,}045^{120} \times 0{,}045}{1{,}045^{120} - 1}}{1{,}045^{55} - 1}$$

$$= \frac{16\,000 \times 1{,}045^{120} \times 0{,}045}{(1{,}045^{120} - 1) \times (1{,}045^{55} - 1)}$$

Unter Benutzung der oben angegebenen logarithmischen Werte ergibt sich somit:

$$\log. 16\,000 = 4{,}2041200$$
$$+ \log. 1{,}045^{120} = 2{,}2939560$$
$$+ \log. 0{,}045 = 0{,}6532125 - 2$$
$$5{,}1512885$$
$$\log. (1{,}045^{120} - 1) = 2{,}2917432$$
$$+ \log. (1{,}045^{55} - 1) = 1{,}0109915$$
$$- 3{,}3027347$$
$$1{,}8485538$$
$$\text{num.} = 70{,}559$$
$$r = 70{,}56 \text{ Mark (w. o.).}$$

273. Es liegt das Projekt der Herstellung einer Bewässerungs-Anlage für eine 9,8 ha umfassende Talwiese vor. Auf Grund eines von ihm entworfenen Planes veranschlagt der Techniker die erst- und einmaligen Kosten des Unternehmens also:

Bachregulierung, Erd- und Rasenarbeiten . .	3160 Mark,
Bau von Wehren und Schleusen	2106 „
Zusammen:	5266 Mark.

Zur dauernden Instanderhaltung der Anlage mußten folgende Ausgaben vorgesehen werden:

Für Überwachung des Werkes, Betrieb der Bewässerung, Aufräumung und Ausbesserung der Gräben, Abgleichung von eintretenden Unebenheiten der Rieselfläche, Verlegung von Bewässerungsrinnen, kleinere Reparaturen an den Stauvorrichtungen usw.; p. Jahr: 210 Mark.

Für eingreifende, je nach 12 Jahren erforderliche Ausbesserungen an Wehren und Schleusen, berechnet auf einen Durchschnittsbetrag von

50 Prozent des zugehörigen, in der Neubeschaffung angelegten Kapitales von 2 106 Mark = 1 053 Mark.[1])

Die Durchführung des Unternehmens erstreckt sich über einen Zeitraum von 3 Jahren, auf welche sich der Kostenaufwand für die Anlage verteilt. Die hierdurch entstehenden Beeinträchtigungen in der regelmäßigen Benutzung der Wiesenfläche würden eine Kürzung in dem Bezuge der Bodenrente und mehrfache Störungen im Wirtschaftsbetriebe zur Folge haben, welche, so kalkuliert man, insgesamt einer jährlichen Einbuße von 775 Mark entsprechen. Von dem Kapitale der Anlage und der laufenden Betriebskosten wird ein Zinsfuß von 4 Prozent verlangt. — Seither erzielte man von dem Wiesland im Mittel der Jahre p. ha 35 Kztr. lufttrocknen Futters, dessen Wert nach Maßgabe der Ergebnisse öffentlicher Versteigerungen von auf dem Halme stehender Ernten durchschnittlich zu 3,25 Mark p. Kztr. angesetzt werden kann.[2])

Frage: Wie hoch müßte sich unter diesen Voraussetzungen die durch Herstellung der Bewässerungsanlage zu gewärtigende Ertragssteigerung der Wiese im Ganzen und p. ha mindestens belaufen, wenn das Unternehmen rentieren soll?

A. Die Lösung der Aufgabe erfordert vorerst eine Feststellung aller Vorwerte der Herstellungs- und Instanderhaltungskosten der Anlage, und der indirekten Opfer, welche diese verursacht. Dieselben berechnen sich wie folgt:

1. Von dem einmaligen Aufwande entfallen auf jedes der drei ersten Jahre: $\frac{5266}{3} =$ . . . . 1 755,33 Mark.

   Dazu die jährlichen Einbußen während des gleichen Zeitraumes . . . . 775,00 „

   Zusammen: 2 530,33 Mark.

   Der Vorwert derselben ist (Formel II):

$$2\,530{,}33 + \frac{2\,530{,}33}{1{,}04} + \frac{2\,530{,}33}{1{,}04^2}$$
$$= 2\,530{,}33 \times \left(1 + \frac{1}{1{,}04} + \frac{1}{1{,}04^2}\right)$$
$$= 2\,530{,}33 \times (1 + 0{,}9615 + 0{,}9246)$$
$$= 2\,530{,}33 \times 2{,}8861 =$$ . . . . 7 302,77 Mark.

2. Von den jährlich wiederkehrenden Kosten der Pflege der Kunstwiese im Betrage von 210 Mark.

Zu übertragen: 7 302,77 Mark.

[1]) Eine dem Barwerte dieser Ausgaben annähernd gleiche Summe würde man auch erhalten, wenn man von der Annahme ausgeht, daß die Stauvorrichtungen je nach 20 Jahren total erneuert werden müßten. (1 752,08 — s. u. — und 1 768,09 M.)

[2]) In diesem Ansatze ist der um den Betrag der Erntekosten verminderte Verkehrswert des Futters ausgedrückt. — Von demselben wurde überdies ein auf die Futtereinheit entfallender, vom Besitzer zu übernehmender Anteil an dem allgemeinen Wirtschaftsaufwande in Abzug gebracht.

Übertrag: 7 302,77 Mark.

Dieselben repräsentieren nach Formel XXVIII. a.

einen Kapitalwert von: $\frac{210}{0,04} = \frac{21\,000}{4} =$ . . . 5 250,00 „

3. Schließlich berechnet sich der Vorwert der je nach 12 Jahren aufzuwendenden Kosten für größere Reparaturen an den Stauvorrichtungen nach Formel XXX. a.

auf: $\frac{1053}{1,04^{12} - 1} = \frac{1053}{0,601} =$ . . . . 1 752,08 „

Summa: 14 304,85 Mark.

Diesem Betrage entspricht nun eine d a u e r n d e Jahresrente (XXVIII. b.) von:

$$14\,304,85 \times 0,04 = \frac{14\,304,85 \times 4}{100} = 572,19 \text{ oder rund } \mathbf{572} \text{ Mark.}$$

Die Anforderungen des Kapitales müßten also schon aufgewogen werden durch eine Steigerung des Ertrages um $\frac{572}{3,25} = 176$, und p. ha um rund 18 Kztr. lufttrocknen Futters (Heu und Grummet).

Mit einem derart abschließenden Ergebnisse wäre auch eine Steigerung der Grundrente und des Bodenwertes um 572 bezw. 14 304 Mark nachgewiesen.

A n m e r k u n g. Greift jedoch der Erfolg des Unternehmens über jene Untergrenze hinaus, so kommt in demselben ein Überschuß-Ertrag zum Ausdruck, welcher eine adäquate Erhöhung des Zinsgenusses von den angelegten Werten, und insofern einen Unternehmergewinn bedeutet, zugleich aber auch als Maßstab für eine w e i t e r e Steigerung der Grundrente und des Bodenwertes aufgefaßt werden kann.

274. Die Besitzer von drei aneinander grenzenden Landgütern haben gemeinschaftlich eine deren Betrieben dienende Feldeisenbahn angelegt. Das Unternehmen umfaßte die Einrichtung einer festen, sog. Stammbahn und zum Anschluß an diese die Beschaffung einer transportablen (zerlegbaren) Bahn. Die Kosten, welche dasselbe verursachte, betrugen im Ganzen 42 080 Mark, von welchen entfielen:

Auf die Herstellung der Geleise — bei der Stammbahn mit Einschluß des Unterbau's —	25 900 Mark
Auf die Wagen, komplett ausgestattet, und die Körbe	16 180 „
Summa:	42 080 Mark.

Erfahrungsgemäß wird nun eine Neuanschaffung der Geleise je nach 25, und des Rollmateriales je nach 12 Jahren erforderlich, indessen der jährliche Reparaturaufwand durchschnittlich für jene auf 1 Prozent, für dieses auf $2^1/_2$ Prozent berechnet werden kann.

F r a g e n: Wie ermittelt man auf dieser Grundlage und bei Annahme eines Zinsfußes von $4^1/_2$ Prozent den Betrag des Kapitales, dessen es bedarf, um die Bahn zugleich f ü r a l l e Z e i t zu erneuern und zu unterhalten? — Welchem dauernden Jahresaufwande ist derselbe hiernach gleichwertig? — Wenn die Gutsbesitzer die aus der Benutzung der Bahn für den Transport von Rüben, Fabrik-Futterabfällen, Stalldünger, Mergel, Torf usw. erzielbaren Vorteile, bestehend in der Ersparung an Zeit, an

Gespannkraft und an Handarbeit, schätzungsweise auf 6850 Mark p. Jahr berechnen:[1]) Wie hoch beläuft sich dann der jährliche Überschuß-Ertrag des Unternehmens? — Nach wieviel Jahren wird sich das für alle gegenwärtigen und künftigen Kosten der Neubeschaffung und Instanderhaltung der Bahn erforderliche Kapital durch deren Netto-Erträge bei Anrechnung eines Zinsfußes von wiederum $4^1/_2$ Prozent heimbezahlt haben?

A. Die Aufgabe ist analog der vorhergehenden (273) zu behandeln, indem man die Vorwerte von vier, als ewige Renten zu betrachtenden Anlagen festzustellen hat. Darnach ergibt sich:

1. Die vorschüssig zu bestreitenden Kosten der je nach 25 Jahren erforderlichen Neubeschaffung der Geleise (XXXI. a.)

$$a = \frac{25\,900 \times 1{,}045^{25}}{1{,}045^{25} - 1}$$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}045 &= 0{,}0191163 \\ &\times 25 \\ \log. 1{,}045^{25} &= \mathbf{0{,}4779075} \\ \text{num. log. } 1{,}045^{25} &= 3{,}0054360 \\ \text{num. log. } 1{,}045^{25} - 1 &= 2{,}0054360 \\ \log. (1{,}045^{25} - 1) &= \mathbf{0{,}3022088} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. 25\,900 &= 4{,}4132998 \\ + \log. 1{,}045^{25} &= 0{,}4779075 \\ &\ 4{,}8912073 \\ - \log. (1{,}045^{25} - 1) &= 0{,}3022088 \\ &\ 4{,}5889985 \\ \text{num.} &= 38\,814{,}90 \end{aligned}$$

a = . . . 38 814,90 Mark.

2. Die vorschüssig zu bestreitenden Kosten der je nach 12 Jahren notwendigen Neuanschaffung der Wagen und Körbe (XXXI. a.):

$$a_{,} = \frac{16\,180 \times 1{,}045^{12}}{1{,}045^{12} - 1}$$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}045 &= 0{,}0191163 \\ &\times 12 \\ \log. 1{,}045^{12} &= \mathbf{0{,}2293956} \\ \text{num. log. } 1{,}045^{12} &= 1{,}6958820 \\ \text{num. log. } 1{,}045^{12} - 1 &= 0{,}6958820 \\ \log. (1{,}045^{12} - 1) &= \mathbf{0{,}8425356 - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. 16\,180 &= 4{,}2089785 \\ + \log. 1{,}045^{12} &= 0{,}2293956 \\ &\ 4{,}4383741 \\ - \log. (1{,}045^{12} - 1) &= 0{,}8425356 - 1 \\ &\ 4{,}5958385 \\ \text{num.} &= 39\,431{,}06 \end{aligned}$$

a, = ... 39 431,06 „

3. Die nachschüssig aufzubringenden Kosten für Reparaturen an den Geleisen (XXVIII. a.):

$$a_{,,} = \frac{100 \times 259}{4{,}5} = \frac{25\,900}{4{,}5} = \frac{51\,800}{9} = \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5\,755{,}55 \ „$$

4. Die nachschüssig aufzuwendenden Kosten für Reparaturen an dem Rollmaterial (XXVIII. a.):

$$a_{,,,} = \frac{100 \times (161{,}8 \times 2{,}5)}{4{,}5} = \frac{100 \times 404{,}5}{4{,}5} = \frac{40\,450}{4{,}5} = \frac{80\,900}{9} = \quad 8\,988{,}88 \ „$$

Summa der Kapital-Vorwerte: **92 990,39** Mark.

[1]) Zu jenen Erfolgen gehört übrigens noch der allerdings sehr erhebliche, aber nicht bezifferbare Vorteil, daß die Anwendung der Feldeisenbahn es ermöglicht, die Schädigungen zu vermeiden oder doch bedeutend einzuschränken, welche sonst bei dem Eintritte regnerischer Witterung durch das Zerfahren des Bodens entstehen.

Diesem Kapitale entspricht aber ein dauernder Jahresaufwand von:

$$929{,}9039 \times 4{,}5 = \mathbf{4\,184{,}57} \text{ Mark.}$$

Der dauernd wiederkehrende jährliche Gewinn-Überschuß, welchen die Anlage liefert, beträgt hiernach rund:

$$6\,850 - 4\,185 = \mathbf{2\,665} \text{ Mark.}$$

Die letzte der aufgeworfenen Fragen beantwortet sich in Anwendung der Formel XII c, (analog dem Verfahren in Aufgabe 141) wie folgt:

$$n = \frac{\log.\left(\frac{92\,990{,}39 \times 0{,}045}{2\,665{,}43} + 1\right)}{\log. 1{,}045}$$

$$92\,990{,}39 \times 0{,}045 = 929{,}9039 \times 4{,}5 = 4\,184{,}57$$

$$\frac{4\,184{,}57}{2\,665{,}43} = 1{,}56994$$

$$+ 1 = 2{,}56994$$

$$\log. 2{,}56994 = 0{,}4099230$$

$$\log. 1{,}045 = 0{,}0191163$$

$$n = \frac{4099230}{191163} = 21{,}44, \text{ oder rund } \mathbf{21}{,}5 \text{ Jahre.}$$

Stellt man sich also vor, daß die realisierten Überschuß-Erträge regelmäßig zur Bildung eines Fonds angesammelt würden, so müßten dieselben innerhalb 22 Jahren samt Zinseszinsen bis auf den Betrag der für alle Zeit erforderlichen Kosten der Erneuerung und Instanderhaltung der Bahn anwachsen und nach Ablauf dieser Frist als dauernd jährlich wiederkehrende Unternehmergewinne zu betrachten sein.

Anmerkung. Das hier in Rede stehende Verhältnis kann übrigens auch in dem Sinne aufgefaßt werden, daß die Brutto-Ergebnisse (= Zins- und Überschuß-Ertrag) von 6 850 Mark zur Verzinsung und Amortisation des gesamten, zur dauernden Beschaffung und Instanderhaltung der Anlage erforderlichen Kapitales dienen soll. Alsdann hat man aber die Tilgungsformel XII. c. heranzuziehen, welche zu dem Ansatze führt:

$$n = \frac{\log. 6\,850 - \log. [6\,850 - (92\,990{,}39 \times 0{,}045)]}{\log. 1{,}045}$$

Die weitere rechnerische Behandlung ergibt dann ebenfalls 21,44 oder rund **21**,5 Jahre.

275. Ein Gutsbesitzer beabsichtigt, mehrere Einfamilien-Wohnhäuser für ständige Arbeiter herstellen zu lassen. Auf Grund der vorliegenden Pläne ist der Aufwand für jeden Neubau — ohne Einrechnung des Wertes des zugehörigen Baugrundes — auf 3 320 Mark und die Dauerzeit des Bestandes eines Hauses auf 100 Jahre veranschlagt worden. Der Gutsherr will auch die Reparaturkosten der Bauten übernehmen und hierfür eine jährliche Ausgabe von $^1/_2$ Prozent, außerdem aber für eingreifendere Ausbesserungen einen nach je 10 Jahren erforderlichen Betrag von $2^1/_2$ Prozent, und schließlich eine Jahresprämie für Feuerversicherung von $^1/_4$ Prozent des Neubau-Kapitales vorsehen. Welchen Jetztwert würden alle diese dauernd wiederkehrenden Aufwendungen für jedes Wohnhaus bei Annahme eines Zinsfußes von $3^1/_2$ Prozent repräsentieren? Und wenn der also ermittelten Summe noch der Schätzungswert des von jeder Wohnstätte be-

anspruchten Baugrundes nebst zugehörigem offenem Terrain mit 52 Mark zugefügt wird: Welcher Jahresrente würde das Gesamt-Kapital — den nämlichen Zinsfuß vorausgesetzt — gleichwertig sein?

A. Es stehen hier die Vorwerte von vier, als ewige Renten aufzufassenden, nach der Größe ihrer Raten und nach der Ausdehnung ihrer Fälligkeitsfristen verschiedenen Anlagen in Frage. Demgemäß gestaltet sich die Summierung derselben, wie folgt:

1. Vorschüssig zu bestreitende Kosten der je nach 100 Jahren auszuführenden Neubauten (XXXI. a.):

$$a = \frac{3\,320 \times 1{,}035^{100}}{1{,}035^{100} - 1}$$

$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$
$\times 100$
$\log. 1{,}035^{100} = \mathbf{1{,}4940300}$
$\text{num. log. } 1{,}035^{100} = 31{,}1910500$
$\text{num.log.} 1{,}035^{100} - 1 = 30{,}1910500$
$\log. (1{,}035^{100} - 1) = \mathbf{1{,}4798782}$

$\log. 3\,320 = 3{,}5211381$
$+ \log. 1{,}035^{100} = 1{,}4940300$
$5{,}0151681$
$- \log. (1{,}035^{100} - 1) = 1{,}4798782$
$3{,}5352899$
$\text{num.} = 3\,429{,}966$

$a = \ldots\ldots\ 3\,429{,}97$ Mark.

2. Nachschüssig zu leistende jährliche Ausgaben für Reparaturen (XXVIII. a.):

$$a_{,} = \frac{100 \times (33{,}2 \times 0{,}50)}{3{,}5} = \frac{100 \times 16{,}60}{3{,}5} = \frac{1\,660}{3{,}5} = \ldots\ 474{,}29 \text{ ,,}$$

3. Nachschüssig aufzuwendende Kosten für die je nach 10 Jahren erforderlichen Reparaturen (XXX. a.):

$$a_{,,} = \frac{33{,}20 \times 2{,}50}{1{,}035^{10} - 1} = \frac{83{,}00}{1{,}035^{10} - 1}$$

$\log. 1{,}035 = 0{,}0149403$
$\times 10$
$\log. 1{,}035^{10} = 0{,}1494030$
$\text{num. log. } 1{,}035^{10} = 1{,}4105971$
$\text{num.log.} 1{,}035^{10} - 1 = 0{,}4105971$
$\log. (1{,}035^{10} - 1) = \mathbf{0{,}6134159 - 1}$

$\log. 83{,}00 = 1{,}9190781$
$- \log. (1{,}035^{10} - 1) = 0{,}6134159 - 1$
$2{,}3056622$
$\text{num.} = 202{,}146$

$a_{,,} = \ldots\ldots\ 202{,}15$,,

4. Vorschüssig fällige Jahresprämie für Feuerversicherung (XXIX. a.):

$$a_{,,,} = \frac{100 \times (33{,}2 \times 0{,}25) \times 1{,}035}{3{,}5} = \frac{100 \times 8{,}30 \times 1{,}035}{3{,}5}$$

$$= \frac{859{,}05}{3{,}5} = \ldots\ldots\ 245{,}44 \text{ ,,}$$

Summa der Kapital-Vorwerte: **4 351,85** Mark.

Diesem Betrage, zuzüglich des in dem Bauterrain angelegten Kapitales, zusammen: $4\,351{,}85 + 52{,}00 = 4\,403{,}85$ Mark, ist aber nach Formel XXVIII. b. gleichwertig eine ewige Jahresrente von:

$$4\,403{,}85 \times 0{,}035 = \mathbf{154{,}13} \text{ Mark.}$$

Anmerkungen:

I. Die Bedeutung der vorliegenden Ergebnisse ist zu kennzeichnen, wie folgt:

1. Würde es sich um die Stiftung eines Kapitales handeln, dessen Betrag gerade hinreicht, um die alle 100 Jahre wiederkehrenden Kosten des Wiederaufbaues eines Einfamilien-Wohnhauses gegebener Einrichtung, aber auch sämtliche zum Unterhalt desselben erforderlichen Aufwendungen für alle Zeit zu bestreiten, so ist — bei dem angenommenen Zinsfuße — die Größe des Grundkapitales gleich dem oben berechneten Betrage von 4 351,85 Mark.

2. Wenn eine Reallast bestände, nach welcher der pflichtige Teil alle jene Kosten, mit Ausnahme der Versicherungsprämie, für immer zu tragen hat, so würde das Ablösungskapital dann, wenn die Zeit der Abfindung mit dem Erfordernis eines Neubau's zusammenfällt, betragen: 4 351,85 — 245,44 = 4 106,41 Mark.

3. Übernimmt der Gutsbesitzer, wie oben vorausgesetzt, die Kosten der Herstellung der Bauten auf eigenem Grund und Boden, sowie diejenigen des Unterhalts derselben, so ist für jedes Wohnhaus ein Grundkapital von 4 403,85 Mark erforderlich, um aus dessen Erträgen bei dem angegebenen Zinsfuß jenen Aufwand und überdies die Grundrente von dem Bauterrain für alle Zukunft zu bestreiten.

4. Die von dem Grundkapital zu gewärtigende Jahresrente im Betrage von 154,13 Mark entspricht dem Mietbetrage, welcher von jeder Hausstelle unter der Voraussetzung zu beziehen ist, daß der Besitzer alle laufenden Kosten des Unterhalts und der Versicherung übernimmt.

II. Wie sich das in vorstehendem Beispiele behandelte Projekt im Gesichtspunkte der Gründung von Besitzesstellen für Landarbeiter (Kolonisation) unter bestimmten Bedingungen (Ausstattung auch mit Kulturland, Anzahlung und Schulden-Amortisation) gestalten würde, kann aus der Aufgabe 128 ersehen werden.

Vierter Abschnitt.

Spezial-Aufgaben aus dem Betriebe der Obst- und der Forstkultur.

A. Allgemeines.

In dem Betriebe des Obst- und des Waldbau's prägt sich bekanntlich die Eigenart aus, daß derselbe auf Anlagen langfristiger Dauer beruht, aus welchen bei fortgesetzter Pflege der Bestände periodisch wiederkehrende bezw. zeitlich aussetzende oder aufgeschobene Erträge hervorgehen. Dieser Verfassung entspricht das Bedürfnis, der Behandlung von wirtschaftlichen Fragen und Aufgaben, welche in ihrem Bereiche auftauchen, das Verfahren der Rentenrechnung dienstbar zu machen. — Zwischen jenen beiden Arten der Bodenbewirtschaftung besteht im Grundprinzip allerdings eine gewisse Übereinstimmung. Dieselben unterscheiden sich aber doch sowohl durch die Form, als insbesondere auch durch die zeitliche Verteilung ihrer Erträge.

Während seiner ganzen Nutzungsdauer liefert der Obstbaum laufende, wenn auch von jährlichen Schwankungen betroffene, aber doch in der Jugendperiode allmählich steigende, dann zur Zeit der vollen Entwicklung gleichmäßiger sich wiederholende, auf der vorgerückten Altersstufe indessen fortschreitend abnehmende Erträge an Früchten, welche seinen Hauptnutzen bilden, indessen mit Abschluß seiner Lebensjahre der Ertrag an Holz als End- und zugleich Nebennutzen verbleibt. In der Forstkultur zeigt sich dagegen ein anderes Bild. Es handelt sich hier — abgesehen von den für gewisse Besitzverhältnisse allerdings nicht unwesentlichen Nebennutzungen an Weide und Streu — im Allgemeinen nur um die Erträge an Holz, welche im Bereiche der Durchführung bestimmter Wirtschaftssysteme und bezogen auf das Verhalten jeder einzelnen Anlage (Gesamtfläche bezw. Schläge):

Entweder (Hochwald) während der Bestandesdauer des Waldes periodisch je nach einer Reihe von Jahren in Form von Vor- oder Zwischennutzungen (Durchforstungserträgen), dann aber mit Ablauf der Umtriebszeit in Form einer einmaligen, abschließenden, den ganzen Bestand umfassenden Hauptnutzung,

oder (Niederwald) je nach einem kürzeren Turnus vollinhaltlich,

oder (Mittelwald) in zeitlich verschieden gedehnten Fristen aus dem Unterholz und den Oberständern eingehen.

Neben diesen, in gewissem Sinne typischen Gestaltungen kommen übrigens noch Forstbetriebs-Einrichtungen vor, welche je nach den auf ihre Kennzeichnung angewendeten Kriterien als Zwischenstufen oder als Abarten aufgefaßt werden können. Dahin gehören z. B. der Plenter- oder Femel-, der Eichenschälwald- (Hackwald-) und der Waldfeldbau-Betrieb.

Wendet man nun auf die Reinerträge der Obst- und der Forstkultur den Geldwert-Maßstab an, so erscheinen dieselben als Rentenbezüge, welche je nach bestimmten Zeitabschnitten fällig werden, daher denn auch deren Werte auf dem Wege der Rentenrechnung in jedem Gesichtspunkte faßbar sind.

B. Obstkultur.[1]

1. Berechnung des Wertes von Obstbäumen.

a) Obstbäume, welche bereits im Tragbarkeitsalter stehen.

α) Allgemeine Gesichtspunkte. Der in der Überschrift gegebenen Andeutung gemäß soll in Nachfolgendem gezeigt werden, wie der Zeitwert von Obstbäumen auf Grundlage ihres Ertrages, also der Ertragswert derselben zu berechnen ist. Hierbei wird es sich jedoch nur um den nach Abzug aller Betriebskosten verbleibenden reinen Ertrag, und daher um den aus diesem sich ergebenden Reinertragswert handeln können.

Aufgaben dieser Art kommen im Leben häufig vor. So im Zusammenhange mit Eigentumswechsel am Grund und Boden, sei es auf dem Wege des Verkaufes oder der Erbauseinandersetzung, sei es in Folge von Landabtretungen bei Güterzusammenlegungen oder von Expropriationen für öffentliche Zwecke (Straßen-, Eisenbahn-, Kanal- und Dammbauten, Flußregulierungen usw.). Aber auch im internen Betriebe der Landwirtschaft tauchen sie auf, wie namentlich bei Vermögens-Aufnahmen (Inventarisation).

Nach Anordnung und Aufbau deckt sich das hier in Kürze angedeutete Verfahren nicht mit demjenigen der Ermittlung der Rentabilitätsstellung der Obstkultur.

---

[1]) In der rechnerischen Behandlung der nachfolgenden Aufgaben über die Obstkultur hat sich der Verfasser, wie hier besonders hervorgehoben werden soll, zu dem Standpunkte einer eingehenderen Darlegung bekannt, wenngleich er gefaßt darauf war, daß diese den Vertretern der Praxis in mehrfacher Hinsicht kompliziert, und ihre Anwendung daher umständlich erscheinen mag. Die hier dargebotene Anleitung will aber grundsätzlich den Richtlinien nachgehen, welche zu einer möglichst exakten Ermittlung der wirtschaftlichen Erfolge des Obstbau's führen; sie will auf diese Weise dazu beitragen, daß in den Kreisen, welche besonderes Interesse für den Gegenstand äußern, der innere Zusammenhang der maßgebenden Momente allseitig klar erkannt und durchdacht werde. Wenn sie somit einer schematischen Auffassung der Verhältnisse keine Konzessionen macht, gibt sie es doch dem ausübenden Fachmann anheim, je nach den gegebenen Anforderungen die eingeschlagenen Wege abzukürzen, eventuell die Einzeloperationen zu vereinfachen oder durch taxatorische Beihilfen zu ersetzen. In jedem Falle dürfte aber die vorgeführte Methode geeignet sein, der Eröffnung zuverlässiger Gesichtspunkte und der Kontrolle anderweitiger Verfahrungsweisen zu dienen.

Zur Orientierung hierüber werden zwei anschlußweise (Aufgaben 287 und 288) vorgeführte Beispiele dienen.

Betrachtet man die von einem Obstbaum während seiner Lebensdauer zu gewärtigenden Netto-Erlöse im Bilde einer gegebenen, wie immer erworbenen Zeitrente, so ist sofort ersichtlich, daß die für eine Vor- oder Barwerts-Berechnung grundlegenden Ertragsverhältnisse desselben nicht in entfernt gleichem Grade der Sicherheit und Genauigkeit zahlenmäßig erfaßt werden können, wie diejenigen eines regelmäßigen Bezuges von bedungenen Einnahmen.

Die Obstbäume sind der Kultur unterworfene Lebewesen, an sich schon sehr verschieden in ihren Nutzungseigenschaften nach Art und Varietät (Sorte). Bekanntlich treten aber auch noch innerhalb der Zugehörigkeit zu dem enger umschriebenen Typus überall recht bedeutende Ungleichheiten in dem Gange ihrer Entwicklung auf, welche, abgesehen von morphologisch begründeten individuellen Ablenkungen im Jungwuchse, unter dem Einflusse der Standortsbedingungen (Klima, Lage, Boden), der auf die Pflanzungen angewendeten Maßregeln der Erziehung und fortgesetzten pfleglichen Behandlung und der örtlich und zeitlich mannigfach wechselnden äußeren Faktoren, von welchen ihr Gesundheitszustand abhängt, entstehen. — Neben der also bedingten, so zu sagen von Fall zu Fall ausgeprägten Abstufung auch der Fruchtbarkeit gleicher Sorte geht nun noch die Erfahrung einher, daß die Erträge der Obstbäume sich keineswegs zeitlich gleichmäßig wiederholen und daß, ob sie auch in deren einzelnen Lebensabschnitten im allgemeinen je bestimmten Höhenlinien folgen, auch ertragsarme und ertraglose Zwischenjahre unterlaufen.

Zieht man dies alles in Erwägung, so erkennt man, welche Schwierigkeiten mit der Erfüllung der Aufgabe verbunden sind, vorkommenden Falles auch dann, wenn das Alter eines Obstbaumes bekannt ist, dessen noch ausstehende Lebensdauer zu veranschlagen, ferner aber wenigstens annähernd die Zahl und die naturale Größe der Ernten festzustellen, welche derselbe von einem bestimmten Zeitpunkte an bis zu seinem Ableben zu liefern vermag, nicht zu gedenken der Zweifel, welche sich aufdrängen, wenn es sich darum handelt, auf den Betrag der Ernten einen für eine längere Reihe kommender Jahre zutreffenden Preismaßstab anzuwenden. Im Übrigen bleibt auch zu beachten, daß die Berechnung des Geld-Reinertrages den Abzug des direkten und indirekten Jahresaufwandes für die Obstkultur, dieserhalb also noch besondere Informationen erfordert. — Gleichwohl darf nicht übersehen werden, daß sich dem prüfenden Fachmanne doch auch zuweilen die Gelegenheit darbietet, auf buchhalterische Aufzeichnungen über die Erträge des der Örtlichkeit angehörenden Obstbau's zurückzugreifen und die also eruierten Tatsachen im gegebenen Falle als Vergleichsmaßstab heranzuziehen. Und wenn sich die Ermittlung auf eine größere Zahl von Obstbäumen zu erstrecken hat, wird es ihm auch unbenommen bleiben, der Erleichterung willen eine Einteilung der Objekte in Klassen je gleicher oder annähernd gleicher Ertragsstufe zu treffen und dann diejenigen jeder Gruppe auf Grund des ihnen zukommenden Einheitssatzes summarisch zu bewerten.

So sehr nun anerkannt werden muß, daß derartige, im Wesentlichen doch nur auf dem Wege der Abschätzung (Taxation) vorzunehmende Erhebungen, sollen sie überhaupt eine brauchbare konkrete Unterlage für einen Nachweis des Reinertragswertes der Obstbäume bilden, hohe Grade von Sachkenntnis und Erfahrung, aber auch von Sorgfalt und Gewissenhaftigkeit voraussetzen, so ist doch ebenso verständlich und unbestreitbar, daß ohne sie von einer planmäßigen rechnerischen Behandlung der Aufgabe absolut keine Rede sein kann. Wert-Taxationen, welche auf ein solches Verfahren verzichten und an seiner Stelle unter Bezugnahme auf äußere Einzelmerkmale der Obstbäume auf „En bloc"-Wertgrößen hinsteuern, geben von vornherein den Gedanken einer überzeugenden sachlichen Begründung des Urteils völlig preis, und wo man ihnen auf dem einen oder anderen der seither in Vorschlag gebrachten Wege huldigt, folgt man bewußt oder unbewußt einer von subjektivem Empfinden diktierten Schablone. — Also: Die Schätzung, so weitgehenden Anforderungen sie auch zu genügen hat, ist unerläßlich; sie bleibt aber auf den zu erwartenden Geld-Reinertrag der Obstbäume beschränkt. Alles weitere ist eben Gegenstand der Rechnung.

In den Kreisen der Anhänger dieses allein berechtigten Standpunktes, welcher konsequent an der Benutzung des zu veranschlagenden Reinertrages als Unterlage für die Werts-Ermittlung der Obstbäume festhalten will, sind nun seither Verfahrungs-

weisen hierfür in Vorschlag gebracht worden, welche allerdings die Kritik nicht bestehen. Eine bloße Zusammenfassung der laufenden Reinerträge, wie auch eine Diskontierung derselben nach dem Maßstabe der einfachen Zinsen entsprechen mit nichten dem tatsächlichen Verlaufe der Bewegung der eingehenden Reinertragswerte; beide Rechnungsarten führen zu unrichtigen Ergebnissen; ihre Anwendung ist daher entschieden zu widerraten. Und in noch weit höherem Grade gilt das von der hier und da empfohlenen und auch gehandhabten Methode der einfachen Kapitalisierung der laufenden Reinerträge, einer Praxis, welche entstellt, weil sie von der falschen Voraussetzung ausgeht, daß diesen die Eigenschaft „ewiger" Renten innewohnt, und welche sich schon durch die Beantwortung der Frage richtet, wo denn schließlich das reinertragspendende Kapital des Obstbaumes bei dessen Ableben zu suchen sei. — Den oben bereits angedeuteten Gesichtspunkten gemäß gibt es in der Tat nur einen unanfechtbaren und grundsätzlich anzuerkennenden Weg zur Lösung des Problems. Es ist derjenige der Anwendung der Zeitrenten- und bezw. der Zinseszinsrechnung.

Dieser vom Verfasser in's Auge gefaßte Rechnungsgang, zu welchem derselbe sich schon seit Jahrzehnten bekannt und welchen er auch in einer seiner früheren Arbeiten unter Heranziehung einiger Zahlenbeispiele der Beachtung empfohlen hat,[1]) soll in den nachfolgenden Aufgaben eingehender behandelt werden.

β) Ermittlung des Reinertrages.

αα) Die naturale Grösse der Ernten. Die nächstliegende Aufgabe besteht in der Veranschlagung der Lebens- und Fruchtbarkeitsdauer, welche für den Baum — ganz unabhängig von der Entwicklungsstufe, auf welcher er sich zur Zeit der Taxation befindet — überhaupt in Betracht gezogen werden soll. Sodann hat man sich ein Bild von der Zeitdauer je der drei Perioden des Tragbarkeitsalters zu entwerfen, in welchen die allmählich zunehmenden, dann die gleichmäßigeren und höchsten, und schließlich die allmählich sinkenden Erträge zu erwarten sind. Kennt man nun die Zahl der Ertragsjahre, welche der Baum bereits zurückgelegt hat, oder bestimmt man sie auf dem Wege der Schätzung, so bildet ihr Endpunkt die Grenze, jenseits welcher die künftigen, in Berechnung zu ziehenden Ernten liegen. Hinsichtlich der Taxation der Größe dieser Erträge ist an der bereits erwähnten Erfahrung festzuhalten, daß dieselben fast ausnahmslos nicht etwa nur in einzelnen Jahren gänzlich aussetzen, sondern auch in den Jahren ihres Erscheinens noch sehr verschieden ausfallen. Ein diesem Verhältnisse angemessener brauchbarer Maßstab wird aber zu gewinnen sein, wenn unter Anknüpfung an Beobachtungen in der betreffenden Örtlichkeit zunächst die Zahl der Ernte- und der Fehljahre, und dann die gegenseitige Abstufung der Größe der eingehenden Jahreserträge für je den gleichen Zeitraum von 10 Jahren zahlenmäßig eingeschätzt wird. In diesem Sinne, wenn auch nicht mit Rücksicht auf die hier in Betracht zu ziehende Form der Wertberechnung, sind übrigens seither schon Beobachtungen, so z. B. von Föhlisch und Müller, gesammelt worden.[2])

In Anwendung auf die schwebende Aufgabe würde diese Praxis der Veranschlagung sich gestalten, wie folgt:

Man sucht das Ertragsverhältnis des Baumes in erster Linie für die Dauerzeit der mittleren Periode der Tragbarkeit zu bestimmen, und zwar für den Abschnitt je eines Jahrzehntes: Zahl der Ernten; Verteilung derselben auf die 4 Stufen sehr guter, guter, mittelmäßiger und geringer, oder aber auf die 3 Stufen sehr guter, mittlerer und geringer Erträge; Größe der Höchst- bezw. der sehr guten Ernte in Kilo; Abminderung dieser Größe für die tiefer stehenden Ernten um je einen Bruchteil ($^1/_4$ bezw. $^1/_3$), welcher der Zahl der Ertragsklassen entspricht; Zusammenfassung der Ergebnisse; Berechnung einer Durchschnittslinie mittelst Division durch die gesamte Zahl der Jahre (10).

[1]) „Die Grundlagen und Einrichtungen des landwirtschaftlichen Betriebes", im Handbuch der gesamten Landwirtschaft von Th. v. d. Goltz. 1890. Band I. S. 249—250.

[2]) Nach einer Angabe in der Schrift: „Der Garten-Taxator", von H. Gaerdt. Berlin 1885. S. 210—217.

Für die erste Periode der Tragbarkeit berechnet sich dann der Durchschnittsertrag nach dem Verlaufe einer allmählichen Steigerung vom Beginne der Tragbarkeit bis zum Durchschnittsertrage der mittleren Periode, und zwar mit Reduktion des letzteren um eine Abstufung (1/4 bezw. 1/3); dies unter der im allgemeinen wohl berechtigten Voraussetzung, daß derselbe kaum jemals erreicht werden dürfte.

Hinsichtlich der letzten Periode ist zu erwägen, daß in derselben allerdings nicht selten Erträge auftauchen, welche dem Durchschnitt der mittleren Periode gleichkommen. Es sei dabei an die gar nicht so vereinzelten Fälle erinnert, daß auf weit vorgerückter Altersstufe stehende Bäume noch kurz vor ihrem Ableben eine ungewöhnlich hohe Ernte liefern. Somit empfiehlt es sich, auch für diese Periode von jenem Durchschnittsertrage auszugehen und dieselbe im übrigen analog dem Verfahren für die erste Periode mit Erhöhung um eine Abstufung (1/4 bezw. 1/3) zu behandeln.

Fällt der Zeitpunkt für die Wertberechnung zwischen die Endpunkte der ersten oder der letzten Periode, so hat man einfach die zugehörigen proportionalen Größen einzusetzen.

Für die hier skizzierte Art der Behandlung der Aufgabe darf beansprucht werden, daß sie zutreffendere Ergebnisse liefert, als ein Verfahren, welches den Durchschnitt der während der ganzen in Betracht zu ziehenden Zeitdauer der Tragbarkeit des Baumes zu erwartenden Ernten schätzungsweise in einem mittleren, je nach gleichen zeitlichen Zwischenräumen beziehbaren Betrag zum Ausdruck bringt, wobei indessen auch noch in Betracht zu ziehen ist, daß die Zeitwerte des Reinertrages, zu welchen eine hierauf gegründete Berechnung führt, je nach der — übrigens kaum regelmäßig zutreffenden — Voraussicht, daß dieser am Beginne oder am Schlusse des Zwischenzeitraumes eintritt, somit als eine vor- oder eine nachschüssige Rente erscheint, noch verschieden ausfallen müssen, und zwar um so mehr, je weiter die Erntebezüge zeitlich voneinander getrennt sind.

Der Schlußstein der Nutzungen besteht in dem Ertrage des abständigen Baumes an Holz (Stamm, Äste, Reisig), bemessen nach dem Rauminhalte in Festmetern.

ββ) **Der Geldwert der Ernten.** Sind die naturalen Erträge bekannt, so wird es sich vor Allem um die Frage der Bewertung derselben handeln. Unter auch nur einigermaßen entwickelten wirtschaftlichen Verhältnissen bildet das frische Obst jeder Art einen Gegenstand des Handelsverkehrs. Für die vorliegende Aufgabe kann daher in der Regel nur der Verkaufswert oder der Marktpreis, und zwar zunächst bezogen auf die Absatzstelle, in Betracht kommen. Selbstverständlich hat man behufs Ermittlung desselben vorab je nach der Obstsorte, der Art der Verwendung, welcher die Früchte dienen, nach der Reifezeit und Haltbarkeit, sowie der Art der Zurichtung derselben für den Markt, u. a. m. von verschiedenen Qualitäts-Kategorien auszugehen. Der hervortretend wichtigste Teil des Verfahrens besteht dann in der Berechnung eines Durchschnittspreises für eine längere Reihe von Jahren. Hierzu bedarf es eines Rückgriffs auf verläßliche Aufzeichnungen, aus welchen insbesondere auch der Einfluß erkennbar wird, welchen die gerade der Obstkultur eigentümlichen bedeutenden Schwankungen der jährlichen Erträge auf die Bewegung der Preise ausüben.

γγ) **Die Betriebskosten.** Hier ist zwischen direkten und indirekten Aufwendungen zu unterscheiden.

Die direkt zu bestreitenden Kosten umfassen alle Ausgaben, welche die fortgesetzte Pflege des im Ertrage stehenden Baumes, sowie der Vollzug der Ernte und schließlich die Ausbeute an Holz erfordern. — Sie bestehen vorzugsweise in Arbeitslohn, dann aber auch in Kosten der Beschaffung von Hilfsmaterialien. Hinsichtlich des von dem Obstbau beanspruchten Arbeitsaufwandes ist übrigens daran zu erinnern, daß derselbe sich auch unter sonst gleichen Verhältnissen doch noch je nach der Besitzesgröße, welcher der Betrieb angehört, verschieden gestaltet, weil insbesondere der Kleinbegüterte, welcher selbst oder mit seinen Angehörigen die laufenden Geschäfte besorgt, diese in Rücksicht auf ihre zeitliche Verteilung als sog. Füllarbeiten betrachtet und, weil sie mit einem doch einmal zu unterhaltenden Grundstock von Kräften verrichtet werden, relativ niedriger in Ansatz bringt. Dazu kommt aber auch, daß gerade in diesen Besitzesstufen das während der Nutzungsdauer der Obstbäume zu beziehende Abfallholz als eine Nebeneinnahme

gewertet wird, welche einen, wenn auch nur bescheidenen Anteil der Arbeitskosten aufwiegt.

Die indirekten Kosten repräsentieren die Opfer in der Landnutzung und berechnen sich wiederum verschieden je nachdem der Obstkultur der Grund und Boden ausschließlich gewidmet, oder aber mit ihr eine Unternutzung desselben verbunden wird. Im einen Falle ist der Obstwuchs außer mit den laufenden direkten Kosten der Bodenbearbeitung und Düngung selbstverständlich auch mit der Grundrente aus der von ihm beanspruchten Bodenfläche, im anderen Falle mit der durch ihn verursachten Einbuße an dem Ertrage des Unternutzens zu belasten.

In Rücksicht auf seine allgemeinere Bedeutung für die Landwirtschaft soll in den nachfolgenden Aufgaben nur das letztere Vorkommen, die Verbindung der Obstbaum- mit der Unterkultur, in's Auge gefaßt werden.

Von den gegenseitigen wirtschaftlichen Beziehungen, welche zwischen diesen beiden Kulturarten aus deren Verknüpfung entstehen, gewinnt man aber ein einfaches und zutreffendes Bild, wenn man die Unterkultur als einen selbständigen Betriebszweig auffaßt, welcher sämtliche für seine Durchführung erforderlichen direkten und indirekten Aufwendungen wie im Sonderanbau übernimmt, und dann dem im Übrigen getrennt zu behandelnden Obstbau die Mitbenutzung aller Ertragsquellen gegen eine angemessene Entschädigung für die durch ihn herbeigeführten Einbußen an der Unterkultur einräumt.

$\delta\delta$) **Der Reinertrag des Obstbaumes.** Behufs Ermittlung des Ertrags-Überschusses hat man daran festzuhalten, daß die laufenden Aufwendungen hinsichtlich ihrer zeitlichen Verteilung mit den Brutto-Erträgen in Parallele zu stellen, also wie diese für jede Periode auf ihren Durchschnitt zu berechnen sind. Soweit die Kosten der Baumpflege und der Betrag der anteiligen Grundrente bezw. der Schädigungen an der Unterkultur in Betracht kommen, welche ausnahmslos unabhängig vom Obstertrage Jahr um Jahr wiederkehren, ergibt sich jenes Verhältnis von selbst, und ist für Wahrnehmung desselben nur noch zu beachten, daß die Einbußen am Unterwuchs in der ersten Periode in Folge der geringeren Entwicklung der Baumkrone niedriger eingeschätzt werden müssen. Im Übrigen hindert nichts, den Aufwand, welchen die Ernte, die Zurichtung des Obstes für den Verkauf und der Transport desselben nach der Abgabestelle erheischen, da derselbe sich annähernd proportional der Größe des Ertrages beziffert, nach Maßgabe eines erfahrungsgemäß bestimmten Einheitssatzes vorweg von dem Brutto-Erlöse in Abzug zu bringen. Das Gleiche gilt für die Kosten der Gewinnung des Holzes.

γ) **Die Diskontierung des Reinertrags.** Dieselbe bildet die Schlußrechnung, deren Aufgabe es ist, den Kapitalwert nachzuweisen, welcher den künftigen, innerhalb der ganzen Reihe der noch ausstehenden Jahre der Tragbarkeit des Baumes zu erwartenden Reinerträgen an dem für die Ermittlung gegebenen Zeitpunkt entspricht. (Zeitwert.) Damit ist zugleich ausgedrückt, daß das Verhältnis der jeweiligen Stufe des Tragbarkeitsalters zu der noch zu gewärtigenden Lebensdauer des Baumes die Abgrenzung der in Rechnung zu ziehenden Ertragsjahre nicht beeinflussen darf.[1])

[1]) In ihrer sehr beachtenswerten Schrift: „Anleitung für die Wert- und Rentabilitätsberechnung der Obstkulturen," Berlin 1905, vertreten Professor Dr. Christ und Obergärtner E. Junge (S. 25–26) eine von diesem Standpunkte abweichende Auffassung, indem sie die Weisung erteilen, für einen tragbaren Baum, welcher die Hälfte seines voraussichtlichen Höchstalters bereits überschritten hat, die Reinerträge in Rechnung zu stellen, welche er voraussichtlich bis zu seinem natürlichen Tode noch gebracht haben würde, dagegen für einen tragbaren Baum, welcher die Hälfte seines voraussichtlichen Höchstalters noch nicht erreicht hat, die Reinerträge von so vielen zukünftigen Jahren in Rechnung zu stellen, welche nötig sind, um einen ebensolchen Baum wieder heranzuziehen oder m. a. W.: als der Baum selbst alt ist. Zur Rechtfertigung dieses Verfahrens wird a. a. O. angeführt, daß das Risiko bei einem Obstbaume um so größer sei, als der Baum Lebens-

Da das Ergebnis wesentlich von der Höhe des anzuwendenden Zinsfußes abhängt, bedarf es in jedem Falle einer sorgfältigen Abwägung der Bestimmungsgründe, welche für dessen Ansatz entscheidend sein müssen.

Hierbei kommt in erster Linie in Betracht, daß entsprechend dem Verhalten des Obstbaum-Kapitales, welches doch ein der Beständigkeit entbehrendes Produkt organischen Aufbau's darstellt, kein niedrigerer Zinsfuß in Frage kommen kann, als derjenige, welcher unter den gegebenen örtlichen Bedingungen durchschnittlich für Faustpfand- oder Bürgschafts-Darlehen berechnet zu werden pflegt, daß also die Benutzung eines Maßstabes, welcher für immobile Dauer-Anlagen, so insbesondere Grund und Boden, Meliorationen usw., zutreffend erachtet wird, unzulässig ist. Bekanntlich ist nun aber das in Obstbäumen angelegte Kapital an sich auch mit der Gefahr unvorhergesehener vorzeitiger, teilweiser oder gänzlicher Wert-Einbußen belastet, welche in Folge von Erkrankungen und durch äußere Schädigungen, so insbesondere durch elementare Begebenheiten (Winterkälte, Schneedruck, Sturm, Blitzschlag) entstehen können. Analog dem Verfahren, welches nach den Grundsätzen der landwirtschaftlichen Betriebslehre für die Feststellung der Nutzungsansprüche beispielsweise vom Vieh- und vom Werkzeug-Kapital in Würdigung des mit deren Anwendung verbundenen (von einer Versicherung ausgeschlossenen) Risiko's gehandhabt wird, ist somit auch der Zinsansatz für das Obstbaum-Kapital um einen die Deckung gegen Verlustgefahr bezeichnenden Anteil zu erhöhen. Von der Wahrnehmung dieses Verhältnisses bleibt selbstverständlich die Aufgabe des Taxators, im gegebenen Falle den Einfluß zu veranschlagen, welche die einem Obstbaume anhaftenden Mängel und Gebrechen auf dessen Lebensdauer und Ertragsvermögen ausüben, unberührt.[1])

---

jahre vor sich habe. — Dem Vorschlage kann jedoch nicht beigepflichtet werden, und zwar aus folgenden Gründen:

Der empfohlene Weg ist unvereinbar mit dem Prinzip der Rentenrechnung. Der Bar- und Vorwert eines Obstbaumes repräsentiert unter allen Umständen ein Kapital, welchem die künftigen Reinerträge, als Renten aufgefaßt, gleichwertig sein müssen. Kürzt man die Zeitdauer des Rentenlaufs, so hebt man diese Gleichwertigkeit auf. — Auch kann die Befürchtung, daß der Wert eines tragbaren jungen Baumes bei Heranziehung sämtlicher noch ausstehender Erntejahre unverhältnismäßig hoch ausfallen werde, nur unter der Voraussetzung zutreffend sein, daß eben dem geringeren Ertragsvermögen in der ersten oder der Vor-Periode nicht Rechnung getragen wird, ein Fall, welchem die oben vorgeschlagene, übrigens keineswegs zu erschwerenden Umständlichkeiten führende getrennte Behandlung der Ertragsperioden begegnet. Will man sich aber zu dieser Praxis nicht bekennen und ein dann entstehendes Mißverhältnis durch Reduktion der Zahl der anzunehmenden Ertragsjahre ausgleichen, so fragt es sich immer noch, wo die Grenzen liegen, bis zu welcher diese Einschränkung reichen soll. Das Verhältnis des Alters, welches der junge Baum bereits zurückgelegt hat, zu der voraussichtlichen Zeitdauer seiner Tragbarkeit überhaupt (etwa die Hälfte) bildet hierfür keinen zuverlässigen Maßstab. Was aber den motivierenden Hinweis auf das größere Risiko betrifft, mit welchem der eben in das Ertragsalter eintretende Baum belastet ist, so erscheint es doch einfacher und auch richtiger, dasselbe in einer entsprechenden Erhöhung des Zinsfußes zum Ausdruck zu bringen.

In den angeschlossenen Rechnungsbeispielen soll über dieses Verhältnis noch zahlenmäßig näherer Aufschluß gegeben werden.

[1]) An dem hier angedeuteten Verfahren muß insbesondere aus dem Grunde festgehalten werden, weil der zahlenmäßige Zuschlag einer Versicherungsprämie zum Zinssatze zugleich eine bestimmte Vorstellung von der Größe der Verlustgefahr zum Ausdruck bringt. Dem gegenüber kann allerdings der seither wiederholt in Anregung gebrachten und empfohlenen Praxis, dem Risiko, welches mit der dem Obstbaume drohenden Gefahr verbunden ist, durch Abzug gewisser Prozente von dessen höchstem Lebensalter Rechnung zu tragen, eine Berechtigung um so weniger zuerkannt werden, als es ihr an jedem greifbaren Leitmotive fehlt.

Ein Beispiel mag das erläutern: Von einem Obstbaume, welcher noch 35 Lebensjahre vor sich hat, wird durchschnittlich p. Jahr ein Reinertrag von 6 Mark er-

Hinsichtlich der Rechnungspraxis bleibt es schließlich noch freigestellt, entweder den Zeitwert der Reinerträge jeder Periode direkt zu ermitteln, oder aber vorerst deren Endwert (bezogen auf den Zeitpunkt des Ablebens des Baumes) zu bestimmen und denselben dann auf die Gegenwart zu diskontieren. Letzterer Weg dürfte in manchen Fällen den Vorteil einer Abkürzung des Verfahrens gewähren.

Zur weiteren Orientierung über die Anwendung der hier (unter β. $\alpha\alpha$—$\delta\delta$ und γ) aufgeführten Leitsätze dienen die angeschlossenen Rechnungsbeispiele, in deren Behandlung übrigens immer noch dem in Rücksicht auf die Eigenart der in Betracht kommenden Verhältnisse zulässigen und gerechtfertigten Verlangen nach einer auf Erleichterung abzielenden Vereinfachung tunlichst nachgegeben wurde.

Um die also signalisierte Bahn der Wertsermittlung gangbarer zu machen, wird es sich empfehlen, in jedem Falle die angeschlossenen Hilfstafeln heranzuziehen, ein Verfahren, welches hier insbesondere aus dem Grunde angebracht ist, weil im Bereiche der einschlägigen Aufgaben ohne jedes Bedenken eine auf Vereinfachung der auszuführenden Multiplikationen und Divisionen abzielende Kürzung der betreffenden Bruchbenennungen bis auf 4 bezw. 3 Dezimalstellen vorgenommen werden kann.

(Auf den gleichen Erwägungen beruht übrigens auch die Art der rechnerischen Behandlung der im Schluß-Abschnitte folgenden Beispiele aus der Forstkultur.)

276. Ein fehlerfreier, ziemlich gut entwickelter, hochstämmiger Apfelbaum gangbarer Sorte, welcher zum Besatze eines in laufender Kultur dem Unternutzen (im gegebenen Falle als Grasland) dienenden Grundstücks gehört, steht im Alter von 25 Jahren. In Anlehnung an örtliche Erfahrungen kann angenommen werden, daß seine Tragbarkeit im Alter von 10 Jahren begonnen und sich seither schon auf 15 Jahre erstreckt hat. Ferner ergibt die Schätzung, daß die erste Periode mit allmählich steigenden Erträgen über 20, die zweite (mittlere) mit gleichmäßigeren und höchsten Erträgen über 30, und die dritte mit allmählich sinkenden Erträgen über 15 Jahre reicht.

Die in der mittleren Periode zu erwartende höchste Ernte, bei deren Veranschlagung ebenfalls Beobachtungen in der Praxis zu Rate gezogen sind, wird auf 180 Kilo berechnet. Im übrigen soll sich die Ermittlung der Erträge auf die Voraussicht gründen, daß diese höchste Ernte in je 10 Jahren 1 Mal vorkommt, indessen die anderweiten, um je $^1/_4$ sich abmindernden guten, mittelmäßigen und geringen Erträge in der gleichen Frist 2, bezw. 3 und 2 Mal, eigentliche Fehlernten aber 2 Mal wiederkehren.

Der Bruttowert der Früchte ist auf 13 Mark p. Kztr. eingeschätzt, von welchen der Betrag der Kosten für die Ernte (Pflücken, Auslese,

---

wartet. Behufs Ermittlung seines Vorwertes soll ein Zinsfuß von 4 Prozent in Anwendung kommen. Alsdann berechnet sich der Wert des Baumes (Formel XIV. a.) auf 112 Mark (rund). Wenn jedoch nach Lage der Verhältnisse noch eine Risikoprämie von 1,5 Prozent in's Auge zu fassen ist, so vermindert sich der Vorwert bei Zugrundelegung von zusammen 5,5 Prozent auf 92,33 Mark. — Stellt man nun die Frage, auf wie viele Jahre die Dauerzeit des Rentenlaufes für die Berechnung gekürzt werden müßte, wenn der Vorwert bei Anwendung eines Zinsfußes von 4 Prozent den gleichen Betrag erreichen soll, welchen man unter Einbeziehung der Risikoprämie erhält, so lautet (nach Formel XIV. c.) die Antwort: 24 Jahre (rund). Das wäre gleichbedeutend mit einem Abzuge vom höchsten Lebensalter des Baumes — 30 Prozent. (!)

Wird nun aber eine derartige Ziffer ohne Anknüpfung an eine bestimmte Größe der Verlustgefahr eingeschätzt, so betritt man offenbar den Weg der Willkür.

Sortieren, Verpacken) und deren Transport nach der Absatzstelle direkt in Abzug kommen können. Die Aufwendungen hierfür betragen p. Kztr. rund 2,50 Mark, und verbleibt somit ein Nettowert p. Kztr. von $13{,}00 - 2{,}50 = 10{,}50$ Mark.

Für Schnitt bezw. Ausästen und anderweite Pflege des Baumes (Bekämpfung von Insekten und pflanzlichen Parasiten, Behandlung von Wunden, Herstellung von Stützen, Unterhaltung von Schutzvorrichtungen usw.) soll ein durchschnittlicher Jahresaufwand von 0,50 Mark eingesetzt werden.

Hinsichtlich des Holzwertes des abgängigen Baumes ist unter Berufung auf mehrfache Erfahrungen anzunehmen, daß sich eine Ausbeute von im Ganzen 1,30 Festmeter ergeben wird, von welchen 0,40 fm auf den Stamm, 0,60 fm auf die Äste und 0,30 fm auf das Reisig entfallen. Auf erstere ist ein Einheitswert von 45 Mark, auf das Astholz und das Reisig zusammen von 12 Mark anzuwenden. Der also sich berechnende Brutto-Ertrag vermindert sich um die Kosten der Fällung des Baumes, der Aufbereitung und Abfuhr des Holzes, des Ebnens der Grube usw., zusammen taxiert auf 6 Mark.

Als indirekte Opfer kommen schließlich noch die Einbußen in Betracht, welche durch den Obstbaum an der Unterkultur verursacht werden. Von den Hemmungen, welche dieser der Anwendung von Werkzeugen, Maschinen und Fuhrwerken bei der Düngung und Ernte (ev. auch der Bodenbearbeitung) bereitet, kann hier abgesehen werden. Es kommt daher wesentlich nur die Schädigung des Unterwuchses durch Beschattung, Traufe, Nährstoffentzug und Verminderung der Feuchtigkeit in den tieferen Bodenschichten in Betracht. Dieselbe wird auf 40 Prozent des auf 400 Mark p. ha oder 4 Mark p. a zu beziffernden Ertrages der von dem Baume nicht beeinflußten Fläche veranschlagt, und erstreckt sich bei einem in der ersten Periode stehenden Baume durchschnittlich auf 0,25, bei einem älteren Baume durchweg auf 0,75 a.

Der Zinsfuß, welcher der Berechnung zu Grunde zu legen ist, beträgt $4^1/_2$ Prozent, die Erhöhung desselben um die einer Versicherungsgebühr entsprechende Risiko-Prämie $1^1/_2$, zusammen 6 Prozent.

Welcher Geldwert darf hiernach an dem gegebenen Zeitpunkte für den Baum beansprucht werden?

A. Auf Grundlage der vorliegenden Weisungen erhält man von dem Ertragsvermögen des Obstbaumes folgendes Bild:

Der naturale Ertrag ist:

Periode:	Altersjahre (seit der Pflanzung):	Jahre der Tragbarkeit:	Zahl der in Rechnung zu stellenden Ertragsjahre:	Durchschnittlicher Obstertrag:[1] Kilo
I.	1 — 30	20	5	30
II.	31 — 60	30	30	81
III.	61 — 75	15	15	51
		65	50	

[1]) Behufs Berechnung des Durchschnittsertrages hat man den Höchstertrag (für die I. und III. Periode unter Beachtung des Zunahme- bezw. Abnahme-Verhältnisses) mit $1 + (2 \times {}^3/_4) + (3 \times {}^1/_2) + (2 \times {}^1/_4)$, d. i. mit $4^1/_2$ zu multiplizieren und durch

Diesem Ergebnisse entspricht ein durchschnittlicher Reinertrag aus den Obst-Ernten:

	Perioden: I.	II.	III.
Netto-Erlös à 10,50 Mark p. Kztr.: Für	0,30 Kztr. = 3,15 M;	0,81 Kztr. = 8,505 M;	0,51 Kztr. = 5,355 M.
Davon kommen weiter in Abzug:			
1.) Laufende Kosten	0,50 M.	0,50 M.	0,50 M.
2.) Einbußen am Unterwuchs	0,40 „.	1,20 „.	1,20 „.
	0,90 M.	1,70 M.	1,70 M.
Somit sind die Reinerträge:	2,25 M.	6,805 M.	3,655 M.
Abgerundet:	2,25 „.	6,80 „.	3,65 „.

Da an dem gegebenen Zeitpunkt noch 5 Jahre der ersten Periode einbezogen werden müssen, hierfür aber nach dem 10-jährigen Durchschnitt eine Ernte von $\frac{30 + 60}{2} = 45$ Kilo anzunehmen ist, so entfällt auf dieselben ein Reinertrag von $(0,45 \times 10,5) - (0,50 + 0,80) = 4,72 - 1,30 = 3,42$ M.

Für den Holzwert des Baumes erhält man schließlich netto:

$$(0,40 \times 45) + (0,90 \times 12) - 6 = 22,80 \text{ Mark.}$$

Nach dieser Darlegung berechnet sich nunmehr der Zeitwert des Baumes folgendermaßen:[1])

$$a = \frac{3,42 \times (1,06^5 - 1)}{1,06^5 \times 0,06} + \frac{6,80 \times (1,06^{30} - 1)}{1,06^{5+30} \times 0,06} + \frac{3,65 \times (1,06^{15} - 1)}{1,06^{35+15} \times 0,06} + \frac{22,80}{1,06^{50}}$$

Die Ausführung ergibt sodann (Vid. die Hilfstafel I):

$$\text{I: } \frac{3,42 \times 0,338}{1,338 \times 0,06} = \frac{1,156}{0,0803} = \ldots \quad 14,39 \text{ Mark}$$

$$\text{II: } \frac{6,8 \times 4,743}{7,686 \times 0,06} = \frac{32,252}{0,461} = \ldots \quad 69,96 \text{ „}$$

$$\text{III: } \frac{3,65 \times 1,397}{18,42 \times 0,06} = \frac{5,099}{1,105} = \ldots \quad 4,61 \text{ „}$$

$$\frac{22,80}{18,42} = \ldots \quad 1,24 \text{ „}$$

Summa: **90,20** Mark.

die Zahl der Jahre (10) zu dividieren. Daher, nach dem oben — unter $\beta.\alpha\alpha.$ (S. 284) — dargelegten Verfahren:

$$\text{II. Periode (30 Jahre): } \frac{180 \times 4,5}{10} = 81 \text{ Kilo.}$$

$$\text{I. Periode (20 Jahre): } \frac{81 \times 0,75}{2} = 30,375, \text{ rund } 30 \text{ Kilo.}$$

$$\text{III. Periode (15 Jahre): } \frac{81 \times 1,25}{2} = 50,625, \text{ rund } 51 \text{ Kilo.}$$

[1]) Es sind hier, wie in den weiteren, auf gleicher Grundlage behandelten Aufgaben die Reinerträge — in Anpassung an das Verfahren der Durchschnittsberechnung derselben — als nachschüssige Jahresrenten aufgefaßt worden. Zwischen dem also ermittelten Ergebnisse und demjenigen, welches die Behandlung der Reinerträge als vorschüssige Jahresrenten liefert, besteht übrigens ein weniger erheblicher Unterschied. (Vgl. S. 285.)

Zum Vergleiche folgt hier noch eine Darstellung des Verhältnisses nach dem Verfahren der Berechnung des Endwertes und dessen Diskontierung. Den Endwert erhält man also:

$$A = \frac{[3{,}42 \times (1{,}06^5 - 1) \times 1{,}06^{45}]}{0{,}06} + \frac{[6{,}8 \times (1{,}06^{30} - 1) \times 1{,}06^{15}]}{0{,}06} + \frac{3{,}65 \times (1{,}06^{15} - 1)}{0{,}06} + 22{,}80$$

$$= \frac{(3{,}42 \times 0{,}338 \times 13{,}765) + (6{,}8 \times 4{,}743 \times 2{,}397) + (3{,}65 \times 1{,}397)}{0{,}06} + 22{,}80$$

Darnach ergibt die Rechnung:

$$A = \frac{15{,}912 + 77{,}308 + 5{,}099}{0{,}06} + 22{,}80 = \frac{9831{,}9}{6} + 22{,}80 = 1\,661{,}45 \text{ M.}$$

Der gegenwärtige Wert dieser Rein-Einnahme (diskontiert) ist aber:

$$a = \frac{1\,661{,}45}{1{,}06^{50}} = \frac{1\,661{,}45}{18{,}42} = \mathbf{90{,}20} \text{ Mark (w. o.).}$$

277. Nach dem in Aufgabe 276 dargelegten Ergebnisse der Schätzung beläuft sich die gesamte Ernte in den noch in Betracht fallenden 50 Jahren der Tragbarkeit des Baumes auf: $(5 \times 45) + (30 \times 81) + (15 \times 51) =$ 3 420 Kilo. Angenommen nun, daß der Taxator von einer getrennten Behandlung der einzelnen Perioden abgesehen und einen je nach 2 Jahren wiederkehrenden gleichen mittleren Ertrag in's Auge gefaßt, daß sich dieser aber unter Anrechnung von $\frac{50}{2} = 25$ Ertragsjahren genau auf die gleiche Gesamtzahl von 3420 Kilo, also für jedes Ertragsjahr auf $\frac{3\,420}{25} = 136{,}8$ Kilo belaufen hätte: Wie hoch würde sich dann der Zeitwert aller Reinerträge berechnen, wenn diese als aussetzende Renten behandelt und im Übrigen die in Aufgabe 276 verzeichneten Bedingungen zu Grunde gelegt werden?

A. Der Fragestellung gemäß bedarf es vorerst einer Feststellung des Geldwertes des alle 2 Jahre zu beziehenden Reinertrages. Derselbe berechnet sich also:

1,368 Kztr. à 10,50 Mark = 14,36 M.

Davon kommen in Abzug:

1.) Laufende Kosten: $2 \times 0{,}50 =$ . . . . 1,00 M.

2.) Einbußen am Unterwuchs: Im Mittel: $2 \times 0{,}70$ a, à 4 M. = 5,60 M. Hiervon 40 Prozent = ... 2,24 „

3,24 „

Reinertrag je nach 2 Jahren: 11,12 M.

Da diese Rente sowohl als eine nachschüssige wie als eine vorschüssige betrachtet werden kann, soll die Rechnung beiden Annahmen gemäß zwiefach gestaltet werden.

Wird vorausgesetzt, daß die erste Ernte am Ende des zweijährigen Zeitraumes eintritt, so erhält man in Anwendung der Formel XVIII. a und — mit Anschluß des Holzwertes von 22,80 Mark — der Formel II:

$$a = \frac{11{,}12 \times (1{,}06^{50} - 1)}{1{,}06^{50} \times (1{,}06^2 - 1)} + \frac{22{,}80}{1{,}06^{50}}$$

Unter Benutzung der Hilfstafel I lautet somit die Rechnung wie folgt:

$$\frac{11{,}12 \times 17{,}42}{18{,}42 \times 0{,}1236} + \frac{22{,}80}{18{,}42} = \frac{193{,}71}{2{,}277} + 1{,}24 = 85{,}08 + 1{,}24 = \mathbf{86{,}32} \text{ Mark.}$$

Betrachtet man die Reinerträge als eine vorschüssige, also am Beginne des zweijährigen Zeitraumes zu beziehende Rente, so gestaltet sich die Rechnung nach Formel XIX. a und bezw. II also: [1])

$$a = \frac{11{,}12 \times (1{,}06^{50} - 1)}{1{,}06^{50-2} \times (1{,}06^{2} - 1)} + \frac{22{,}80}{1{,}06^{50}}$$

Die weitere Ausführung ergibt dann:

$$\frac{11{,}12 \times 17{,}42}{16{,}394 \times 0{,}1236} + \frac{22{,}80}{18{,}42} = \frac{193{,}71}{2{,}026} + 1{,}24 = 95{,}61 + 1{,}24 = \mathbf{96{,}85} \text{ Mark.}$$

Anmerkung. Aus dem vorgeführten Beispiele ist Folgendes zu ersehen:

Als Vergleichsgrundlage dient das Ergebnis des oben (S. 284) dargelegten, auf einen angemessenen dezennialen Durchschnitt der Erträge abzielenden Verfahrens, mit welchem in weiterer Anwendung auf die Kapitalwert-Berechnung (Aufgabe 276) ein Vorwert der laufenden Reinerträge (also abzüglich desjenigen aus dem Holznutzen) von 88,96 Mark ermittelt wurde.

Die Schätzung der Ernten nach festen, mittleren, je mit Ablauf gleicher zeitlicher Zwischenräume (hier von 2 Jahren) beziehbaren Größen führte, wie angenommen ist, zu genau gleichen Brutto- und c. p. zu gleichen, rechnungsmäßig festgestellten Reinerträgen. Faßt man diese nun als eine aussetzende Rente auf, so erhält man noch verschiedene Kapitalwerte, je nachdem die Reinerträge als eine nach-, oder als eine vorschüssig fällige Rente behandelt werden. Im gegebenen Falle beträgt die Differenz: 95,61 — 85,08 = 10,53 Mark. Dabei ist daran zu erinnern, daß dieselbe mit der Ausdehnung der Zwischenzeiten noch auffälliger hervortreten würde. Ob in concreto das Verhältnis der Vor- oder der Nachschüssigkeit besteht, ist aber von vornherein nicht mit Sicherheit zu entscheiden.

Wie die Rechnung überdies dartut, hält der gemäß der ersteren, in Aufgabe 276 befolgten Methode der Ermittlung sich ergebende Kapitalwert annähernd genau die Mitte zwischen denjenigen ein, welche die Behandlung der Reinerträge als aussetzende nach- und vorschüssige Rente liefert.

Von dieser Betrachtung bleibt die a. a. O. bereits zur Sprache gebrachte Frage, auf welchem der genannten beiden Wege der taxenmäßigen Darstellung der naturalen Erträge eine gesichertere Annäherung an die Wirklichkeit zu gewärtigen sei, allerdings unberührt.

278. Im Anschlusse an die in Aufgabe 276 ausgeführte Berechnung des gegenwärtigen Kapitalwertes des Obstbaumes soll noch die Frage beantwortet werden, ein wie hoher Wert sich für denselben am Zeitpunkte des Eintritts in das Tragbarkeitsalter bei Anwendung des gleichen Rechnungsverfahrens ergeben haben würde. Wie lautet die Auskunft über diese Frage?

A. Es handelt sich hier um die Einbeziehung der ganzen ersten Periode der Tragbarkeit des Baumes, welche 20 Jahre umfaßt. Unter

---

[1]) Ist der Vorwert einer nachschüssigen Rente bekannt, so berechnet sich aus demselben der Vorwert der gleichen, aber vorschüssigen Rente auch einfach durch Multiplikation mit einer Potenz, deren Grundzahl der Zinsfaktor und deren Exponent die Zahl der Zwischenjahre ist, im gegebenen Falle mit $1{,}06^2$. Darnach erhält man: $85{,}08 \times 1{,}1236$ = rund 95,60 (w. o.). Umgekehrt würde man den Vorwert durch die gleiche Potenz zu dividieren haben.

Bezugnahme auf die in Aufgabe 276 enthaltene Übersicht über die Erträge ergibt sich deren Wert am Beginne der Tragbarkeit also:

$$a = \frac{2,25 \times (1,06^{20} - 1)}{1,06^{20} \times 0,06} + \frac{6,80 \times (1,06^{30} - 1)}{1,06^{50} \times 0,06} + \frac{3,65 \times (1,06^{15} - 1)}{1,06^{65} \times 0,06} + \frac{22,80}{1,06^{65}}$$

Unter Benutzung der Hilfstafel I (Vid. Anlage) erhält man hiernach:

$$\text{I: } \frac{2,25 \times 2,207}{3,207 \times 0,06} = \frac{4,966}{0,1924} = \ldots \quad 25,81 \text{ Mark}$$

$$\text{II: } \frac{6,8 \times 4,743}{18,42 \times 0,06} = \frac{32,252}{1,1052} = \ldots \quad 29,18 \text{ „}$$

$$\text{III: } \frac{3,65 \times 1,397}{44,145 \times 0,06} = \frac{5,099}{2,649} = \ldots \quad 1,92 \text{ „}$$

$$\frac{22,80}{44,145} = \ldots \quad 0,52 \text{ „}$$

Summa: **57,43** Mark.

Zur Kontrolle dient folgende Prolongations- und Diskontierungs-Rechnung:

$$A = \frac{[2,25 \times (1,06^{20} - 1) \times 1,06^{45}]}{0,06} + \frac{[6,80 \times (1,06^{30} - 1) \times 1,06^{15}]}{0,06} + \frac{[3,65 \times (1,06^{15} - 1)]}{0,06} + 22,80$$

$$= \frac{(2,25 \times 2,207 \times 13,765) + (6,8 \times 4,743 \times 2,397) + (3,65 \times 1,397)}{0,06} + 22,80$$

$$= \frac{68,353 + 77,308 + 5,099}{0,06} + 22,80 = \frac{15\,076,0}{6} + 22,80 = 2\,535,46 \text{ Mark.}$$

Der gegenwärtige Wert dieser Rein-Einnahmen ist:

$$a = \frac{2\,535,46}{1,06^{65}} = \frac{2\,535,46}{44,145} = \mathbf{57,43} \text{ Mark (w. o.).}$$

279. Es soll in Anwendung der seither dargelegten Rechnungsweise ermittelt werden, wie hoch sich der Ertragswert des gleichen Baumes (Aufgabe 276) am Ende des 30sten Jahres nach der Pflanzung, oder des 20sten Jahres seit Beginn der Tragbarkeit, also dann belaufen würde, wenn derselbe noch weitere 5 Jahre der Nutzung gedient hat. — Der Kalkulation sind die oben aufgeführten Durchschnitts-Reinerträge zu Grunde zu legen. Zinsfuß wiederum 6 Prozent. Wie verfährt man:

A. Auf der angegebenen Altersstufe steht der Baum am Beginne der Periode höchster Erträge. Die Vorwerte aller bis zum Ableben desselben zu gewärtigenden Reinerträge berechnen sich also, wie folgt:

$$a = \frac{6,80 \times (1,06^{30} - 1)}{1,06^{30} \times 0,06} + \frac{3,65 \times (1,06^{15} - 1)}{1,06^{15+30} \times 0,06} + \frac{22,80}{1,06^{45}}$$

Somit ist:

$$\text{II: } \frac{6,8 \times 4,743}{5,743 \times 0,06} = \frac{32,252}{0,3446} = \ldots \quad 93,59 \text{ Mark}$$

$$\text{III: } \frac{3,65 \times 1,397}{13,765 \times 0,06} = \frac{5,099}{0,826} = \ldots \quad 6,17 \text{ „}$$

$$\frac{22,80}{13,765} = \ldots \quad 1,66 \text{ „}$$

Summa: **101,42** Mark.

Der Wert des Baumes würde also an dem um 5 Jahre hinausgeschobenen Zeitpunkte der Nutzung **mehr** betragen: 101,42 — 90,20 = 11,22 Mark.

280. Anknüpfend an den in obigem Beispiele behandelten Fall wird die weitere Frage gestellt, welchen Kapitalwert derselbe Baum c. p. in der Mitte der Periode seines Höchstertrages, also im Tragbarkeitsalter von 35 Jahren repräsentieren würde. Wie gestaltet sich dann die Rechnung?

A. Der Zeitwert der bis zum Lebensende des Baumes voraussichtlich einkehrenden Erträge ist:

$$a = \frac{6{,}80 \times (1{,}06^{15} - 1)}{1{,}06^{15} \times 0{,}06} + \frac{3{,}65 \times (1{,}06^{15} - 1)}{1{,}06^{30} \times 0{,}06} + \frac{22{,}80}{1{,}06^{30}}$$

Darnach ergibt die weitere Rechnung:

$$\text{II: } \frac{6{,}8 \times 1{,}397}{2{,}397 \times 0{,}06} = \frac{9{,}4996}{0{,}1438} = \ldots \quad 66{,}06 \text{ Mark}$$

$$\text{III: } \frac{3{,}65 \times 1{,}397}{5{,}743 \times 0{,}06} = \frac{5{,}099}{0{,}345} = \ldots \quad 14{,}78 \text{ „}$$

$$\frac{22{,}80}{5{,}743} = \ldots \quad 3{,}97 \text{ „}$$

Summa: **84,81** Mark.

Nach einer weiteren Ausdehnung der Nutzung des Baumes um 15 Jahre würde also eine Werts-Abnahme desselben eintreten von 101,42 — 84,81 = 16,61 Mark.

Anmerkung. Die Ergebnisse des in den Aufgaben 276 und 278—280 dargelegten Verfahrens lassen sich rückschauend dahin zusammenfassen, daß für den gleichen Baum ein Vorwert beansprucht werden konnte von:

	Am Beginne des Tragbarkeitsalters:	Nach 15 Jahren der I. Periode:	Nach 20 Jahren der I. (Beginn der II. [Höchst-Ertrags-]) Periode:	Nach 35 Jahren. Mitte der II. (Höchst-Ertrags-) Periode:
	(278)	(276)	(279)	(280)
Mark:	57,43	90,20	101,42	84,81.

Diese Zahlen beweisen zur Genüge, wie die Annahme, daß bei Einbeziehung aller bis zum Lebensende eines Baumes zu gewärtigenden Ernten der jüngere — beispielsweise der gerade mit dem Ertrage einsetzende — Baum den höchsten Wert haben, auf den in der höchsten Leistungsfähigkeit stehenden Baum aber ein bedeutend niedrigerer Wert entfallen würde, dann **nicht** zutreffen kann, wenn der Berechnung eine den tatsächlichen Verhältnissen entsprechende Einteilung der Tragbarkeitszeit in mehrere Perioden abgestufter Ergiebigkeit zu Grunde gelegt und insbesondere das in der **ersten** Periode noch geringere Ertragsvermögen des Baumes zum Ausdruck gebracht wird. (Vgl. S. 286 Fußnote.)

281. In Ausführung einer Güter-Zusammenlegung soll der Landwirt X. einen hochstämmigen Apfelbaum abtreten, und ist dieserhalb die Aufgabe entstanden, dessen gegenwärtigen Ertragswert festzustellen. Die Ansichten der Experten stimmen darin überein, daß der Baum, welcher schon 40 Jahre seines Tragbarkeitsalters zurückgelegt und damit die Höchstgrenze der Ergiebigkeit erreicht hat, voraussichtlich noch 30 Jahre lang ertragsfähig bleiben werde. Das Ergebnis der Schätzung der künftigen Ernten wurde in **einem** Durchschnittssatze ausgedrückt, wobei allerdings zugleich die geringeren Erträge der abschließenden Periode Berücksichtigung fanden. Diesen Durchschnitt bezifferte man auf 120 Kilo mit einem

Bruttowert à 10.20 Mark p. Kztr. = 12.24 Mark. Hinsichtlich der jährlichen Kosten einigte man sich in der Annahme eines Betrages von 1,95 Mark. Dabei blieben die indirekten Aufwendungen allerdings außer Betracht. Der Rechnung soll somit ein Netto-Obstertrag von 12.24 — 1,95 = rund 10.30 Mark zu Grunde gelegt, von einer Notierung des Holzwertes des ablebenden Baumes aber Umgang genommen werden. (Voraussetzungen nach einem Beispiele in der „Deutschen landw. Presse". 1907, No. 17.)

Es wäre nunmehr zu ermitteln, wie hoch sich der Kapitalwert des Baumes in Anwendung der oben dargelegten zutreffenden Rechnungsweise dann beläuft, wenn ein Zinsfuß von 4 und eine Risiko-Prämie von $1^1/_2$, zusammen $5^1/_2$ Prozent beansprucht wird. Wie lautet die Rechnung?

A. Der hier maßgebende Ansatz ist:

$$a = \frac{10.30 \times (1{,}055^{30} - 1)}{1{,}055^{30} \times 0{,}055}$$

Unter Benutzung der Hilfstafel I erhält man alsdann:

$$\frac{10.30 \times 3.984}{4{,}984 \times 0{,}055} = \frac{41.035}{0{,}2741} = \mathbf{149.70} \text{ Mark.}$$

Anmerkung. Es dürfte nicht ohne Interesse sein, an diesem Beispiele zu zeigen, in welchem Bilde die anderweiten, seither in Vorschlag gebrachten Methoden der rechnerischen Behandlung der Aufgabe erscheinen.[1])

Angenommen, daß im vorliegenden Falle drei Experten an der Werttaxation beteiligt waren, jeder derselben aber sich eine eigene Meinung über die Art der Bestimmung des Vorwertes der allseitig als hinreichend zutreffend anerkannten Reinerträge gebildet habe.

A. erklärt, daß er von der Vorstellung einer dauernd wiederkehrenden Rente ausgehe und diese einfach kapitalisiert zu sehen wünsche. Das Verfahren wäre dann sehr einfach. Nach den Regeln für die Berechnung immerwährender Renten (Vgl. hierzu den Schlußabschnitt über die Rentenrechnung) erhielte man dann:

$$a = 10{,}30 \times \frac{100}{5.5}, \text{ oder auch: } a = \frac{10{,}30}{5.5} \times 100, \text{ oder auch: } \frac{10{,}30}{0.055} = 187{,}27 \text{ Mark.}$$

Diese Rechnungsweise könnte nur dann zu dem gleichen, oben nachgewiesenen Ergebnisse führen, wenn der Zinsansatz um einen Betrag erhöht würde, welcher hinreicht, um den effektiven Wert des Baumes in der umschriebenen Frist zu amortisieren. Im gegebenen Falle müßte diese Erhöhung (vid. die Formel S. 108. Anmerkung) sich belaufen auf: $r_m = \frac{5.5}{1.055^{30} - 1} = \frac{5.5}{3.984} = 1.38$ Prozent, so daß der anzuwendende Divisor (0,0p) im Ganzen 0,055 + 0.0138 = 0,0688 ausmacht. In der Tat erhält man dann:

$$a = \frac{10.30}{0{,}0688} = 149.70 \text{ Mark (w. o.).}$$

Wäre die Rente, statt alljährlich mit 10.30 Mark, je das zweite Jahr mit 20.60 Mark zu beziehen, also eine aussetzende, so würde sich das Verhältnis gestalten, wie folgt:

Der Vorwert a einer solchen, dauernd wiederkehrenden Rente ist (XXX. a):

$$\frac{20{,}60}{1.055^2 - 1} = \frac{20.60}{0.113} = 182.30 \text{ Mark.}$$

Derselbe berechnet sich aber für die gleiche, während nur 30 Jahren eingehende Rente (XVIII. a) auf:

$$a = \frac{20{,}60 \times (1{,}055^{30} - 1)}{1{,}055^{30} \times (1{,}055^2 - 1)} = \frac{20.60 \times 3.984}{4.984 \times 0.113} = \frac{20.60}{2.251 \times 0{,}113} = \frac{20{,}60}{0{,}1414} = 145{,}70 \text{ Mark.}$$

---

[1]) Der hier folgenden Darstellung ähnliche Berechnungen finden sich auch in der bereits zitierten Schrift von Christ und Junge, S. 69 ff.

B. dagegen plaidiert für die Zugrundelegung einfacher Zinsen für die Zeit der Lebensdauer des Baumes, und argumentiert also:

Wenn die Zinsen des jährlichen Reinertrages diesem zugeschlagen werden, so wächst das Kapital bis zum Ablauf des 30sten Jahres nach einer arithmetischen Reihe. Das erste Glied dieser Reihe besteht in dem zunächst eingehenden Reinertrage (ohne Zins) = 10,30 Mark, indessen das letzte Glied aus diesem Reinertrage nebst seinen in **29** Jahren anfallenden Zinsen gebildet wird und sich demnach auf $10{,}30 + (10{,}30 \times 0{,}055 \times 29) = 26{,}7285$ Mark beläuft. Der Endwert aller Erträge + Zinsen ist aber nach einer bekannten Formel:

$$A = (10{,}30 + 26{,}7285) \times \frac{29}{2} = 37{,}0285 \times 14{,}5 = 536{,}913 \text{ Mark.}$$

Aus dieser Summe berechnet sich nun deren Anfangswert nach der Formel 6 (S. 3) der Zinsrechnung, wie folgt:

$$a = \frac{536{,}913 \times 100}{100 + (5{,}5 \times 29)} = \frac{53\,691{,}3}{259{,}5} = 206{,}90 \text{ Mark.}$$

C. vertritt die naive Auffassung, daß der Kapitalwert des Baumes sich aus der Summe aller im Laufe der Jahre eingehenden Einzelerträge zusammensetze, und daher der denkbar einfachste Weg in der Multiplikation des durchschnittlichen Reinertrages mit der Zahl der noch ausstehenden Lebensjahre des Baumes gegeben sei. Er berechnet somit: $10{,}30 \times 30 = 309$ Mark (!).

D., zu einer Ober-Expertise berufen, bekennt sich unter Ablehnung dieser Vorschläge vorbehaltlos zu dem Verfahren der Diskontierung der Reinerträge als Zeitrenten mit Einbeziehung der Zinseszinsen, und gelangt auf diesem Wege zu dem oben berechneten Vorwerte von **149,70** Mark. — Eine vergleichend kritische Beleuchtung der vorliegenden Rechnungsweisen rechtfertigt seinen Standpunkt. (Vid. Die Ausführungen S. 283 und 284).

282. Die Herstellung einer Landstraße erforderte die Expropriation eines mit mehreren Birnbäumen besetzten Grundstücks, zu welchem Zwecke das Verfahren anzuwenden war, neben dem Verkehrswerte der Liegenschaft als solcher den auf den Obstbaumbestand entfallenden Zuschlagswert gesondert festzustellen. Das Grundstück, in einer durch intensiven Betrieb der Graswirtschaft ausgezeichneten Hügellandschaft (Beispiel aus der Schweiz) gelegen, bestand in einer sorgfältig gepflegten und regelmäßig gedüngten Matte. Im Übrigen lag das Verhältnis also: Die Bäume, hochstämmig, sämtlich der gleichen, zu den Mostbirnen zählenden Sorte, waren im gleichen Jahre gepflanzt worden und hatten bereits — von der Pflanzung an gerechnet — ein Alter von 50 Jahren erreicht. Da in ihrer Verfassung ein erheblicher Unterschied kaum wahrzunehmen war, glaubte man die Rechnung auf das Verhalten nur eines typischen Exemplares gründen zu sollen. — Nun wußte man, daß Bäume der genannten Kategorie hinsichtlich der Entwicklung ihrer Tragbarkeit als spätreif zu beurteilen sind, und daß auch die erste Periode des Ertrages, welche durchschnittlich mit 15 Jahren nach der Pflanzung beginnt, einen relativ längeren Zeitraum, im gegebenen Falle etwa 25 Jahre umfaßt. Allbekannt war ferner, daß derartige Bäume, welche sich durch robuste Konstitution und ausgesprochene Widerstandskraft hervortun, im Allgemeinen ein hohes Lebensalter erreichen. Für den gegebenen Fall wurde daher unter Berufung auf Erfahrungen angenommen, daß ihre Lebensdauer — von der Pflanzung an gerechnet — sich über mindestens 95 Jahre erstreckt, daß sie also bei einer gesamten Tragbarkeitsdauer von $95 - 15 = 80$ Jahren, und nachdem sie hiervon bereits $50 - 15 = 35$ Jahre zurückgelegt haben, voraussichtlich noch $80 - 35 = 45$ Jahre ertragsfähig bleiben, von welchen

dann 25 Jahre auf die Periode (II) der Höchsterträge und 20 Jahre auf die Periode (III) der abnehmenden Erträge entfallen.

Eingehende Informationen über die in der Lokalität erzielten Ernten unterstützten ferner die Ansicht, daß von den Bäumen innerhalb je 10 Jahren der ergiebigsten (II) Periode: 1 reicher (sehr guter) Ertrag, ferner 4 gute und 3 mittelmäßige Erträge zu erwarten sind, dazwischen aber nur 2 eigentliche Fehljahre vorkommen. Jenen Maximal-Ertrag bezifferte man auf 570 Kilo.

Der Nettowert eines Kilozentners des Obstertrages wurde — nach Abzug der Ernte- und Vertriebsspesen — auf im Mittel 5 Mark, und der Endwert des Holzes des abgehenden Baumes — ebenfalls netto — auf 40 Mark veranschlagt.

Mit Rücksicht auf den Zwischenertrag von abfallendem Astholz setzte man als jährlichen direkten Aufwand nur 0,40 Mark ein, indessen die Schädigungen des Unterwuchses, bezogen auf je 1 a, mit 40 Prozent des auf 560 Mark p. ha taxierten Ertrages desselben, also mit 2,24 Mark berechnet wurden. So erhielt man für den Kostenabzug überhaupt: 2,64 Mark.

Wenn nun für die Anlage ein Zinsfuß von 4 Prozent, in Würdigung aber der vorgeschrittenen Altersstufe und insbesondere der Resistenzfähigkeit der Bäume eine Risikoprämie von nur 1 Prozent gefordert wird: Wie hoch berechnet sich dann der Jetztwert eines Baumes?

A. Die Schätzung des Durchschnitts der naturalen Erträge ergibt für einen Baum:[1])

II. Periode: $\frac{570 \times 4^2/_3}{10} = 266$ Kilo.

III. Periode: $\frac{266 \times 1^1/_3}{2} = 177{,}33$, oder rund 177 Kilo.

Hiernach gestalten sich die Reinerträge also:

a) An Früchten p. Jahr:

II. Periode: $2{,}66 \times 5 - 2{,}64 = 13{,}30 - 2{,}64 = 10{,}65$ Mark (rund);

III. Periode: $1{,}77 \times 5 - 2{,}64 = 8{,}85 - 2{,}64 = 6{,}20$ Mark (rund).

b) An Holzwert des abgehenden Baumes: 40,00 Mark.

Da von der gesamten Dauer der Tragbarkeit noch 25 Jahre der II. und 20 Jahre der III. Periode in Aussicht stehen, so ist:

$$a = \frac{10{,}65 \times (1{,}05^{25} - 1)}{1{,}05^{25} \times 0{,}05} + \frac{6{,}20 \times (1{,}05^{20} - 1)}{1{,}05^{45} \times 0{,}05} + \frac{40}{1{,}05^{45}}$$

Darnach erhält man unter Benutzung der Hilfstafel I:

II: $\frac{10{,}65 \times 2{,}386}{3{,}386 \times 0{,}05} = \frac{25{,}411}{0{,}1693} =$ . . . . 150,09 Mark.

III: $\frac{6{,}20 \times 1{,}653(3)}{8{,}985 \times 0{,}05} = \frac{10{,}2486}{0{,}4492(5)} =$ . . . . . . 22,81 „

$\frac{40}{8{,}985} =$ . . . . 4,45 „

Summa: **177,35** Mark.

[1]) Gemäß dem Ansatze: $1 + (4 \times ^2/_3) + (3 \times ^1/_3) = 4^2/_3$.

Wendet man zur Kontrolle das Verfahren der Prolongation der Erträge und der Diskontierung ihres Endwertes an, so würde die Rechnung ergeben:

$$\frac{\frac{(10{,}65 \times 2{,}386 \times 2{,}6533) + (6{,}20 \times 1{,}6533)}{0{,}05} + 40}{8{,}985} = 177{,}35 \text{ Mark (w. o.).}$$

283. Es ist die Aufgabe gestellt, den derzeitigen Wert eines halbhochstämmigen Kirschbaumes (Süßkirsche) zu ermitteln, welcher nachweislich 28 Jahre (nach der Pflanzung) zurückgelegt hat, sich in Bezug auf Gesundheit, Wüchsigkeit und Entwicklung der Krone in einer normalen Verfassung befindet und dieserhalb unter dem begünstigenden Einflusse der Lage und Beschaffenheit des Bodens seither schon zu einer ansehnlichen Fruchtbarkeit gediehen ist. Von sachverständiger und mit den Lokalverhältnissen vertrauter Seite wird angenommen, daß der Baum, dessen Lebensdauer auf 45 Jahre eingeschätzt wurde, mit seinem 6ten Jahre zu tragen begonnen, dann 12 Jahre einer I. Periode allmählich steigender, und von einer 20-jährigen II. Periode gleichmäßigerer und höchster Erträge 11 Jahre überschritten habe, und daß demgemäß von dieser noch 9 Jahre und von einer III. Periode allmählich abnehmender Ernten noch sämtliche 8 Jahre in Aussicht stehen.

Hinsichtlich des Grades der Ergiebigkeit des Baumes erachtete man, daß dieser in 10 Jahren der II. Periode höchster Fruchtbarkeit 2 sehr gute, 3 gute und 4 mittelmäßige Ernten liefere, in der gleichen Zeit aber nur 1 eigentliche Fehlernte eintreten werde, indessen der Ertrag der reichsten Jahre auf 72 Kilo veranschlagt werden dürfe.

Die Durchschnittspreise werden für 1 Kztr. auf 20 Mark berechnet, von welchen aber der Aufwand für die Ernte und Abfuhr mit 2,50 Mark direkt in Abzug kommen, so daß der Netto-Erlös p. Kztr. 17,50 Mark beträgt. Und für den Holzwert des abgehenden Baumes sollen nach vorliegender Schätzung 25 Mark anzusetzen sein.

Unter den jährlichen Kosten figurieren die laufenden Aufwendungen für die Pflege des Baumes mit 0,50 Mark und, da der von diesem beanspruchte Bodenraum noch für Unterkulturen benutzt wird, die Einbußen an deren Erträgen mit 1,60 Mark.

Wie hoch berechnet sich auf diesen Grundlagen der Wert des Baumes unter der Voraussetzung, daß ein Zins von 4, und eine Risikoprämie von 2 Prozent, zusammen also 6 Prozent beansprucht werden?

A. Die durchschnittlichen Naturalerträge des Baumes sind: [1])

---

[1]) Nach dem Ansatze: $2 + (3 \times {}^2/_3) + (4 \times {}^1/_3) = 5^1/_3$.

Der naturale Durchschnittsertrag für die gesamte Zeitdauer der Tragbarkeit würde sich berechnen, wie folgt:

$$\frac{\left(\frac{38{,}4 \times {}^2/_3}{2} \times 12\right) + (38{,}4 \times 20) + \left(\frac{38{,}4 \times 1^1/_3 \times 8}{2}\right)}{40} = \frac{153{,}6 + 768{,}0 + 204{,}8}{40}$$

$$= \frac{1126{,}4}{40} = 28{,}16 \text{ Kilo.}$$

$$\text{II. Periode: } \frac{72 \times 5^1/_3}{10} = 38{,}4 \text{ Kilo.}$$

$$\text{III. Periode: } \frac{38{,}4 \times 1^1/_3}{2} = 25{,}6 \text{ Kilo.}$$

Somit erhält man folgende Reinerträge:

a) An Früchten p. Jahr:

II. Periode: $38{,}4 \times 0{,}175 - 2{,}10 = 6{,}72 - 2{,}10 = 4{,}60$ Mark (rund);
III. Periode: $25{,}6 \times 0{,}175 - 2{,}10 = 4{,}48 - 2{,}10 = 2{,}40$ Mark (rund).

b) An Holzwert mit Abschluß der Lebensdauer des Baumes: 25 Mark.

Von der gesamten Zeitdauer der ausstehenden Tragbarkeit entfallen noch 9 Jahre auf die II., und dann 8 Jahre auf die III. Periode.

Diesen Voraussetzungen gemäß gestaltet sich nunmehr die Rechnung also:

$$a = \frac{4{,}60 \times (1{,}06^9 - 1)}{1{,}06^9 \times 0{,}06} + \frac{2{,}40 \times (1{,}06^8 - 1)}{1{,}06^{17} \times 0{,}06} + \frac{25}{1{,}06^{17}}$$

Und die Ausführung ergibt (vid. die Hilfstafel I):

$$\text{II: } \frac{4{,}60 \times 0{,}689}{1{,}689 \times 0{,}06} = \frac{3{,}1694}{0{,}1013} = \ldots\ldots \; 31{,}29 \text{ Mark.}$$

$$\text{III: } \frac{2{,}40 \times 0{,}594}{2{,}693 \times 0{,}06} = \frac{1{,}4256}{0{,}16158} = \ldots\ldots \; 8{,}82 \;\text{,,}$$

$$\frac{25}{2{,}693} = \ldots\ldots\ldots\ldots \; 9{,}29 \;\text{,,}$$

Summa: **49,40** Mark.

Anmerkung. Soll auch im gegebenen Falle eine Kontroll-Rechnung (Prolongation und Diskontierung) zur Anwendung kommen, so erhält man:

$$\frac{\frac{(4{,}60 \times 0{,}689 \times 1{,}594) + (2{,}40 \times 0{,}594)}{0{,}06} + 25}{2{,}693} = 49{,}40 \text{ Mark (wie oben).}$$

Oder, wenn man (gemäß den Ausführungen zu Aufgabe 281, Anmerkung) von der Auffassung einer dauernden, aber in dem gegebenem Zeitraum zu amortisierenden Rente ausgeht und dieserhalb den Divisor 0,06 um $\frac{0{,}06}{1{,}06^9 - 1} = \frac{0{,}06}{0{,}689} = 0{,}0871$ (II) bezw. $\frac{0{,}06}{1{,}06^8 - 1} = \frac{0{,}06}{0{,}594} = 0{,}101$ (III) erhöht:

$$\text{II: } \frac{4{,}60}{0{,}1471} = \ldots\ldots\ldots \; 31{,}29 \text{ Mark.}$$

$$\text{III: } \frac{2{,}40}{0{,}161} = 14{,}91;\; \frac{14{,}91}{1{,}06^9} = \frac{14{,}91}{1{,}689} = \; 8{,}82 \;\text{,,}$$

$$\frac{25}{2{,}693} = \ldots\ldots\ldots \; 9{,}29 \;\text{,,}$$

Summa: 49,40 Mark (wie oben).

b) Junge Obstbäume, welche noch nicht im Tragbarkeitsalter stehen.

Liegt die Aufgabe vor, den Wert eines jungen, noch nicht tragbaren Obstbaumes zu ermitteln, so wird sich dem Experten wohl der Gedanke aufdrängen, daß der einfachste Weg zu deren Lösung in der Berechnung des Aufwandes gegeben sei, welchen die Erwerbung, die Pflanzung und die jährliche Pflege des Baumes erforderten. Selbstverständlich müßte es sich dabei um die Feststellung des End-

wertes handeln, bis auf welchen dieser Aufwand an der Altersstufe, welche der Baum erreicht hat, mit Zinseszinsen angewachsen sein wird. (Prolongation.) Der also nachgewiesene Betrag stellt dann die gesamten Herstellungs- oder Produktionskosten dar.

Daß einem solchen Verfahren eine greifbare privatwirtschaftliche Bedeutung innewohnt, ist zweifelsfrei. Es sei dieserhalb nur an die Fälle einer grundsätzlich auf die Benutzung von Produktionskosten aufgebauten Inventarisation, aber auch an das doch naheliegende Bedürfnis erinnert, diese Kosten dem zu erwartenden Ertragswert des Obstbaumes gegenüberzustellen. Damit ist aber zugleich ausgedrückt, daß die beiden Momente — Produktionskosten bezw. Kostenwert und Ertragswert — sich keineswegs regelmäßig decken.

Die Kosten, welche für junge Bäume bis zu deren Eintritt in die Tragbarkeitsstufe aufzuwenden sind, werden zwar im Allgemeinen nur innerhalb engerer Grenzen schwanken, indessen die in der Folge zu gewärtigenden Reinertragswerte sich einerseits nach dem Grade der den Obstbäumen eigenen, von ihrer individuellen Verfassung und von ihren Standortsverhältnissen bedingten Ergiebigkeit, und andererseits nach dem örtlich gegebenen Verkehrs- oder Marktwerte der Früchte sehr bedeutend abstufen. Darnach erscheint auch die Anschauung gerechtfertigt, daß der Erfolg der Obstkultur in dem Verhältnisse zwischen den Kosten der Herstellung, welche eine Pflanzung verursachte, und dem auf den gleichen Zeitpunkt bezogenen Ertragswerte derselben zum Ausdruck kommt. Was aber diesen, doch immer auf Grundlage der Schätzung zu berechnenden Ertragswert betrifft, so kann ein Zweifel an der Zulässigkeit des Verfahrens nicht erhoben werden, denselben auch in solchen Fällen in's Auge zu fassen, in welchen die Reinerträge an der gegebenen Altersstufe des Baumes überhaupt noch nicht eingesetzt haben, und somit der auf den Beginn der Tragbarkeitsstufe bezogene Vorwert des Baumes auf die diesseits liegende Zahl der Jugendjahre desselben reduziert wird. Die Anwendung dieses Prinzips auf jüngere Obstbäume, welche am Beginne der Tragbarkeitsstufe stehen oder dieselbe noch nicht erreicht haben, setzt allerdings voraus, daß sie strikte erfolgt, daß also nicht anderweite Gesichtspunkte mit ihr verquickt werden.[1])

Wird, um bei der nächstliegenden Aufgabe zu bleiben, Auskunft über den Betrag der Kosten verlangt, welche ein Obstbaum bis zum Beginne seines Tragbarkeitsalters verursacht, so kommen in Frage: Der erst- und einmalige Aufwand für den Ankauf und die Kosten der Anpflanzung. Es folgen dann die jährlichen, vornehmlich in Arbeitsleistungen bestehenden Aufwendungen für die Pflege des Baumes. Die Einzelposten, aus welchen sich die Beträge beider Kategorien zusammensetzen, sind in den nachfolgenden Aufgaben näher bezeichnet. Als indirekte Opfer sind dann noch die Einbußen in Betracht zu ziehen, welche durch die Beeinträchtigung des Unternutzens und durch Erschwerungen in der Bewirtschaftung des Grundstücks entstehen. Um den Geldbetrag, welcher für die einzelnen Glieder dieser Kostenreihe einzusetzen ist, hinreichend genau festzustellen, bedarf es allerdings der sorgfältigen Wahrnehmung örtlicher Erfahrungen. Sofern diese herangezogen werden, bereitet aber die Aufgabe keine Schwierigkeiten.

Nun ist allerdings sehr zu beachten, daß gerade über jungen Bäumen denn doch die Gefahr eingreifender Schädigungen schwebt. Sieht man einmal von der

[1]) Zur Orientierung über den Zusammenhang dient übrigens eine Vergleichung des Obstbaumes — wenn dieser auch nur in Verbindung mit dem Grund und Boden als seinem bleibenden Standort ein Tauschobjekt bildet — mit einem jungen, noch nicht nutzungsreifen landwirtschaftlichen Haustiere. Beispielsweise taxiert der Verkehr den Wert eines jungen Rindes nach den Erträgen bezw. dem Grade der Futterverwertung, welche dasselbe in einer bestimmten, immer aber mit dem Ergebnis der Schlachtausbeute abschließenden Gebrauchsrichtung in Aussicht stellt, und begreiflich steigt dieser Wert mit der Annäherung des Zeitpunktes des Erwerbs des Tieres an denjenigen des Beginnes seiner Nutzung. An dieser Betrachtungsweise kann auch Angesichts der Erfahrung festgehalten werden, daß die Verkehrswerte oder Preise der Tiere bei dem Eintritt von zeitlichen Verschiebungen der Konjunktur, wie sie z. B. unter dem Einflusse des Wechsels in den jährlichen Futterernten entstehen, vorübergehend von schroffen Schwankungen betroffen werden und dann auch wohl unter die Aufzuchtskosten herabsinken.

Unsicherheit des Anwachsens ab, so wird man immer darauf gefaßt sein müssen, daß sie durch den Eintritt von störenden elementaren Zwischenfällen ungleich härter betroffen werden, als im Wachstum vorgeschrittenere Exemplare, aber auch, daß bei ihnen Verletzungen, z. B. durch Wild, Wühlmäuse usw. häufiger vorkommen und ruinösere Folgen haben. So ist denn der junge Obstbaum in verhältnismäßig hohem Grade von Gefahren für seine Gesundheit und sein Leben bedroht. Diese Sachlage bedarf aber bei einer Kostenberechnung einer besonderen Würdigung. Und es wird ihr in einfacher, durchaus berechtigter Weise entsprochen, wenn im Gesichtspunkte der Deckung gegen allfällige Einbußen ein relativ hoher Zinsfuß für das von der Anlage und den laufenden Aufwendungen beanspruchte Kapital in Ansatz gebracht wird.

α) Kostenwert.

284. Ein fünfjähriger Obstbaum erforderte vom Zeitpunkte seiner Anpflanzung bis zum Eintritte in die nach 10 Jahren beginnende Tragbarkeit nachstehend aufgeführte Kosten:

1. Erst- und einmaliger Aufwand für den Ankauf des jungen Baumes inkl. Bezugsspesen, die Beschaffung des Pfahls und von Schutzvorrichtungen, Herstellung der Pflanzgrube, das Setzen und die Beigabe von Dünger . . . . 5,00 Mark.

2. Laufende jährliche Kosten:

a) Für Pflege: Anheften, Schnitt, ev. Begießen, Lockerung der Baumscheibe, Nachhilfe durch Düngung, Ersatz des Pfahles und der Schutzvorrichtung, Bekämpfung von Schädlingen . . . . 1,90 Mark

b) Einbußen am Unternutzen und Erschwerungen in der Bewirtschaftung des Grundstücks . . . . 0,60 „

2,50 Mark.

(Von einem Gegenwert der inzwischen etwa eingehenden, jedenfalls geringen Vor-Erträge soll abgesehen werden.)

Frage: Bis auf welchen Betrag werden diese Kosten mit Ablauf von 10 Jahren der Jungperiode, also am Beginne der Tragbarkeit des Baumes angewachsen sein, wenn der Rechnung ein Zins von $4^1/_2$, und eine Risikoprämie von $3^1/_2$ Prozent, zusammen also 8 Prozent zu Grunde gelegt werden?[1])

A. Es handelt sich hier um die Bestimmung des Endwertes der Kosten sowohl der erst- und einmaligen Anlage (1), wie der laufenden Aufwendungen (2, a und b). Erstere werden sich nach Formel I belaufen auf:

$$A = 5 \times 1{,}08^{10}$$

Und der Nachwert der jährlichen Spesen ergibt sich in Anwendung der Formel XIV aus dem Ansatze:

$$A = \frac{2{,}50 \times (1{,}08^{10} - 1)}{0{,}08}$$

[1]) Dieser Prozent-Ansatz wird auch von anderer Seite als angemessen betrachtet. So z. B. von Forst- und Gutsverwalter Wild in St. Gallen, in seiner Abhandlung über „Wertung hochstämmiger Obstbäume“ (Schweizer landwirtschaftliches Centralblatt 1896, S. 151).

Nun ist: log. 1,08 = 0,0334; log. $1,08^{10}$ = 0,3342; num. log. $1,08^{10}$ = 2,1589; num. log. $1,08^{10} - 1$ = 1,1589.

Somit erhält man:

$$A = 5,00 \times 2,1589 + \frac{2,50 \times 1,1589}{0,08} = 10,79 + \frac{289,725}{8}$$
$$= 10,79 + 36,21 = \mathbf{47,00} \text{ Mark.}$$

285. Wie hoch würde sich der Kostenwert des gleichen Obstbaumes am Schlusse des 6ten Jahres nach der Pflanzung unter im Übrigen den gleichen Voraussetzungen berechnen?

A. Es ist:

log. 1,08 = 0,0334; log. $1,08^6$ = 0,2005; num. log. $1,08^6$ = 1,5867; num. log. $1,08^6 - 1$ = 0,5867

Das Ergebnis berechnet sich daher analog dem Verfahren in Aufgabe 284 also:

$$A = 5,00 \times 1,5867 + \frac{2,50 \times 0,5867}{0,08} = 7,93 + \frac{146,675}{8}$$
$$= 7,93 + 18,33 = \mathbf{26,26} \text{ Mark.}$$

Anmerkung. Der hier nachgewiesene Verlauf lässet sich auch für die einzelnen Abschnitte des Jahrzehntes auf einfachem Wege in übersichtlicher Form darstellen. Die Endwerte des Baumes müssen nämlich (von der Pflanzung an gerechnet), betragen:

1. Jahr:	5,00 + (5,00 × 0,08) + 2,50 = 7,90	Mark.
2. " :	7,90 + (7,90 × 0,08) + 2,50 = 11,03	"
3. " :	11,03 + (11,03 × 0,08) + 2,50 = 14,40	"
4. " :	14,40 + (14,40 × 0,08) + 2,50 = 18,05	"
5. " :	18,05 + (18,05 × 0,08) + 2,50 = 22,00	"
6. " :	22,00 + (22,00 × 0,08) + 2,50 = 26,26	"
7. " :	26,26 + (26,26 × 0,08) + 2,50 = 30,86	"
8. " :	30,86 + (30,86 × 0,08) + 2,50 = 35,83	"
9. " :	35,83 + (35,83 × 0,08) + 2,50 = 41,20	"
10. " :	41,20 + (41,20 × 0,08) + 2,50 = 47,00	"

β) Ertragswert.

286. Ein junger, tadellos entwickelter Kernobststamm, welcher sich bereits 6 Jahre an seinem bleibenden Standort befindet und voraussichtlich mit dem 10ten Jahre in die Tragbarkeitsstufe eintritt, soll auf seinen, den künftigen Reinerträgen entsprechenden Zeitwert geprüft werden. Der Vorwert, welchen der Baum im 10ten Jahre, dem Beginn der I. Periode der Fruchtbarkeit, darstellt, ist nach dem Beispiele in Aufgabe 278 auf 48,85 Mark berechnet worden, indessen hinsichtlich der Kosten, welche dieser verursachte, gemäß der in Aufgabe 285 angewendeten Rechnungsweise sich ein Betrag von 21,90 Mark ergab. Wie hoch würde sich hiernach der Ertragswert des jungen Baumes im 6ten Jahre nach der Pflanzung belaufen, wenn Zinsen und Risikoprämie wiederum zu 8 Prozent angenommen werden? Und wie würde sich derselbe zu dem Kostenwert der Pflanzung verhalten?

Zur Orientierung. Der auf den Zeitpunkt des Beginnes der Tragbarkeit bezogene Vorwert des Baumes resultiert aus den Reinerträgen, welche dieser bis zu seinem Lebensende liefert, steht also zunächst für sich Vergleicht man den-

selben dann mit dem Endwerte der bis zu dem gleichen Zeitpunkte, also bis zum Ablauf weiterer 4 Jahre anwachsenden Kosten, so wird sich regelmäßig ein Unterschied zwischen beiden ergeben, welcher nach der vorausgesandten Darlegung als ein Ausdruck für den Grad der Rentabilität der Anlage zu betrachten ist. Im vorliegenden Falle würde jener Endwert der Kosten 39,15 Mark, und die gesuchte Differenz 48,85 — 39,15 = 9,70 Mark betragen, welche somit die Bedeutung eines Überschusses des Vorwertes der künftigen Reinerträge über die Höchstgrenze der bis dahin aufgewendeten Kosten haben. Selbstverständlich aber hat der Besitzer des Baumes, wenn dieser auf der gegebenen Altersstufe mit dem betreffenden Grundstück zur Veräußerung gelangt, immer den vollen Reinertragswert (39,15 + 9,70 = 48,85 M.) zu beanspruchen, wie denn überhaupt, so lange es sich um derartige Aufgaben handelt, die Heranziehung der Summe der Anlagekosten ganz außer Betracht fällt.

Träfe es sich, daß der Vorwert und die Summe der Kosten (beide bezogen auf den Zeitpunkt des Beginnes der Tragbarkeit) den gleichen Betrag erreichen, dann kommt selbstverständlich in letzterem auch zugleich der Zeitwert des Baumes zum Ausdruck.

Faßt man aber im Anschlusse hieran den Zeitraum in's Auge, während dessen der Baum noch keine Ernten liefert, so ist zu beachten, daß der Reinertragswert von 48,85 Mark den Endwert eines Betrages darstellt, welcher auf 10 Jahre zu 8 Prozent angelegt wurde, und daß daher der Anteil desselben, welcher auf die in Frage stehende Altersstufe des Baumes entfällt, auf dem Wege der Diskontierung ermittelt und dem Betrage der bis zur gleichen Zeit angewachsenen Kosten gegenübergestellt werden kann. Um einen derartigen Fall handelt es sich aber in vorliegender Aufgabe.

A. Berechnet sich der Reinertragswert des Baumes am Beginne seines Tragbarkeitsalters nach der gegebenen Voraussetzung auf 48,85 Mark, und will man wissen, auf welchen Betrag dieser Wert mit Ablauf des 6ten Altersjahres des Baumes, also an einem um 4 Jahre zurückliegenden Zeitpunkte sich abmindert, so hat man einfach anzusetzen:

$$a = \frac{48{,}85}{1{,}08^4}$$

Nun ist:

$$\log. 1{,}08 = 0{,}033424; \ \log. 1{,}08^4 = 0{,}133696; \ \text{num.} \log. 1{,}08^4 = 1{,}3605.$$

Daher:

$$a = \frac{48{,}85}{1{,}3605} = \mathbf{35{,}90} \text{ Mark.}$$

Da nun der Baum an dieser Altersgrenze bereits einen Aufwand von 21,90 Mark beansprucht hat, so resultiert ein Überschußwert von 35,90 — 21,90 = **14,00** Mark.

Anmerkung. 1. Der Gedanke, den Nachweis eines Ertrags-Überschusses der Abkürzung willen derart zu leisten, daß man den auf den Ablauf von 10 Jahren sich beziehenden Mehrwert von 48,85 — 39,15 = 9,70 Mark auf den gegebenen Zeitpunkt diskontiert, wäre nicht stichhaltig. Auf diesem Wege würde man $\frac{9{,}70}{1{,}3605}$ = 7,13 Mark erhalten, ein Ergebnis, welches aus dem Grunde unzutreffend ist, weil die ansteigende Bewegung der Aufwandswerte in einem anderen (erweiterten) Verhältnisse verläuft, als der Rückgang der Diskontwerte des Reinertrages.

2. Liegt der Fall einer Senkung des Reinertragswertes bis unter den Kostenwert vor, so wird der Abschluß ein negatives Ergebnis liefern. Wenn jener beispielsweise nur 25,50 Mark betrüge, so ist der Vorwert am Schlusse des 6ten Jahres:

$$\frac{25{,}50}{1{,}08^4} = \frac{25{,}50}{1{,}3605} = 18{,}74 \text{ Mark.}$$

Es würde sich dann ein Defizit ergeben von 21,90 — 18,74 = 3,16 Mark.

Selbstverständlich müßte unter solchen Verhältnissen für die Berechnung der

Entschädigungsansprüche bei Abtretung des Baumes an dem Maßstabe des Reinertragswertes festgehalten werden.

2. Berechnung des wirtschaftlichen Erfolges der Obstkultur.

287. Der Besitzer einer rund 1 ha umfassenden Fläche Ackerlandes möchte diese mit Kernobstbäumen bepflanzen, derart, daß dieselbe dem planmäßigen Feldbau als Unterkultur erhalten bleibt. In Anbetracht der Lage und der Bodenbeschaffenheit des Grundstücks ist ein sicheres Gedeihen und durchaus befriedigende Ergiebigkeit der Obstbäume zu erwarten. Bevorzugungswert erschien die Kultur der Apfelbäume. Da es sich um einen ausgesprochenen Baumfeldbetrieb handelt, soll eine angemessen große Pflanzweite eingehalten werden, so zwar, daß der Besatz (bei einer Pflanzung im gleichseitigen Dreieck mit 12 m Seitenlänge, oder im Quadrat mit 11,25 m Seitenlänge, oder im gleichschenkligen Dreieck mit einem Reihenabstand von 14 m und einer Entfernung der Bäume in den Reihen von 9 m) sich auf im Ganzen 80 Bäume erstreckt.

Ein tunlichst genauer Voranschlag über den Kostenaufwand, welchen die Anlage bis zum Ablauf von 10 Jahren — dem Beginne der Tragbarkeit der Bäume — erfordert, ergab:

1. Ankauf und Pflanzung der Bäume inkl. aller Nebenausgaben,[1]) p. Stück . . . . 4,50 Mark
2. Laufende jährliche Kosten:
   a) Direkter Aufwand für Pflege,[1]) p. Stück . . . 1,50 Mark.
   b) Einbuße am Unternutzen und Steigerung des Aufwandes für den Betrieb der Unterkultur:

Vorgängige Erhebungen:

aa) Im Durchschnitt der Jahre wurde von der gegebenen, ohne Obstbaumbesatz bewirtschafteten Fläche (1 ha) ein Brutto-Ertrag von 500 Mark, also p. a von 5 Mark bezogen. Wird die mit der Einführung der Doppelkultur durch den Einfluß der Baumkrone entstehende Schädigung des Unterwuchses auf 40 Prozent jenes Ernte-Ertrages veranschlagt, so entfallen auf die a: 2 Mark. Nach vorliegenden Ermittlungen[2]) berechnen sich für die nach der Ausdehnung der Baumkrone in Betracht zu ziehende Schädigungsfläche im ersten Jahre nach der Pflanzung (höchstens) 2,5 qm = 0,025 a, und am Ende der Vorperiode 20 qm = 0,20 a. Es belaufen sich somit die Einbußen am Unternutzen im Ganzen (80 Bäume) auf:
$0{,}025 \times 2 \times 80 = 2{,}5 \times 1{,}6 = \mathbf{4{,}00}$ bezw. $0{,}20 \times 2 \times 80 = 20 \times 1{,}6 = \mathbf{32{,}00}$ Mark.

bb) Die durch den Baumbestand verursachte Vermehrung der Kosten für die Bearbeitung des Bodens und für die Ernte (Vollzug auf dem Grundstück) beziffert sich also:

Nimmt man an, daß der Betrieb der Unterkultur auf einem Fruchtwechsel beruht, in welchem der Anbau von Wurzel- und Knollengewächsen, von Halm- und Hülsenfrüchten und von Futterkräutern eine gleichmäßige Vertretung hat, so betragen — im vorliegenden Falle auf Grund von Sondererhebungen — die im angegebenen Sinne umschriebenen Kosten durchschnittlich p. ha und Jahr: 120 Mark. Von diesen ist aber für die Jungperiode der Bäume eine schätzungsweise berechnete Steigerung um 10 bezw. 20 Prozent, d. i. ein Betrag von **12,00** bis **24,00** Mark einzustellen.

---

[1]) In Zusammenfassung der oben (Aufgabe 284, S. 301) benannten Einzelposten.

[2]) Verf. hat dieserhalb verschiedene Messungen ausgeführt, deren Durchschnittsergebnisse hier berücksichtigt worden sind.

Dieser Darstellung gemäß würde sich also das Verhältnis im Ganzen folgendermaßen gestalten:

Indirekter Aufwand am Beginne und am Ende der Vorperiode:

P. Hektare: .. 4,00 + 12,00 Mark und 32,00 + 24,00 Mark,
zusammen . . . . 16,00 bezw. 56,00 Mark.
P. Baum (Durchschnitt) . . . . 0,20 „ 0,70 „
Von dem Rohertrage der Unterkultur . . . . 3,20 „ 11,20 Prozent.

Aus naheliegenden Gründen sollte es sich um den Anbau mehrerer, in Bezug auf Wüchsigkeit, voraussichtliche Lebensdauer, Ergiebigkeit und auf Handelswert der Früchte einander ähnliche und dann räumlich gleichmäßig zu verteilende Sorten handeln. Hinsichtlich der Dauer der Tragbarkeit der Bäume wäre vorauszusehen, daß dieselbe 20 Jahre allmählich steigender, 30 Jahre der höchsten und 10 Jahre allmählich abnehmender Erträge, im Ganzen also 60 Jahre umfassen wird. Dieser Einteilung gemäß werden die jährlichen Durchschnitts-Erträge geschätzt auf: 35,95 und 60 Kilo.

Als Durchschnitts-Erlös darf p. Kztr., abzüglich aller Ernte- und Vertriebsspesen, der Betrag von 9 Mark angenommen werden. — Als mittleren Holzwert der abgehenden Bäume will die Taxe 24,50 Mark (netto) einsetzen.

Für die ganze Dauer der Tragbarkeit der Bäume sind schließlich vorzusehen:

1. Jährliche Kosten der Pflege, je . . . . 0,50 Mark.

2. Einbußen am Unternutzen und Erschwerungen des Betriebes der Unterkultur:

Vorgängige Erhebungen:

a) Die Einbußen am Unternutzen ermitteln sich für den Abschluß der I. Periode also:

Die durch die Krone des einzelnen Baumes beeinflußte Fläche umfaßt 65 qm = 0,65 a. Beträgt die Schädigung p. a wiederum 2 Mark, so erhält man für den gesamten Bestand:

$$0,65 \times 2 \times 80 = 6,5 \times 16 = 104,00 \text{ Mark.}$$

b) Hinsichtlich der Kosten des Betriebes der Unterkultur ist eine Steigerung derselben um weitere 20, also auf 40 Prozent $= 120 \times 0,40 = 48,00$ Mark in Rechnung zu ziehen.

Faßt man das Ergebnis mit Anschluß an dasjenige für die Vorperiode zusammen, so folgt:

Indirekter Aufwand am Beginne und am Ende der I. Periode der Tragbarkeit:

P. Hektare: .. 32,00 + 24,00 Mark und 104,00 + 48,00 Mark,
zusammen . . . . 56,00 bezw. 152,00 Mark
P. Baum (Durchschnitt) . . . . 0,70 „ 1,90 „
Von dem Rohertrage der Unterkultur . . . 11,20 „ 30,40 Prozent.

Für die II. und III. Periode der Tragbarkeit (40 Jahre) bleiben die Höchstbeträge von 152 Mark stationair.

Frage: Wie ließe sich auf diesen Grundlagen die Rentabilität der Anlage ermitteln, wenn für die Aufwendungen in der Vorperiode ein Zins inkl. Risikoprämie von 8, für die Kosten und die Erlöse in der ganzen Zeit der Tragbarkeit der Bäume aber nur 6 Prozent beansprucht wird?

A. Die Aufgabe kann in zwiefachem Gesichtspunkte aufgefaßt werden, indem man entweder:

1. Den Betrag der bis zum Beginne der Tragbarkeit der Bäume angewachsenen Kosten der Herstellung der Anlage dem auf den gleichen Zeitpunkt bezogenen Ertragswerte (Vorwerte) der zu erwartenden Rein-Einnahmen[1]) gegenüberstellt, oder aber:

2. Jene Anlagekosten als ein Kapital betrachtet, welches während der Zeitdauer der Tragbarkeit der Bäume durch deren Rein-Einnahmen verzinst und amortisiert werden soll, und dann untersucht, ob und in wie weit diese die Anforderungen des Kapitales übersteigen oder nicht erreichen, d. h. ein Gewinn oder ein Verlust entsteht.

1. Fall. Die Kosten der Herstellung der Anlage belaufen sich im Ganzen, also für 80 Bäume, bis zum Ablaufe von 10 Jahren auf folgende Beträge:

1. Erst- und einmaliger Aufwand für Ankauf und Pflanzung: $4{,}50 \times 80 = 360$ Mark. Prolongiert mit 8 Prozent auf 10 Jahre:

$$A = 360 \times 1{,}08^{10} = 360 \times 2{,}1589 = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 777{,}20 \text{ Mark.}$$

2. Laufende jährliche Kosten: $1{,}50 \times 80 = 120$ Mark. Prolongiert mit 8 Prozent auf 10 Jahre:

$$A = \frac{120 \times (1{,}08^{10} - 1)}{0{,}08} = \frac{120 \times 1{,}1589}{0{,}08} = \frac{139{,}07}{0{,}08} = 1\,738{,}38 \text{ Mark.}$$

3. Schädigungen an der Unterkultur und Erschwerungen in deren Betrieb:

Mit Hilfe einer einfachen, allerdings nicht streng genauen Rechnungsweise ermittelt sich die Summe, welche dieser indirekte Aufwand bis zum Ablauf von 10 Jahren erreicht, also:

Der erstjährige Betrag vergrößert sich um

$16 \times (1{,}08^{10} - 1) = 16 \times 1{,}1589 = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18{,}54$ Mark.

Der letztjährige Betrag ist . . . . . 56,00 „

Zusammen: 74,54 Mark.

Die Summe A aller Einzelposten beläuft sich also auf:

$$(16{,}00 + 74{,}54) \times \frac{10}{2} = 90{,}54 \times 5 = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 452{,}70 \text{ „}$$

Summa der Herstellungskosten 2 968,28 Mark.

Anmerkung. Der hier unter Ziffer 3 in Frage gestellte Nachwert würde sich in zutreffenderer Weise durch Heranziehung des freilich komplizierteren, durch die Formel XXVII angezeigten Verfahrens feststellen lassen. Darnach müßte sich, da die Kosten p. Jahr um $\frac{56 - 16}{10} = 4$ Mark, also immer um 0,25 des ursprünglichen Betrages von 16 Mark anwachsen, ergeben:

$$A = \frac{16 \times (1{,}08^{10} - 1)}{0{,}08} + \left\{ \frac{16 \times 0{,}25}{0{,}08} \times \left[\frac{1{,}08^{10} - 1{,}08}{0{,}08} - (10 - 1) \right] \right\} = 456{,}08 \text{ Mark.}$$

Der oben berechneten Summe von 2 968,28 Mark muß nun der Vor-

[1]) Nicht „Reinerträge“, sondern die um den laufenden direkten und indirekten Aufwand reduzierten Brutto-Erträge.

wert der in 60 Jahren der Tragbarkeitsdauer der Bäume einkehrenden Rein-Einnahmen, soll überhaupt von einer Rentabilität der Anlage die Rede sein, mindestens gleichkommen. Die Prüfung auf dieses Verhältnis ergibt nun für diesen Vorwert gemäß dem in den früher behandelten Beispielen dargelegten Rechnungsgange Folgendes:

Da die Brutto-Erträge der I. Periode einen Durchschnitt von den innerhalb dieses Zeitraumes steigenden Ernten darstellen, erscheint es zulässig, für die ihnen gegenüberzustellenden Kosten neben dem gleichen alljährlichen Aufwande auch das Mittel aus den allmählich zunehmenden indirekten Kosten heranzuziehen. Alsdann erhält man:

$0{,}50 \times 80 + \frac{56{,}00 + 152{,}00}{2} = 40{,}00 + 104{,}00 = 144{,}00$ Mark, und ist somit die jährliche Rein-Einnahme:

$(0{,}35 \times 9 \times 80) - 144 = 252 - 144 = 108$ Mark, oder p. Baum: 1,35 M.

Ferner ergibt sich für die

II. Periode: $(0{,}95 \times 9 \times 80) - [(0{,}50 \times 80) + 104 + 48] = 684 - 192 = 492$ Mark, oder p. Baum: 6,15 Mark.

III. Periode: $(0{,}60 \times 9 \times 80) - [(0{,}50 \times 80) + 104 + 48] = 432 - 192 = 240$ Mark, oder p. Baum: 3,00 Mark.

Und schließlich für den Holzwert der Bäume: $24{,}5 \times 80 = 1\,960$ M.

Somit lautet die Berechnung des Vorwertes aller Rein-Einnahmen:

$$\text{I: } \frac{108 \times (1{,}06^{20} - 1)}{1{,}06^{20} \times 0{,}06} = \frac{108 \times 2{,}207}{3{,}207 \times 0{,}06} = \frac{238{,}36}{0{,}1924} = \quad . \quad . \quad 1\,238{,}87 \text{ M.}$$

$$\text{II: } \frac{492 \times (1{,}06^{30} - 1)}{1{,}06^{20+30} \times 0{,}06} = \frac{492 \times 4{,}743}{18{,}42 \times 0{,}06} = \frac{2\,333{,}56}{1{,}1052} = \quad . \quad . \quad 2\,111{,}44 \text{ ,,}$$

$$\text{III: } \frac{240 \times (1{,}06^{10} - 1)}{1{,}06^{50+10} \times 0{,}06} = \frac{240 \times 0{,}791}{32{,}988 \times 0{,}06} = \frac{189{,}84}{1{,}9793} = \quad . \quad 95{,}91 \text{ ,,}$$

$$\text{Holzwert der abgehenden Bäume: } \frac{1\,960}{1{,}06^{60}} = \frac{1\,960}{32{,}988} = \quad 59{,}42 \text{ ,,}$$

Summa der Vorwerte: 3 505,64 M.

Zu genau dem gleichen Ergebnisse würde man natürlich auch gelangen, wenn man die laufenden Rein-Einnahmen der einzelnen Perioden auf den Zeitpunkt des Ablaufs der Lebensdauer der Bäume prolongiert, zu dem also erhaltenen Endwert den Reinerlös aus dem Holze addiert und die Summe beider Einnahmen auf den Zeitpunkt des Beginnes der Tragbarkeit der Bäume diskontiert. Auf diesem Wege erhält man:

$$A = \frac{[108 \times (1{,}06^{20} - 1) \times 1{,}06^{40}] + [492 \times (1{,}06^{30} - 1) \times 1{,}06^{10}] + [240 \times (1{,}06^{10} - 1)]}{0{,}06} + 1960$$

$$= 115\,643{,}90 \text{ Mark.}$$

$$a = \frac{115\,643{,}90}{1{,}06^{60}} = 3\,505{,}64 \text{ Mark (w. o.).}$$

Aus der also durchgeführten Rechnung geht schließlich hervor, daß der Vorwert aller zu gewärtigenden Einnahmen sich um $3\,505{,}64 - 2\,968{,}28 =$ **537,36** Mark höher belaufen würde, als der Nachwert sämtlicher bis zum

Beginne der Tragbarkeit der Bäume aufgewendeten Kosten, daß also die Rentabilität der Anlage außer Zweifel steht.

2. Fall. Hier handelt es sich um eine Vergleichung der in 60 Jahren der Tragbarkeit der Bäume zu beziehenden Durchschnitts-Rein-Einnahmen mit dem in dem gleichen Zeitraum jährlich fälligen Betrage der Zins- und Tilgungsraten von dem in der Pflanzung angelegten Kapital von 2 968,28 Mark. Die Ansprüche, welche dieserhalb geltend zu machen sind, betragen (nach der Tilgungsformel XII. b):

$$r = \frac{2\,968{,}28 \times 1{,}06^{60} \times 0{,}06}{1{,}06^{60} - 1} = \frac{2\,968{,}28 \times 32{,}988 \times 0{,}06}{31{,}988}$$

$$= \frac{97\,917{,}62 \times 0{,}06}{31{,}988} = \frac{5\,875{,}06}{31{,}988} = \mathbf{183{,}66(3)}\ \text{Mark.}$$

oder: 6,19, genauer: 6,18751 Prozent.

Nun berechnet sich der Nachwert der innerhalb 60 Jahren eingehenden Rein-Erlöse der Anlage mit Ablauf dieses Zeitraumes nach obiger Darstellung auf 115 643,90 Mark. Diesem Betrage entspricht aber (gemäß der Formel XIV. b) eine jährlich in gleichen Raten wiederkehrende Rente von:

$$r = \frac{115\,643{,}90 \times 0{,}06}{1{,}06^{60} - 1} = \frac{6\,938{,}63}{31{,}988} = \mathbf{216{,}91(3)}\ \text{Mark.}$$

Woraus dann folgt, daß der durchschnittliche Jahres-Reinertrag der Obstbaumpflanzung die Anforderungen, welche sich aus dem gesamten Kapitalaufwande ergeben, um 216,91(3) — 183,66(3) = 33,25 Mark übersteigt. In der Tat würde dann der Vorwert dieses 60 Jahre lang laufenden, als Rente zu betrachtenden Überschusses von 33,25 Mark genau den Betrag des im Falle 1 berechneten Gewinn-Kapitales von 537,36 Mark erreichen. Die Richtigkeit dieses Verhältnisses wird durch eine Kontrollrechnung bewiesen, nach welcher man (in Anwendung der Formel XII. a.) erhält:

$$a = \frac{33{,}25 \times 31{,}988}{32{,}988 \times 0{,}06} = \frac{1\,063{,}60}{1{,}9793} = 537{,}36\ \text{Mark (w. o.).}$$

Das gleiche Ergebnis liefert übrigens eine einfache Proportion, welche lautet:

$$6{,}18751 : 100 = 33{,}25 : x;\ x = 537{,}36\ \text{Mark (w. o.).}$$ [1]

[1]) In Fällen vorliegender Art dürfte es nicht ohne Interesse sein, den Reinertragswert auch für das Jahr der Anpflanzung der Bäume zu ermitteln. Die Rechnung würde dann auf eine weitere Diskontierung um 10 Jahre hinauslaufen. Als Ausgangspunkt und Grundlage hierfür können dann benutzt werden:

Entweder die Differenz der mit Ablauf von 60 Jahren entstehenden Endwerte:

$$\left(\frac{115\,643{,}90 - 97\,917{,}62}{1{,}06^{70}} = \frac{17\,726{,}28}{59{,}076}\right);$$

oder aber das am Beginne des Tragbarkeitsalters der Bäume erzielte Gewinn-Kapital:

$$\left(\frac{537{,}36}{1{,}06^{10}} = \frac{537{,}36}{1{,}7908}\right);$$

Anmerkung. Gegenüber der Benutzung des Grundstücks ohne dessen Besatz mit Obstbäumen, also lediglich als Ackerland, bedeutet die Erhöhung des Reinertrages, da bei dessen Ermittlung die Schädigungen an der Unterkultur in Abzug gebracht wurden, eine über die ganze Dauerzeit der Erträge sich erstreckende Steigerung der Grundrente um 33.25 Mark, bezw. einen entsprechenden Mehrertrag über den zu erzielenden Pachtzins.

288. Während der Besitzer des in Aufgabe 287 bezeichneten Grundstücks sich mit den dort vorgeführten Erwägungen und Berechnungen befaßt, wird ihm von einem in der Obstkultur erfahrenen Fachmann der Rat erteilt, die in Betracht gezogene Fläche — statt ausschließlich mit Kernobstbäumen und diese in der angegebenen Pflanzweite — mit Kernobst- (Apfel-) und Steinobst- (Zwetschgen-)Bäumen in der Weise zu bepflanzen, daß dieselben, bei einem Abstande der Reihen von 12 m, innerhalb der Reihen, regelmäßig zwischen Kern- und Steinobst wechselnd, auf 6 m Entfernung zu stehen kommen. Für eine solche Anordnung wird geltend gemacht, daß sie eine vorteilhaftere Ausnutzung der Luft und des Lichtes ermögliche, eine sehr erheblich größere Schädigung an der Unterkultur jedoch nicht verursache, sodann aber, daß die Steinobstbäume, deren Tragbarkeit schon mit dem 6ten Jahre (nach der Pflanzung) beginnt und dann während 27 Jahren andauert, einen ansehnlichen Vornutzen abwerfen, dabei aber durch ihre bekanntlich weniger ausgedehnte Krone das Wachstum und Gedeihen der Kernobst-Zwischenbäume kaum beeinträchtigen, so daß von diesen nach Ablauf der Lebensdauer ihrer Begleiter in den noch verbleibenden $60 - 27 = 33$ Jahren ein durchaus normaler Ertrag zu erwarten ist.

Die Grundlagen für eine Rentabilitätsberechnung sind in den nachfolgend umschriebenen Voraussetzungen gegeben:

1. Pflanzung im gleichschenkligen Dreieck: Standfläche für den einzelnen Baum $= 12 \times 6 = 72$ qm. Zahl der Bäume p. ha: 140 (rund), davon 70 Apfel- und ebenso viele Zwetschgenbäume.
2. Kosten der Anlage:
   a) Einmalige: Für die Kernobstbäume p. Stück 4,50, für die Steinobstbäume 3.33 Mark.
   b) Laufende:[1])

---

oder endlich der als eine um 10 Jahre aufgeschobene Rente erscheinende jährliche Reinertrag:
$$\left(\frac{33.25 \times (1.06^{60} - 1)}{1.06^{70} \times 0.06} = \frac{1\,063.60}{3.5446}\right).$$
Auf jedem dieser Wege erhält man einen Anfangswert von **300.06** Mark.

Eine Kontrollrechnung ergibt dann, daß dieser Wert mit Ablauf von 10 Jahren genau dem Gewinn-Kapital von 537,36 bezw. den 60 Jahre laufenden Reinerträgen von 33,25 Mark entspricht.

[1]) Es soll nicht verkannt werden, daß eine Veranschlagung der für den Jungwuchs, wie auch für die auf der Stufe der Tragbarkeit stehenden Bäume (vid. unten) erforderlichen direkten und indirekten Kosten des gemischten Bestandes im Verhältnisse zu denjenigen der ausschließlichen Kernobstpflanzung recht erheblichen Schwierigkeiten begegnet. Der Grund hierfür liegt darin, daß der Arbeitsaufwand für die Pflege der Bäume und für die Nachhilfe in der Unterkultur, ebenso die Schädigungen des Unternutzens keineswegs eine der Zahl der Bäume proportionale Größe bilden. Dabei ist namentlich an den Einfluß der Verschiedenheit der Bäume in Bezug auf Stammhöhe und auf Ausdehnung der Krone, ferner aber an die Er-

aa) Direkter jährlicher Aufwand: Im Mittel 75 Prozent der Kosten für die Kernobstbäume (w. o.), übertragen auf den gesamten Aufwand, d. i. $0{,}75 \times 1{,}50 \times 140 = 157{,}50$ Mark.

bb) Einbußen am Unternutzen und Erschwerungen des Betriebes der Unterkultur: Erstere ($^2/_3$ des im reinen Kernobstbestande auf den einzelnen Baum entfallenden Betrages) in 10 Jahren steigend von 4,66 bis auf 37,33 Mark, letztere (bei Annahme einer Erhöhung des Betrages für den reinen Kernobstbestand um $^1/_6$) von 14,00 bis auf 28,00 Mark.

Hiernach würden sich für beide Posten zusammen 18,66 bezw. 65,33 Mark und 3,73 bezw. 13,07 Prozent des Durchschnitts-Rohertrages der Unterkultur berechnen.

3. Hinsichtlich der naturalen und der Gelderträge der Apfelbäume ist an den in Aufgabe 287 verzeichneten Schätzungsergebnissen festzuhalten.

Für die Zwetschgenbäume wird angenommen, daß die Ernten im Durchschnitt p. Baum und Jahr betragen:

In 8 Jahren der I. Periode . . . 16 Kilo,
in 13 „ „ II. „ . . . 35 „ ,
in 6 „ „ III. „ . . . 25 „ .

Im Mittel von 27 Jahren: 27,15 Kilo.

Der nach Abzug aller Ernte- und Vertriebsspesen verbleibende Erlös darf auf 7 Mark p. Kztr. veranschlagt werden. Und für die Netto-Einnahme aus dem Holze der abgehenden Bäume rechtfertigt sich ein Ansatz p. Stück von 12,50 Mark.

4. Analog der in Aufgabe 287 dargelegten Rechnungsweise sind nun für die ganze Dauer der Tragbarkeit der Bäume des gemischten Bestandes noch in Betracht zu ziehen:[1])

a) Jährliche Kosten der Pflege, p. Stück: . . . . . . 0,40 Mark.

b) Einbußen am Unternutzen: Nach dem Maßstabe wiederum von $^2/_3$ des auf den einzelnen Baum der reinen Kernobstpflanzung entfallenden Betrages ergibt sich eine Steigerung von 37,33 auf 121,33 Mark. Für die Erschwerungen im Betriebe der Unterkultur, bezogen auf das ganze Grundstück, erhält man bei Annahme eines Zuschlags von $^1/_6$ (w. o.) zu dem für die ausschließliche Kernobstpflanzung berechneten Werte die Beträge von 28,00 und 56,00 Mark. — Somit erhöhen sich beide Glieder des Aufwandes von 65,33 auf 177,33 Mark, d. i. von 13,07 auf 35,46 Prozent des Rohertrages der Unterkultur.

---

leichterung zu erinnern, welche der Mischbestand in Bezug auf die Verteilung der Arbeit gewährt. Um diese Momente in ihrem Zusammenwirken zahlenmäßig zu würdigen, bedarf es allerdings eingehender Beobachtungen, praktischen Blickes und sorgfältiger Erwägung. Die vorliegenden Ansätze sind nur als das Ergebnis einer aus konkreten Verhältnissen schöpfenden Schätzung zu betrachten; die Bedeutung einer allgemein verwertbaren Richtschnur kann für dieselben nicht beansprucht werden.

[1]) S. vorstehende Fußnote [1] S. 309.

Es soll nunmehr auf der gegebenen Grundlage die Rentabilitätsstellung der gemischten Anlage nach den bereits in Aufgabe 287 dargelegten Gesichtspunkten unter Benutzung der gleichen Zinsansätze nachgewiesen werden. Wie gestaltet sich die Rechnung?

A. In Erwägung, daß namentlich der indirekte Aufwand, welcher in den Erschwernissen des Betriebes der Unterkultur beruht, aus dem gemeinsamen Verhalten der beiden Obstarten hervorgeht, also einer getrennten Behandlung unzugänglich ist, wird die Rechnung auf dem Wege der Zusammenfassung der Ergebnisse aufzubauen sein. Demgemäß gestaltet sich dieselbe, wie folgt:

1. Kosten der Herstellung der Anlage, bezogen auf den Abschlufs der ersten 10 Jahre.[1])

a) Ankauf und Pflanzung: $(4{,}50 + 3{,}33) \times 70 = 7{,}83 \times 70 = 548{,}10$ M. Prolongiert mit 8 Prozent auf 10 Jahre:

$A = 548{,}10 \times 1{,}08^{10} = 548{,}10 \times 2{,}1589 =$ . . . 1 183,29 M.

b) Direkter jährlicher Aufwand:

Hierbei ist zu beachten, daß derselbe für den gemischten Bestand (A) sich auf nur 6 Jahre erstreckt, der betreffende Endbetrag also einfach auf weitere 4 Jahre zu prolongieren ist, indessen für diesen abgekürzten Zeitraum noch die Kosten für den Kernobstbestand ($A_{,}$) und diejenigen der Pflege des bereits in das Tragbarkeitsalter eingetretenen Steinobstbestandes ($A_{,,}$) — p. Baum 0,30 Mark — in Rechnung zu ziehen sind. Darnach ergibt sich:

$$A = \frac{1{,}125 \times 140 \times (1{,}08^6 - 1)}{0{,}08} \times 1{,}08^4$$

$$= \frac{157{,}50 \times 0{,}5869}{0{,}08} \times 1{,}3605 = \frac{12\,576}{8} = 1\,572{,}00 \text{ M.}$$

$$A_{,} = \frac{1{,}50 \times 70 \times (1{,}08^4 - 1)}{0{,}08}$$

$$= \frac{105 \times 0{,}3605}{0{,}08} = \frac{3\,785{,}25}{8} = \quad \ldots \quad 473{,}16 \text{ „}$$

$$A_{,,} = \frac{0{,}30 \times 70 \times (1{,}08^4 - 1)}{0{,}08}$$

$$= \frac{21 \times 0{,}3605}{0{,}08} = \frac{757{,}05}{8} = \quad \ldots \quad 94{,}63 \text{ „}$$

2 139,79 „

Zu übertragen: 3 323,08 M.

[1]) Dem oben angegebenen Leitmotiv gemäß muß hier auch der Aufwand für die Steinobstpflanzung einbezogen werden, welches Verfahren dann erfordert, daß der bis zum Ende der ersten 6 Jahre entstandene Kostenbetrag auf den Zeitpunkt des Ablaufes weiterer 4 Jahre prolongiert, hingegen von der erhaltenen Summe der Endwert der innerhalb dieses Zeitabschnittes eingehenden Rein-Einnahmen in Abzug gebracht wird. —

Übertrag: 3 323,08 M.

c) Schädigungen am Unterwuchs und Belastung des Betriebes der Unterkultur: Im Ganzen steigend in 10 Jahren von 4,66 + 14,00 = 18,66 M. auf 37,33 + 28 = 65,33 M. Nach dem einfacheren, allerdings nur annähernd zutreffenden, in Aufgabe 287 (S. 306) dargelegten Verfahren würde man erhalten:

$$A = [18,66 + 18,66 \times (1,08^{10} - 1) + 65,33] \times \frac{10}{2}$$

$$= (18,66 + 21,625 + 65,33) \times 5 = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 528,09 \text{ „}$$

Anmerkung. In Anwendung der zu genaueren Ergebnissen führenden komplizierteren Formel XXVII. (Vgl. auch die Aufgabe 287, S. 306) würde man finden:

$$A = \frac{18,66 \times (1,08^{10} - 1)}{0,08} + \left\{\frac{18,66 \times 0,25}{0,08} \times \left[\frac{1,08^{10} - 1,08}{0,08} - (10 - 1)\right]\right\}$$

$$= 531,97 \text{ Mark.}$$

Zusammen: 3 851,17 M.

Von dieser Summe ist nun gemäß obiger Darlegung wieder der Wert der Erträge in Abzug zu bringen, welche die Steinobstpflanzung in den ersten 4 Jahren der Tragbarkeit (I. Periode) liefert. Nimmt man als Höchstertrag dieses Zeitraumes 32 Kilo an, so erhält man einen mittleren Ertrag für die in Rede stehenden 4 Jahre von 8 Kilo à 0,07 = 0,56 Mark, und für 70 Bäume = 39,20 Mark. Dieser Einnahme entspricht aber ein Endwert nach 4 Jahren von:

$$A_{,} = \frac{39,20 \times (1,08^4 - 1)}{0,08} = \frac{39,20 \times 0,3605}{0,08} = \frac{14,132}{0,08} = \qquad 176,65 \text{ M.}$$

Summa der Herstellungskosten: 3 674,52 M.

2. Vorwert aller während der Lebensdauer der Bäume zu erwartenden Reinerträge, bezogen auf den Ablauf der ersten 10 Jahre.

Verfolgt man die Ergebnisse im Anschlusse an die einzelnen Zeitabschnitte der Tragbarkeit der Kernobstbäume, so berechnen sich die nach Abzug aller weiteren Betriebskosten verbleibenden Einnahmen aus der Pflanzung also:

Erster Abschnitt.

Ertrag. An Äpfeln:

I. Periode (20 Jahre), p. Jahr: 0,35 Kztr. à 9 M. × 70 = 220,50 M.

An Zwetschgen:

I. Periode, zweite Hälfte (4 Jahre):

$$\frac{16 + 32}{2} \times 4 = 24 \times 4 = \quad 96 \text{ Kilo}$$

II. „ (13 Jahre): 35 × 13 = . . 455 „

III. „ erste Hälfte (3 Jahre): 25 × 3 = 75 „

Zusammen: 626 Kilo

Im Durchschnitt von 20 Jahren, p. Jahr:

0,313 Kztr. à 7 M. × 70 = ... 153,37 „

Zu übertragen: 373,87 M.

Übertrag: 373,87 M.

Aufwand.

1. Jährliche direkte Kosten: $0,40 \times 140 =$ . . . 56,00 M.
2. Einbußen am Unterwuchs: $\frac{37,33 + 121,33}{2} =$ 79,33 „
3. Erschwerungen des Betriebes der Unterkultur: $\frac{28,00 + 56,00}{2} =$ . . . . 42,00 „

177,33 „

Reinertrag (1): 196,54 M.

Zweiter Abschnitt.

Ertrag. a) An Äpfeln:

II. Periode ($30 - 27 = 3$ Jahre): 0,95 Kztr. à 9 M. $\times$ 70 = 598,50 M.

An Zwetschgen:

III. Periode, zweite Hälfte (3 Jahre):
0,25 Kztr. à 7 M. $\times$ 70 = ... 122,50 „

721,00 M.

Aufwand.

1. Jährliche direkte Kosten (wie oben) . . . . 56,00 M.
2. Einbußen am Unterwuchs . . . . 121,33 „
3. Erschwerungen des Betriebes der Unterkultur 56,00 „

233,33 „

Reinertrag (2 a): 487,67 M.

Ertrag. b) An Äpfeln:

II. Periode ($30 - 3 = 27$ Jahre): 0,95 Kztr. à 9 M. $\times$ 70 = 598,50 M.

Aufwand.

Vid. Aufg. 287: $(0,50 \times 70) + (0,65 \times 2 \times 70) + 48 =$ 174,00 „

Reinertrag (2 b): 424,50 M.

Dritter Abschnitt.

Ertrag. An Äpfeln:

III. Periode (10 Jahre): 0,60 Kztr. à 9 M. $\times$ 70 = 378,00 M.

Aufwand. Vid. Aufgabe 287: . . . . 174,00 „

Reinertrag (3): 204,00 M.

Für den Netto-Holzwert der abgehenden Bäume erhält man schließlich: $(24,5 + 12,5) \times 70 = 2\,590$ Mark.

Hiernach berechnet sich der Vorwert aller dieser Rein-Erlöse also:

Erster Abschnitt:

$$\frac{196,54 \times (1,06^{20} - 1)}{1,06^{20} \times 0,06} = \frac{196,54 \times 2,207}{3,207 \times 0,06} = \frac{433,764}{0,19242} = \ldots\ 2\,254,25 \text{ M.}$$

Zweiter Abschnitt:

$$\text{(a):}\ \frac{487,67 \times (1,06^{3} - 1)}{1,06^{20+3} \times 0,06} = \frac{487,67 \times 0,191}{3,82 \times 0,06} = \frac{93,145}{0,2292} = \ldots\ 406,39 \text{ „}$$

$$\text{(b):}\ \frac{424,50 \times (1,06^{27} - 1)}{1,06^{23+27} \times 0,06} = \frac{424,50 \times 3,822}{18,42 \times 0,06} = \frac{1\,622,439}{1,1052} = 1\,468,00 \text{ „}$$

Zu übertragen: 4 128,64 M.

Dritter Abschnitt: Übertrag: 4 128,64 M.

$$\frac{204{,}00 \times (1{,}06^{10} - 1)}{1{,}06^{50+10} \times 0{,}06} = \frac{204{,}00 \times 0{,}791}{32{,}988 \times 0{,}06} = \frac{161{,}364}{1{,}9793} = \ldots \quad 81{,}53 \text{ „}$$

Holzwert der abgehenden Bäume:

$$\text{Apfel-: } \frac{24{,}50 \times 70}{1{,}06^{60}} = \frac{1\,715}{32{,}988} = \ldots\ldots \quad 51{,}99 \text{ M.}$$

$$\text{Zwetschgen-: } \frac{12{,}50 \times 70}{1{,}06^{27}} = \frac{875}{4{,}822} = \ldots\ldots \quad 181{,}46 \text{ „}$$

233,45 „

Summa des Vorwertes aller Reinerträge: 4 443,62 M.

Selbstverständlich erhält man wieder das gleiche Resultat, wenn man die Einnahmen der einzelnen Abschnitte auf den Zeitpunkt des Abschlusses der Lebensdauer der Bäume prolongiert, zu dem also ermittelten Nachwerte den Reinerlös aus dem Holze (denjenigen von den Steinobstbäumen auf einen weiteren Zeitraum von 60 — 27 = 33 Jahren bezogen) addiert und die Summe beider Einnahmen auf den Zeitpunkt des Beginnes der Tragbarkeit der Bäume diskontiert. Das Ergebnis ist dann:

$$A = \frac{[196{,}54 \times (1{,}06^{20}-1) \times 1{,}06^{40}] + [487{,}67 \times (1{,}06^{3}-1) \times 1{,}06^{37}] + [424{,}5 \times (1{,}06^{27}-1) \times 1{,}06^{10}] + [204 \times (1{,}06^{10}-1)]}{0{,}06}$$

$$+ 1\,715 + (875 \times 1{,}06^{33}) = 146\,585{,}97 \text{ Mark.}$$

$$a = \frac{146\,585{,}97}{1{,}06^{60}} = 4\,443{,}62 \text{ Mark (w. o.).}$$

Die Rechnung tut also dar, daß der Vorwert aller Rein-Erlöse den Nachwert sämtlicher bis zum Beginne der Tragbarkeit der Bäume aufgewendeten Kosten um 4 443,62 — 3 674,52 = 769,10 Mark übertrifft, sodann aber, daß die Rentabilität der gemischten Pflanzung derjenigen der ausschließlichen Kernobstpflanzung um 769,10 — 537,36 = 231,74 Mark überlegen ist.

Fragt man ganz im Sinne der Aufgabe 287 weiter, wie sich der Vorwert der Durchschnitts-Rein-Erlöse zu den Anforderungen der Kapital-Anlage verhält, so wird die Antwort folgendermaßen lauten:

Der Unternehmer hat für Zins und Amortisation des aufgewendeten Kapitales (nach der Formel XII. b) geltend zu machen:

$$r = \frac{3\,674{,}52 \times 1{,}06^{60} \times 0{,}06}{1{,}06^{60} - 1} = \frac{3\,674{,}52 \times 32{,}988 \times 0{,}06}{31{,}988} = \frac{7\,272{,}864}{31{,}988}$$

$= \mathbf{227{,}36}(2)$ Mark, oder wiederum 6,1875, rund 6,19 Prozent.

Der Nachwert der innerhalb 60 Jahren eingehenden Rein-Einnahmen beläuft sich aber, wie oben gezeigt wurde, auf 146 585,97 Mark, einen Betrag, welchem (nach Formel XIV. b) eine in jährlich gleichen Raten wiederkehrende Rente entspricht von:

$$r = \frac{146\,585{,}97 \times 0{,}06}{1{,}06^{60} - 1} = \frac{8\,795{,}158}{31{,}988} = \mathbf{274{,}95}(2) \text{ Mark.}$$

Mit diesem Ergebnisse wird schließlich dargetan, daß die durchschnittlichen Rein-Erlöse der Obstbaumanlage die Anforderungen des für

diese aufgewendeten Kapitales um 274,95(2) — 227,36(2) = 47,59 Mark überholen, womit zugleich ausgedrückt ist, daß der Vorwert dieses 60 Jahre lang laufenden, als Rente aufzufassenden Überschusses von 47,59 Mark genau den Betrag des Gewinn-Kapitales von 769,10 Mark erreichen muß. Eine Bestätigung dessen liefert die Kontrolle in Anwendung der Formel XII. a, welche ergibt:

$$a = \frac{47,59 \times 31,988}{32,988 \times 0,06} = \frac{1\,522,309}{1,9793} = 769,10 \text{ Mark (w. o.).}$$

Oder, nach einer einfachen Proportion:

$$6,1875 : 100 = 47,59 : x; \quad x = 769,10 \text{ Mark (w. o.).}$$

Unter den gegebenen Voraussetzungen würde somit die kombinierte Kern- und Steinobst-Pflanzung einen um jährlich 47,59 — 33,25 = 14,34 Mark höheren Reinertrag abwerfen, als die ausschließliche Kernobstpflanzung.

C. Forstkultur.

1. Erläuternde Vorbemerkungen.

Es sind besondere, zum Teil recht weitgehende Anforderungen, welche an die Aufgabe einer Vorausberechnung des Betriebs-Erfolges der Forstkultur gestellt zu werden pflegen. Dieselben sind in der Eigenart dieses Zweiges der Bodenbewirtschaftung begründet, beziehen sich aber nicht sowohl auf den formalen Rechnungsgang, als vielmehr auf die Beschaffung geeigneter Grundlagen für die einzuführenden Größenverhältnisse. Dabei stehen, in welcher Fassung auch die Probleme auftauchen mögen, zunächst die Feststellung der naturalen Erträge und anschließend hieran die Bewertung derselben, sowie die Ermittlung der Anlage- und der Betriebs-Kosten im Vordergrund.

Für die Veranschlagung der mit der fortschreitenden Entwicklung des Holzwuchses auf dessen verschiedenen Altersstufen zu gewärtigenden naturalen Erträge (Hauptbestand und Vorerträge) kann in jedem Einzelfalle auch bei gewissenhaftester Ausschau selbstverständlich doch immer nur ein kaum mehr als annähernd zutreffendes Ergebnis beansprucht werden. Auf die Verhältnisse der Forstwirtschaft ist das in der Landwirtschaft vielfach angewandte Prinzip, nach welchem die Größe der Ernten auf Grundlage eines besonderen, im naturwissenschaftlichen und ökonomischen Gesichtspunkte aufgebauten Systems der Bonitierung des Bodens beurteilt wird, aus naheliegenden Gründen nicht übertragen worden. An seine Stelle tritt daher im Bereiche des Waldbau's dasjenige der Sammlung umfassender direckter Beobachtungen über die Erträge, welche die einzelnen Holzarten bei „normalem" Bestande in je verschiedenen, nach Maßgabe der örtlichen Beschaffenheit des Bodens und der Lage abgestuften sog. Standorts-Klassen zu liefern vermögen. In dieser Richtung sind nun seither von mehreren Autoritäten des Forstfaches, so namentlich von Preßler, Grebe, Baur, Burckhardt, Hartig, v. Feistmantel,

Schwappach u. a. m., sehr bedeutsame gründliche Untersuchungen, allerdings seither nur über das Verhalten der reinen, durch je eine Holzart vertretenen, und vornehmlich der dem Betriebe des Hochwaldes angehörenden Bestände, ausgeführt worden, deren Ergebnisse, bezogen auf je 10 bezw. auch 5 jährige Altersperioden, in den weitbekannten sog. Ertragstafeln vorliegen. Obwohl hiernach die Formation der Ertragsklassen nicht von einer genauen Umschreibung der Einzelmerkmale jeder Standortsgüte ausgeht, vielmehr auf einer ordnenden Vergleichung von Erfahrungstatsachen der Praxis beruht, bildet doch der Inhalt jener Tafeln wenigstens innerhalb der betreffenden Gebiete eine wertvolle und kaum zu entbehrende Richtschnur für die Einschätzung der Walderträge. Mit dem Hinweis auf diese Beziehungen ist übrigens zugleich angedeutet, daß es bei einer vergleichenden Berechnung der ökonomischen Erfolge der landwirtschaftlichen und der Forstkultur nur ausnahmsweise angehen mag, aus dem Ergebnisse der Bonitur des landwirtschaftlich benutzten Bodens ohne Weiteres auf eine entsprechende forstliche Standortsklasse für die in der Örtlichkeit zunächst in Betracht fallende Holzart zu schließen.

Wenn in Rechnungen, welche der Information über die Grundzüge des Verfahrens zu dienen haben, aus naheliegenden Motiven von den in den Ertragstafeln verzeichneten „normalen" Größen ausgegangen wird, so ist dem gegenüber doch daran zu erinnern, daß die Benutzung dieser Angaben für den in der Praxis gegebenen Einzelfall selbst dann, wenn über die Klassenzugehörigkeit des Standortes ein Zweifel nicht besteht, in so fern Vorsicht erfordert, als die Erträge unter sonst gleichen Voraussetzungen auch je nach der Art der Betriebsführung, so z. B. der Einrichtung (Beginn, zeitliche Intervallen und Grad) der Durchforstung, um die vorgesehene Mittellinie schwanken können, wie denn überhaupt das Ertragsverhältnis der Waldwirtschaft c. p. unter dem Einflusse der Maßregeln steht, welche die zum direkten Eingreifen berufene obere Leitung anwendet. Und überdies ist doch auch des Risiko's zu gedenken, mit welchem die Waldbestände durch die — freilich lokal in verschiedenem Grade schwebende — Gefahr des Eintritts außergewöhnlicher Schädigungen (Sturm, Schneedruck, Insektenfraß usw.) belastet sind.

Wie bereits einleitend (S. 281) hervorgehoben wurde, unterscheidet sich der Betrieb des Waldbau's in so fern von demjenigen der verbreitetsten Zweige landwirtschaftlicher Bodenkultur, als er es mit Einrichtungen zu tun hat, welche sich über je längere Zeiträume erstrecken. Aus diesem Verhalten erwächst aber der Ermittlung seiner wirtschaftlichen Erfolge eine Reihe schwieriger Aufgaben. Dies aus dem Grunde, weil die mitbestimmenden Wertgrößen während sehr gedehnter Fristen von erheblichen Schwankungen betroffen werden können. Hierbei kommen in erster Linie die auf das Rechnungsergebnis in hohem Grade einflußreichen Verschiebungen in der Gestaltung der Holzpreise im Allgemeinen und die Änderungen in dem Preisverhältnisse der einzelnen Sortimente in Betracht. Ähnlich verhält es sich mit den Fluktuationen des — in der Forstwirtschaft aus besonderen und bekannten Gründen zwar relativ niedrig zu bemessenden — Zinsfußes, dessen Bestimmung, sei es für die Zwecke der Prolongierung und bezw. Diskontierung, oder auch der Kapitalisierung von Kosten- und Ertragswerten, oder der Ermittlung der bezüglichen Anforderungen vom Kapitalwert vorrätiger Bestände nicht umgangen werden kann. Und schließlich muß auch noch erwogen werden, daß das Kapital, welches der je einmalige Kulturaufwand und dann die laufenden jährlichen

Ausgaben (Regiekosten) repräsentieren, insbesondere in Anbetracht der zeitlichen Bewegung der Arbeitslöhne, keineswegs eine fest umschriebene Größe bildet. Muß nun auch zugegeben werden, daß es dem aufmerksamen Beobachter der wirtschaftlichen Entwicklung in fortgesetzt eingehender Würdigung auch der Statistik gelingt, ein ungefähr zutreffendes Bild von der künftigen Gestaltung aller dieser Verhältnisse zu entwerfen, so kann auch im günstigsten Falle eben doch nur von einer Annäherung die Rede sein. Und da nun einmal nicht alle Eventualitäten vorschauend sicher erfaßt werden können, so entspricht es auch der Pflicht der Gewissenhaftigkeit, der Vorbehalte eingedenk zu bleiben, welche an die Rechnungsergebnisse zu knüpfen sind.

Die forstwirtschaftliche Produktion ist das Ergebnis planmäßig eingeleiteten Zusammenwirkens von mehreren Faktoren, sog. Produktionsmitteln. Dieselben bestehen, durchaus analog den Verhältnissen in der Landwirtschaft, in dem Kapital des Grund und Bodens, dem Betriebskapital und der Arbeit. Das Grundkapital umfaßt alle dauernd immobilen Wert-Anlagen auf die Standortsfläche des Waldes. Zum Betriebskapitale gehören die gesamten Aufwendungen für Herstellung der Pflanzung (künstliche Verjüngung) oder Nachbesserungen an dem aus natürlicher Verjüngung hervorgegangenen Nachwuchs, für Verwaltung, Schutz und Steuern, und für Arbeitslöhne. Je nach der Gestaltung des Betriebssystems kommt als wesentlicher Bestandteil desselben auch noch der Kapitalwert der jeweiligen Bestandes-Vorräte in Betracht. Bezüglich der Arbeitskosten ist indessen zu berücksichtigen, daß dieselben, soweit sie in einer bedungenen Vergütung (Gehalt von Angestellten und Lohn der Handarbeiter) bestehen, direkt aus dem Betriebskapitale bestritten werden. Zum Zwecke der Vereinfachung der Rechnung pflegt man in der Forstwirtschaft die Kosten der Fällung und Aufbereitung des Holzes (Erntekosten) von dem Bruttowerte desselben vorweg in Abzug zu bringen. (Erntekostenfreier Wert p. fm.)

Hinsichtlich derjenigen Glieder des Aufwandes, welche die persönlichen Dienstleistungen umfassen, nehmen nun allerdings die Kleinbegüterten, wie namentlich der eigentliche Bauernstand, eine im gegebenen Falle auch rechnungsmäßig wohl zu würdigende Sonderstellung ein, welche darin beruht, daß die Vertreter jener Besitzesstufen einen großen Teil oder gar die Gesamtheit der in ihrer privaten Waldwirtschaft auftauchenden Arbeiten mit eigenen, ohnedies zu unterhaltenden Kräften (Familien-Angehörigen und Dienstboten) ausführen. Die ökonomische Tragweite eines solchen Verhältnisses ist zumal aus dem Grunde recht offenbar, weil die meisten der Arbeitsverrichtungen, welche die Forstwirtschaft beansprucht, weniger von Zeit und Witterung abhängig sind, sich also zwischen diejenigen des landwirtschaftlichen Betriebes leicht einschieben lassen, in so fern aber als wohlfeiler zu bestreitende Füllarbeiten betrachtet werden können.

Ist das Wirtschaftssystem für eine Forstkultur genau umschrieben, so wird der Nachweis der Rentabilitätsstellung des Betriebes zunächst auf die Frage gerichtet werden müssen, wie hoch sich der Überschuß des unter den gegebenen Verhältnissen zu gewärtigenden Geldwert-Brutto-Ertrages über die für dessen Gewinnung erforderlichen Kosten, d. h. der Reinertrag i. w. S. oder auch die Betriebsrente beläuft. Das ist ein allbekannter und in allen Zweigen der Bodenkultur als berechtigt anerkannter Standpunkt. Mit der Darstellung des absoluten Reinertrages ist jedoch das wirtschaftliche Interesse an dem Ergebnisse noch keineswegs

erschöpft. Da derselbe nämlich aus der vereinigten Wirkung verschiedener Wert-Anlagen hervorgeht, so liegt auch die Frage nahe, welche Quoten von seinem Gesamtbetrage auf die verschiedenen Glieder des Produktionsfonds entfallen. Nun gebricht es aber begreiflich an irgend einem brauchbaren Maßstabe für eine derartige Aufteilung. Somit erübrigt für den eigentlichen Rechnungs-Abschluß der auch nach geläufiger Anschauung praktische Weg, die Renten, welche von den an sich weniger beständigen, indessen — abgesehen von etwa in Rechnung zu ziehenden Vorratwerten — an Größe zurücktretenden und immerhin noch leichter zu ermittelnden Bestandteilen des Produktionsfonds zu beanspruchen sind, festzustellen und von dem gesamten Reinertrage in Abzug zu bringen. Diese umfassen aber die verschiedenen Glieder des Betriebskapitales. Der also noch verbleibende Restbetrag der Betriebsrente stellt alsdann die eigentliche Bodenrente, d. h. den Reinertrag des der Forstkultur gewidmeten Grund und Bodens dar. Und wenn dieselbe als eine dauernde Rente aufgefaßt wird, bildet sie zugleich die Grundlage für die Berechnung des Bodenwertes. Liegt der Fall vor, daß auch der Bodenwert als Anlagekapital festgestellt werden kann, dann hindert allerdings nichts, die Ansprüche des gesamten Produktionsfonds der Betriebsrente gegenüberzustellen und die Differenz zwischen beiden Wertgrößen als Unternehmer-Gewinn bezw. -Verlust zu behandeln.

Wenn nun hiernach im gegebenen Falle das Rechnungsziel genau festgestellt werden kann, so wird man gleichwohl immer noch zu erwägen haben, wie sich die Kalkulation nach Maßgabe der typischen Einrichtungen gestaltet, welche innerhalb des gleichen Wirtschaftssystems vorkommen. Hierbei handelt es sich aber ganz vorzugsweise um den Hochwaldbetrieb, welcher bekanntlich dadurch ausgezeichnet ist, daß der aus Saat oder Pflanzung hervorgegangene Bestand nach einer an bestimmter Altersgrenze desselben einsetzenden und in der Folge periodisch wiederkehrenden Durchforstung bis zur Stufe weit vorgeschrittener Entwicklung — 60 bis 120 Jahre — beibehalten und alsdann nach seinem Abtriebe von einer auf der Kahlfläche durch Ansaat oder Pflanzung (Verjüngung) hergestellten Neukultur abgelöst wird. Im ausgesprochenen Großbetriebe der Hochwaldkultur, wie beispielsweise in demjenigen des Staates, der Gemeinden, Korporationen, Stiftungen und des privaten Großgrundbesitzes, pflegt diese auf den sog. jährlichen oder den Nachhaltigkeitsbetrieb eingerichtet zu werden. Man hat sich dabei vorzustellen, daß das gesamte Waldareal aus so vielen Schlägen besteht, als Umtriebsjahre angenommen sind. Alljährlich kommt der älteste Bestand auf je einem Schlag zum Abtriebe, und diesem folgt sodann unmittelbar wieder die Verjüngung. Es rücken also die jüngeren Bestände alljährlich um eine Entwicklungsstufe an das Abtriebsalter heran, während sich ihnen der Nachwuchs ebenmäßig und ununterbrochen anreiht. Auf diese Weise entsteht ein gleichmäßig unterhaltener Bestandes-Vorrat, eine Reserve, indessen der Hauptertrag von dem ältesten Bestande und die neben demselben aus den jüngeren Beständen regelmäßig eingehenden Vorerträge (Durchforstungen) eine jährlich und nachhaltig wiederkehrende Rente darstellen. — Anders liegt das Verhältnis, wenn, wie das im privaten Besitz und bei beschränkterem

Umfange der Waldfläche zutrifft, das einzelne abgeschlossene Grundstück je ein Mal in seiner ganzen Ausdehnung aufgeforstet wird. Alsdann ist von einem regelmäßigen Jahresertrage, von einer Nachhaltigkeit des Betriebes keine Rede. Die einzelne Anlage besteht für sich, sie entbehrt eines regelmäßig nachrückenden Ersatzes und wird nach dem Abtriebe in gleicher Ausdehnung durch Neukultur wieder hergestellt. Bis zum Eintritt des Hiebsalters liefert sie je nach bestimmten zeitlichen Zwischenräumen ihre Durchforstungserträge, schließlich aber erscheint mit Ablauf der ganzen Umtriebszeit, zugleich als Vorratswert, ein einmaliger Hauptertrag. Der Betrieb ist ein aussetzender, und die Reinerträge desselben bilden eine aussetzende ewige Rente.

Verfolgt man die hier vorgeführten Verhältnisse weiter, so wird sofort ersichtlich, daß auch die rechnerische Ermittlung der Bodenrente in beiden Betriebsweisen durchaus verschieden ist. Da man es im jährlichen Betriebe, wie bereits gezeigt wurde, mit immerwährenden Jahresrenten zu tun hat, steht eine Prolongierung und bezw. Diskontierung von Werten außer Frage. Für die Berechnung der je nach längeren Perioden einkehrenden Erträge des aussetzenden Betriebes aber wird dieselbe unbedingtes Erfordernis.

Es darf nun freilich nicht unbeachtet und unerwähnt bleiben, daß dem schlagweise eingerichteten Hochwalde analoge Verhältnisse häufig gerade auch im Kleinbesitze vorkommen, und demgemäß auch in diesem der sog. jährliche oder der Nachhaltigkeitsbetrieb seine Vertretung hat. Eine derartige Verfassung offenbart sich in dem besonders für Nadelholzkultur geeigneten sog. Plenter- (oder Femel-)Betrieb. Diese allerdings meist einer streng systematischen Durchführung entbehrende Wirtschaftsweise ist im Wesentlichen dadurch charakterisiert, daß in ihr ein gegliederter Schlagverband fehlt und die verschiedensten Altersklassen des Holzes auf jedem Teilstück der Fläche gruppenweise nebeneinander stehen. Solchen Bestandes-Einrichtungen entspricht denn auch eine eigenartige, freilich oft wenig geregelte Nutzung des Holzertrages, für welche im Übrigen vornehmlich die Rücksichten auf den laufenden Eigenbedarf, die zeitliche Verteilung der Arbeit und die Gestaltung der Konjunktur für die verschiedenen Holzsortimente entscheidend zu sein pflegen. Die nachhaltige Erneuerung der Bestände vollzieht sich aber hier nur auf dem Wege der natürlichen Verjüngung und, sorgfältige Bewirtschaftung des Waldes vorausgesetzt, ohne einen erheblichen direkten Kostenaufwand. Eigentliche Kahlschläge kommen innerhalb dieser Wirtschaftsart nicht vor.[1])

Dem Plenterwald in mehrfacher Hinsicht ähnlich verhält sich der in der Laubholzkultur vielfach vertretene, aus einer Verbindung von Hochwald und Niederwald bestehende Mittelwald, in welchem aber eine planmäßig geordnete Nutzung des Ober- und des Unterholzes gehandhabt und ein nachhaltiger Ersatz der Hochstämme durch den aus Samen hervorgegangenen oder durch Einpflanzungen hergestellten Nachwuchs, hier und

---

[1]) Sehr beachtenswert ist übrigens die Wahrnehmung, daß in der neuzeitlichen Forstliteratur der besonders für Kleinbegüterte vielerorts wohlgeeignete Plenterwald eingehender gewürdigt und auf eine rationelle Ausgestaltung desselben hingewirkt wird.

da auch wohl durch Beibehaltung besonders kräftiger, aus den Stöcken des bleibenden Unterholzes erwachsender Stämme gebildet wird. Und was den nur auf die kürzesten Umtriebsfristen eingerichteten Laubholz-Niederwald betrifft, so ist zu beachten, daß die Nachhaltigkeit seines Betriebes lediglich auf der Erneuerung des Bestandes durch den Stockausschlag des abgetriebenen Holzes beruht, ein Verhältnis, innerhalb dessen freilich auch das Verfahren nicht ausgeschlossen bleibt, in der Folge die älteren, minder ausschlagsfähigen Stöcke nach und nach durch Neupflanzungen zu ersetzen.

Bevor den nunmehr anzureihenden Rechnungsaufgaben näher getreten wird, sind noch einige besondere Vorbehalte geltend zu machen. Die Behandlung des Gegenstandes soll sich in engeren, bescheideneren Grenzen bewegen. Die Verhältnisse, welche die Betriebserfolge beeinflussen, variieren auch in der gleichen Örtlichkeit so zu sagen von Fall zu Fall, sind aber dabei überhaupt nicht so einfach geartet, wie es auf den ersten Blick scheinen mag. Manche der hierher gehörigen forsttechnischen Fragen entbehren überdies noch der Spruchreife und konnten daher in dem Rahmen unserer Anleitung nicht berührt werden. Die in Betracht gezogenen Beispiele sollen die Bestimmung tragen, in Anknüpfung an konkrete Fälle über den dem Verfahren zu Grunde liegenden Ideengang gerade diejenigen Interessenten ausreichend zu informieren, welche nicht zu den berufsmäßigen Vertretern des Forstfaches zählen. Dabei handelt es sich aber in erster Linie um die grundbesitzenden Landwirte.

Aber auch bezüglich der forstwirtschaftlichen Gebiete, aus welchen die Aufgaben schöpfen sollen, bedurfte es einer gewissen, durch die Rücksicht auf die gestellten Ziele nahegelegten Einschränkung. Die oben erwähnten Ertragstafeln, auf welche jeder des Beirates bedürftige Experte gerne zurückgreift, beziehen sich meist nur auf den Hochwald, und nur vereinzelt sind solche, unter Bezugnahme zugleich auf die Standortsklassen, auch für den Niederwald, so z. B. von Preßler, v. Fischbach, Feistmantel und Schindler, entworfen worden. In Ermangelung weiterer derartiger Beihilfen wurde daher bei der Auswahl der Beispiele ausschließlich der Betrieb des Hochwaldes und des Niederwaldes, von letzterem allerdings nur derjenige einer Abart (Eichenschälwald) in's Auge gefaßt, der Betrieb des Plenter- und des Mittelwaldes dagegen nicht behandelt. Wer sich überdies mit dem dargelegten Rechnungsgang überhaupt vertraut gemacht hat, wird auch für Fälle letzterer Art, sofern ihm nur das nach den Erfahrungen in der Örtlichkeit zur Verwendung geeignete Zahlenmaterial zur Verfügung steht, ohne irgend welche Schwierigkeit einen korrekten Nachweis des Betriebserfolges zu leisten vermögen.

Für die Formulierung der Aufgaben war regelmäßig der Gesichtspunkt maßgebend, daß die Rechnung an die Herstellung der Forstkultur-Anlagen anzuknüpfen und von derselben auszugehen habe. Es geschah das aus dem Grunde, um einen vollständigen Ausdruck für die Rentabilitätsstellung von Dauer-Unternehmungen im Forstbetrieb zu gewinnen. Welches Verfahren angewendet werden muß, wenn — wie etwa bei Inventuren oder bei Eigentums-Übertragungen, Enteignungen von beforsteten Grundstücken — der Zeitwert des Reinertrages von einem Bestande festzustellen ist, welcher sich bereits auf einer vorgeschrittenen Stufe der Entwicklung bezw. im Nutzungsalter befindet, geht aus den Darlegungen zu dem Beispiele von dem Eichenschälwald hervor. Eine Anleitung zur Aufnahme des Holzgehaltes stehender Waldbäume und Waldbestände konnte, weil mit unseren Rechnungszielen kaum zusammenhängend, überhaupt nicht in Frage kommen. Und da hier nun einmal die Anforderungen der Privat-Waldwirtschaft besonders berücksichtigt werden mußten, wird es auch angemessen erscheinen, wenn die Rechnungsbeispiele über den Hochwald vornehmlich den aussetzenden Betrieb in's Auge fassen und sich auf die Kultur der unter jenen Verhältnissen erfahrungsgemäß hervortretend wichtigen Holzarten (Fichte und Kiefer) beschränken. —

2. Aufgaben.

a) Berechnung des Reinertrages und des Bodenwertes.

289. Es soll ein mehrere ha umfassendes Grundstück, in dessen Lage und Bodenbeschaffenheit die Bedingungen einer dauernd lohnenden landwirtschaftlichen Kultur nicht mehr gegeben sind, mit Fichten aufgeforstet werden. Dabei ist eine 70 jährige Umtriebszeit in's Auge gefaßt. Behufs Veranschlagung der zu erwartenden naturalen Erträge sind die Angaben in den Normal-Ertragstafeln von Baur zu Rate zu ziehen. Für die im vorliegenden Falle anzunehmende III. Standortsklasse finden sich dort verzeichnet an Derbholz und Reisig p. ha:[1])

Alter	Hauptbestand:	Vorerträge:	Summa:	Durchschnittlicher jährlicher Zuwachs		Laufender jährlicher Zuwachs der Gesamtmasse:	
				des Hauptbestandes:	der Gesamtmasse:		
(Jahre)	fm	fm	fm	fm	fm	fm	Prozente
10	17	—	17	1,70	1,70	—	—
20	59	—	59	2,95	2,95	4,20	24,71
30	130	10	140	4,33	4,66	8,10	13,73
40	210	20	240	5,25	6,00	10,00	7,69
50	292	25	347	5,84	6,94	10,70	5,10
60	362	30	447	6,03	7,45	10,00	3,42
70	426	35	546	6,08	7,80	9,90	2,73

Der erntekostenfreie Wert der Erträge wird p. fm veranschlagt, wie folgt:

Hauptertrag: 12 Mark; Vorerträge, steigend mit den je nach 10 Jahren sich wiederholenden Durchforstungen von: 3 auf 5 — 6,5 — 8 und 10 Mark.

An Kulturkosten sind p. ha vorzusehen: 110 Mark, und an jährlichen Aufwendungen für Verwaltung, Schutz, Steuern: 6 Mark.

Frage: Wie hoch würde sich unter diesen Voraussetzungen bei Zugrundelegung eines Zinsfußes von 3 Prozent die aus der Forstkultur erzielbare Bodenrente und demgemäß der Ertragswert des Bodens im aussetzenden Betriebe p. ha belaufen?

A. Die vorliegende Aufgabe kann in verschiedener Weise behandelt werden. In jedem Falle ist aber vorerst der Geldwert zu berechnen.

---

[1]) Baur: „Die Fichte in Bezug auf Ertrag, Zuwachs und Form." Stuttgart, 1876. — Die absoluten Erträge sind hier nach einer schriftlichen Mitteilung von Professor E. Landolt †, die Zuwachs-Verhältnisse gemäß der von Professor Schwappach angewendeten Darstellungsweise nach Berechnungen des Verfassers aufgeführt. — Den durchschnittlichen jährlichen Zuwachs ermittelt man auf dem Wege der Division des jeweiligen Hauptbestandes und bezw. der Gesamtmasse durch die Zahl der Altersjahre der Pflanzung, indessen der laufende jährliche Zuwachs sich aus der Division der Ertragssteigerung innerhalb je einer Periode durch die Zahl der Jahre, welche diese umfaßt, ergeben muß. Und die Prozente des laufenden jährlichen Zuwachses werden gefunden, indem man, ausgehend von dem Hauptbestand, dessen Verhältnis zum laufenden Zuwachs auf die Zahl 100 bezieht.

welchen die zu gewärtigenden Erträge in dem Jahre ihres Bezuges ergeben würden. Die betreffenden Summen sind:

1. Durchforstungserträge:

a) Nach 30 Jahren: 10 fm à 3 Mark = 30,00 Mark.
b) „ 40 „ : 20 „ à 5 „ = 100,00 „
c) „ 50 „ : 25 „ à 6,5 „ = 162,50 „
d) „ 60 „ : 30 „ à 8 „ = 240,00 „
e) „ 70 „ : 35 „ à 10 „ = 350,00 „

882,50 Mark.

2. Hauptertrag am Schlusse der Umtriebszeit:
426 fm à 12 Mark = ... 5 112,00 „ .

Sodann wird es sich darum handeln, den Geldwert festzustellen, welchen diese Roherträge mit Ablauf der ganzen Umtriebsperiode von 70 Jahren ausmachen. (Prolongation der Vorerträge.) Derselbe berechnet sich also:

1. Durchforstungserträge:

a) $30 \times 1{,}03^{70-30} = 30 \times 1{,}03^{40} = 30 \times 3{,}262 =$ 97,86 M.
b) $100 \times 1{,}03^{70-40} = 100 \times 1{,}03^{30}$
$= 100 \times 2{,}427 =$ . . . . 242,70 „
c) $162{,}50 \times 1{,}03^{70-50} = 162{,}50 \times 1{,}03^{20}$
$= 162{,}50 \times 1{,}806 =$ . . . . 293,48 „
d) $240 \times 1{,}03^{70-60} = 240 \times 1{,}03^{10}$
$= 240 \times 1{,}344 =$ . . . . 322,56 „
e) 35×10 . . . . 350,00 „

1 306,60 M.

2. Hauptertrag: 426 fm à 12 Mark (w. o.) . . . 5 112,00 „

Nachwert sämtlicher Roherträge: 6 418,60 M.

Behufs Ermittlung des Reinertrages hat man nunmehr von diesem Brutto-Ergebnisse den auf den gleichen Zeitpunkt bezogenen Nachwert sämtlicher Betriebskosten in Abzug zu bringen. Diese Rechnung gestaltet sich, wie folgt:

Nachwert der Roherträge . . . . 6 418,60 M.

Davon ab:

1. Der Nachwert der einmalig aufzuwendenden Kulturkosten (I):
$A = 110 \times 1{,}03^{70} = 110 \times 7{,}918 =$ 870,98 M.

2. Der Nachwert des laufenden Jahresaufwandes (XIV):
$$A = \frac{6 \times (1{,}03^{70} - 1)}{0{,}03} = \frac{6 \times 6{,}918}{0{,}03}$$
$= 200 \times 6{,}918 =$ . . . . . 1 383,60 „

2 254,58 „

Somit verbleibt ein nach 70 Jahren anfallender Reinertrag von: . . . . 4 164,02 M.

Vergegenwärtigt man sich aber, daß an dem Forstbetrieb dauernd festgehalten werden soll, an jede Abholzung also sich eine Wiederanpflanzung (künstliche Verjüngung) und somit eine Erneuerung des Turnus reiht, so wird man jenen Reinertrag als eine immerwährende, nach jeder Umtriebszeit von 70 Jahren nachschüssig beziehbare Rente zu betrachten haben. Woraus dann folgt, daß in dem Kapital-Vorwerte dieser Rente der dauernde Wert des der Forstkultur gewidmeten Grund und Bodens (Bodenerwartungswert) zum Ausdruck kommt. Und dieser berechnet sich nach der bekannten Formel XXX. a. auf:

$$a = \frac{4\,164{,}02}{1{,}03^{70} - 1} = \frac{4\,164{,}02}{6{,}918} = \mathbf{601{,}91} \text{ Mark p. ha.}$$

Dem also ermittelten Bodenwerte entspricht aber bei Anwendung des gleichen Zinsfußes eine dauernde Rente (Grundrente) von

$$601{,}91 \times 0{,}03 = \text{rund } \mathbf{18} \text{ Mark p. ha.}$$

Soll für diesen Rechnungsgang eine allgemeine Formel aufgestellt werden, und bezeichnet man den Geldwert der Durchforstungserträge (prolongiert) mit D, denjenigen des Hauptertrages mit H, den Betrag der Kulturkosten mit C und denjenigen der laufenden Betriebsspesen (Verwaltung) mit V, die Jahre der Umtriebszeit mit n und den Zinsfuß mit p, so ist der Bodenwert (B):

$$B = \frac{D + H - \left(C \,.\, 1{,}0p^n + V \,.\, \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p}\right)}{1{,}0p^n - 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Verzichtet man auf eine zusammenfassende Diskontierung der Ertrags- und der Kostenwerte, so lässet sich das Verfahren allerdings noch vereinfachen, indem man den Nachwert von V aus jener Verknüpfung ausschaltet, dann aber von dem Schlußergebnisse nur seinen Vorwert in Abzug bringt. Auf diese Weise ändert jene Formel ab, und zwar also:

$$B = \frac{D + H - C \,.\, 1{,}0p^n}{1{,}0p^n - 1} - \frac{V}{0{,}0p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Die Rechnung ergibt dann für B:

$$\frac{6\,418{,}60 - 870{,}98}{6{,}918} - 200{,}00$$

$$= \frac{5\,547{,}62}{6{,}918} - 200{,}00$$

$$= 801{,}91 - 200{,}00 = \mathbf{601{,}91} \text{ Mark (w. o.).}$$

Anmerkung 1. Auf dem in dieser Schlußrechnung dargelegten Wege kann man auch, freilich ohne Aussicht auf kalkulatorische Erleichterungen, noch weiter gehen, indem man zugleich den Betrag von C im angegebenen Sinne eliminiert und mit seinem Jetztwerte von dem Kapitalwerte der den Roherträgen entsprechenden Rente in Abzug bringt. Man erhält dann folgende Formel:

$$B = \frac{D + H}{1{,}0p^n - 1} - \left(\frac{C \,.\, 1{,}0p^n}{1{,}0p^n - 1} + \frac{V}{0{,}0p}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Demgemäß würde die Rechnung ergeben:

$$\frac{6\,418{,}60}{6{,}918} - \left(\frac{110 \times 7{,}918}{6{,}918} + 200{,}00\right)$$
$$= 927{,}81 - \left(\frac{870{,}98}{6{,}918} + 200{,}00\right)$$
$$= 927{,}81 - (125.90 + 200{,}00)$$
$$= 927{,}81 - 325{,}90 = \mathbf{601.91} \text{ Mark (w. o.).}$$

Anmerkung 2. Außer den vorgeführten Arten der Behandlung der Aufgabe kann auch schließlich noch das Verfahren der Diskontierung der Durchforstungs- und der Haupterträge eingeschlagen werden. Es berechnen sich dann deren gegenwärtigen Werte also:

1. Durchforstungserträge:

a) $\frac{30}{1{,}03^{30}} = \frac{30}{2{,}427} =$ . . . . 12,36 Mark.

b) $\frac{100}{1{,}03^{40}} = \frac{100}{3{,}262} =$ . . . . 30,66 „

c) $\frac{162{,}50}{1{,}03^{50}} = \frac{162{,}50}{4{,}384} =$ . . . . 37,07 „

d) $\frac{240}{1{,}03^{60}} = \frac{240}{5{,}892} =$ . . . . 40,73 „

e) $\frac{350}{1{,}03^{70}} = \frac{350}{7{,}918} =$ . . . . 44,20 „

165,02 Mark.

2. Hauptertrag: $\frac{5\,112}{1{,}03^{70}} = \frac{5\,112}{7{,}918} =$ . . . . 645,62 „

Vorwert sämtlicher Roherträge: 810,64 Mark.

Betrachtet man dieses Ergebnis im Gesichtspunkte einer dauernden, um je 70 Jahre aussetzenden Rente, so ermittelt sich deren Kapital-Vorwert nach Formel XXXI. a., wie folgt:

$$a = \frac{810{,}64 \times 1{,}03^{70}}{1{,}03^{70} - 1} = \frac{810.64 \times 7{,}918}{6{,}918} = \frac{6\,418{,}64}{6{,}918} = \text{ . . . 927,81 Mark (s. o.).}$$

Hiervon kommen die genau nach dem oben (Anmerkung 1) angegebenen Verfahren zu berechnenden Kosten in Abzug mit 325,90 „

Verbleibt also ein Kapital-Vorwert der Bodenrente von: **601,91** Mark (w. o.).

Anmerkung 3. Es dürfte nicht ohne Interesse sein, bei diesem Anlasse und in Anlehnung an das vorliegende Beispiel zu zeigen, in welchem Grade die Höhe des Zinsfußes das Endergebnis der Reinertragsberechnung in dem Forstbetriebe beeinflußt.

Angenommen, es werde auf den in Rede stehenden Fall c. p. ein Zinsfuß von $3^1/_2$ bezw. 3 und $2^1/_2$ Prozent angewandt, so erhielte man rund:

Bei einem Zinsfuße von:	$3^1/_2$		3 (w. o.)		$2^1/_2$ Prozent
1. Nachwert der Vor- und der Haupterträge (brutto)	6 523		6 418		6 326 Mark.
Verhältnis =	100	:	98	:	97
2. Nachwert sämtlicher Betriebskosten	2 956		2 254		1 731 „
Verhältnis =	100	:	76	:	59
3. Nachwert des Reinertrages	3 567		4 164		4 595 „
Verhältnis =	100	:	117	:	129
4. Bodenerwartungswert	353		602		992 „
Verhältnis =	100	:	170	:	281

Es geht hieraus hervor, daß mit sinkendem Zinsfuße die Betriebskosten in weit stärkerem Verhältnisse abnehmen, wie die Werte des Rohertrages, in Folge dessen die Reinerträge sich ebenmäßig erhöhen müssen. Diese Beziehungen treten, wie ersichtlich, in der Kapitalisierung der Reinerträge bei Anwendung der gleichen Prozent-Abstufungen nur noch schärfer hervor.

290. Auf einem größeren, zwar eben gelegenen, aber wegen seiner Bodenbeschaffenheit für die landwirtschaftliche Kultur nicht besonders geeigneten Landkomplexe gedenkt dessen Besitzer einen Kiefernwald anzulegen. Es handelt sich um einen lehmigen Sandboden, welcher seither vornehmlich dem Anbau des Roggens und des Hafers und zwischenhinein auch der Weidenutzung gedient hat. Hinsichtlich der zu gewärtigenden Holzerträge glaubte man sich auf den Inhalt der Tafeln von Burckhardt[1]) beziehen zu können, wobei man indessen von der Ansicht ausging, daß die dort verzeichnete I. Standortsklasse in Betracht kommen müsse. Nach dem Urteile von Fach-Experten wäre eine 60jährige Umtriebszeit in's Auge zu fassen.

Den Angaben der vorliegenden Tabelle gemäß würde auf folgende Erträge p. ha zu rechnen sein:[2])

Alter (Jahre)	Hauptbestand: fm	Vorerträge: fm	Summa: fm	Durchschnittlicher jährlicher Zuwachs des Hauptbestandes: fm	Durchschnittlicher jährlicher Zuwachs der Gesamtmasse: fm	Laufender jährlicher Zuwachs der Gesamtmasse: fm	Laufender jährlicher Zuwachs der Gesamtmasse: Prozente:
20	95	—	95	4,75	4,75	—	—
30	152	29	181	5,07	6,03	8,60	9,05
40	219	26	274	5,47	6,85	9,30	6,12
50	285	23	363	5,70	7,26	8,90	4,07
60	352	21	451	5,87	7,52	8,80	3,09

Der erntekostenfreie Wert der Erträge ist p. fm wie folgt zu berechnen:

Hauptertrag: 8 Mark; Vorerträge, steigend mit den je nach 10 Jahren sich wiederholenden Durchforstungen von: 2 auf 3 4 und 5 Mark.

An Kulturkosten sind p. ha anzusetzen: 100 Mark, und an jährlichen Verwaltungskosten: 4 Mark.

Auf Grundlage dieser Erhebungen soll nun festgestellt werden, welchen Betrag der von der Einführung der Forstkultur zu erwartende Ertragswert des Bodens im aussetzenden Betriebe und bei einem Zinsanspruche von wiederum 3 Prozent erreichen, und welche Bodenrente diesem Werte entsprechen würde. Wie lautet die Rechnung?

A. Das hier anzuwendende Verfahren deckt sich mit den Darlegungen zur Aufgabe 289.

Der Geldwert der Erträge ist:

1. Durchforstungserträge:

a) Nach 30 Jahren: 29 fm à 2 Mark = 58,00 Mark.
b) „ 40 „ 26 „ à 3 „ = 78,00 „
c) „ 50 „ 23 „ à 4 „ = 92,00 „
d) „ 60 „ 21 „ à 5 „ = 105,00 „

333,00 Mark.

[1]) Hülfstafeln für Forsttaxatoren. Hannover 1873.

[2]) Nach einem Auszuge in G. Schönberg's „Handbuch der politischen Oekonomie." Tübingen 1886. II. Band. S. 286. Tafel IX. (In einer Abhandlung von v. Helferich.) — Vgl. auch: „Handbuch der Landwirtschaft" von H. Zeeb und W. Martin. Stuttgart 1884. S. 516 ff.

2. Hauptertrag am Schlusse der Umtriebszeit:
352 fm à 8 Mark = ... 2 816,00 Mark.

Werden nun diese Roherträge auf den Abschluß der Umtriebsperiode von 60 Jahren bezogen, so ergeben sich:

1. Durchforstungserträge:

a) $58 \times 1{,}03^{60-30} = 58 \times 1{,}03^{30} = 58 \times 2{,}427 =$ 140,77 Mark.
b) $78 \times 1{,}03^{60-40} = 78 \times 1{,}03^{20} = 78 \times 1{,}806 =$ 140,87 „
c) $92 \times 1{,}03^{60-50} = 92 \times 1{,}03^{10} = 92 \times 1{,}344 =$ 123,65 „
d) $21 \times 5 =$ . . . . 105,00 „

510,29 Mark.

2. Hauptertrag: 352 fm à 8 Mark (w. o.) . . . . . 2 816,00 „

Nachwert sämtlicher Roherträge: 3 326,29 Mark.

Von dieser Summe kommen nunmehr in Abzug:

1. Der Nachwert der einmalig zu bestreitenden Kulturkosten (I):
$A = 100 \times 1{,}03^{60} = 100 \times 5{,}892 =$ . . . 589,20 M.

2. Der Nachwert des laufenden Jahresaufwandes (XIV):

$$A = \frac{4 \times (1{,}03^{60} - 1)}{0{,}03} = \frac{4 \times 4{,}892}{0{,}03} = \frac{19{,}568}{0{,}03} = 652{,}27 \text{ „}$$

1 241,47 Mark.

Der nach 60 Jahren zu beziehende Reinertrag ist also p. ha: 2 084,82 Mark.

Betrachtet man aber dieses Ergebnis im Gesichtspunkte einer immerwährenden, je 60 Jahre aussetzenden Rente, so ergibt sich deren Kapitalwert nach Formel XXX. a also:

$$a = \frac{2\,084{,}82}{1{,}03^{60} - 1} = \frac{2\,084{,}82}{4{,}892} = \mathbf{426{,}17} \text{ Mark p. ha.}$$

Ein Betrag, welcher gleichbedeutend ist mit dem Bodenwerte bezw. einer Grundrente p. ha von:

$$426{,}17 \times 0{,}03 = \mathbf{12{,}78} \text{ Mark.}$$

Hinsichtlich der anderweiten, auf den vorliegenden Fall noch anwendbaren Verfahrungsweisen geben die Ausführungen zur Aufgabe 289 nähere Auskunft.

291. Ein ausgedehntes, im sog. Betriebsverband stehendes, also auf fortgesetzt jährliche Nutzung eingerichtetes Forstrevier, welches einen Fichtenbestand umfaßt, soll auf seinen Boden-Reinertrag geprüft werden. Vorausgesetzt ist eine Umtriebszeit von 70 Jahren. Als Grundlage für die Berechnung der naturalen Erträge sind die Angaben von Schwappach[1]) zu benutzen, von welchen in Würdigung der gegebenen Verhältnisse diejenigen für die II. Standortsklasse in Betracht fallen. — Die für die Kalkulation zu benutzenden Größen der naturalen Erträge (Derb- und Reisholz) p. ha sind in nachfolgender Übersicht für je 10jährige Perioden

[1]) „Untersuchungen über Zuwachs und Form der Schwarzerle“ und „Wachstum und Ertrag normaler Fichtenbestände in Preußen“. Neudamm 1902. — Die Normal-Ertragstafel für die Fichte in Mittel- und Nord-Deutschland ist allda S. 78 bis 83 aufgeführt.

unter Beifügung auch der betreffenden Zuwachs-Verhältnisse auszugsweise zusammengestellt. [1])

Alter	Hauptbestand	Vorerträge:		Vorrat[2]) p. ha:	Durchschnittlicher jährlicher Zuwachs		Laufender jährlicher Zuwachs der Gesamtmasse:	
		P. Jahrzehnt	Summa:		des Hauptbestandes:	der Gesamtmasse:		
(Jahre)	fm	fm	fm	fm	fm	fm	fm	Prozente
20	80	—	—	40	4,00	4,00	—	—
30	158	19	19	79	5,27	5,90	9,70	12,12
40	272	49	68	127	6,80	8,50	16,30	10,32
50	386	61	129	179	7,72	10,30	17,50	6,43
60	489	75	204	231	8,15	11,55	17,80	4.61
70	568	87	291	279	8.11	12,27	16,60	3,39

In Würdigung der Verkehrslage ist der erntekostenfreie Wert der Erträge p. fm veranschlagt worden, wie folgt:

Hauptbestand: Steigend von 2,50 auf 5 — 7,50 — 10 — 12 und 15 Mark. Vorerträge, erstmalig nach 30 Jahren beziehbar: Steigend von 4 auf 6 — 8 — 10 und 12 Mark.

Für die jährlich aufzubringenden Kulturkosten sind p. ha: 180 Mark, und für den Jahresaufwand an Verwaltungskosten, Steuern usw. p. ha: 6 Mark einzusetzen.

Wird nun schließlich angenommen, daß das Kapital des Vorratswertes sich zu $3^1/_2$ Prozent verzinsen soll: Wie hoch berechnet sich dann der Boden-Reinertrag der Forstkultur p. ha?

---

[1]) Die Ertragszahlen stimmen sehr annähernd mit denjenigen überein, welche in neuerer Zeit von den preußischen forstlichen Versuchsanstalten bezüglich der „Fichte in Nord- und Mitteldeutschland" veröffentlicht wurden. Vgl. die Angaben bei H. Martin: „Die forstliche Statik". Berlin 1905. (S. 280.) — Aus diesen ist auch die Zahl für den Hauptbestand im 20. Jahre (80 fm) in die Tabelle herübergenommen.

[2]) Mit der hier eingeschalteten, in den Ertragstafeln nicht vorkommenden, aber für die schwebende Rechnungsaufgabe unentbehrlichen Rubrik „Vorrat" hat es folgende Bewandtnis: In dem nachhaltigen Betriebe wird alljährlich nur der auf einem Teilstück $\left(\frac{1}{n}\right)$ der Gesamtfläche befindliche älteste Bestand abgetrieben, indessen dieser Hiebfläche eine der Umtriebszeit entsprechende Zahl von (n — 1) Schlägen mit noch nicht hiebreifen Beständen gleichmäßig abgestuften Alters angeschlossen ist. Daraus folgt aber, daß der Wert des jüngeren, noch nicht der Hauptnutzung dienenden Holzvorrates, welcher den Besatz auf diesen Flächen bildet, als eine Anlage von Betriebskapital behandelt werden und mit den von ihm zu beanspruchenden Zinsen in dem Jahresaufwande erscheinen muß.

Im vorliegenden Falle berechnet sich nun nach dem in der Forstwirtschaft meist üblichen Verfahren die naturale Größe des Vorrates durch Addition der für die einzelnen Jahrzehnte bis zur betreffenden Altersstufe des Bestandes verzeichneten Haupterträge und durch Division der Summe durch die Zahl der Jahrzehnte. — Auf diesem Wege erhält man, wie oben angegeben, die Zahlen: Für 20 Jahre: $\frac{80}{2} = 40$; für 30 Jahre: $\frac{80 + 158}{3} = \frac{238}{3} = 79$; für 40 Jahre: $\frac{238 + 272}{4} = \frac{510}{4} = 127$ usw. — Hierbei ist insbesondere Bezug genommen auf die Darstellungsweise in: „H. Martin, Die forstliche Statik." Berlin 1905. S. 280 und 282.

A. Wendet man auf die oben verzeichneten naturalen Erträge den Geldwert-Maßstab an, so gibt die Übersicht folgendes Bild:

Alter (Jahre)	Hauptbestand im Ganzen: Mark	Vorerträge im Ganzen: Mark	Vorrat p. ha:[1]) Mark
20	80 × 2,50 = 200	—	$\frac{200}{2}$ = 100
30	158 × 5 = 790	19 × 4 = 76	$\frac{990}{3}$ = 330
40	272 × 7,50 = 2 040	76 + (49 × 6) = 370	$\frac{3\,030}{4}$ = 757
50	386 × 10 = 3 860	370 + (61 × 8) = 858	$\frac{6\,890}{5}$ = 1 378
60	489 × 12 = 5 868	858 + (75 × 10) = 1 608	$\frac{12\,758}{6}$ = 2 126
70	568 × 15 = **8 520**	1 608 + (87 × 12) = **2 652**	$\frac{21\,278}{7}$ = **3 040**

Wie aus früheren Andeutungen (Erläuternde Vorbemerkungen S. 315 bis 320) hervorgeht, hat man es im Nachhaltigkeitsbetriebe mit einer ununterbrochen laufenden Jahresrente zu tun, deren Verhalten das Erfordernis einer Prolongation und bezw. Diskontierung ausschließt. Um dieselbe feststellen zu können, müssen aber die Zinsen von den Vorratswerten in die Aufwandsposten eingereiht werden. Hiernach berechnet sich der Boden-Reinertrag auf Grund des vorliegenden Materiales, wie folgt:

Der Abtriebsertrag von dem 70 jährigen Bestande ist . . 8 520 Mark.
Die in jedem Jahrgange beziehbaren Vorerträge belaufen sich auf . . . . 2 652 „

Jährlicher Rohertrag im Ganzen p. 70 ha: 11 172 Mark.

Hiervon kommen in Abzug:

1. Die Zinsen von dem Vorrats-Kapital im Betrage von 3 040 Mark p. ha, im Ganzen von 3 040 × 70 = 212 800 Mark à 3,5 Prozent = 2 128 × 3,5 = 7 448 M.
2. Die direkten Ausgaben, und zwar:
   a) Die jährlich p. ha aufzuwendenden Kulturkosten mit . . . . 180 M.
   b) Der jährlich im Ganzen erforderliche Aufwand für Verwaltung, Steuern usw., p. 70 ha = 6 × 70 = . . 420 „

   600 „

Jährlicher Aufwand im Ganzen p. 70 ha: 8 048 „

Somit verbleibt ein Reinertrag p. 70 ha von: 3 124 Mark.

Und p. ha von $\frac{3\,124}{70}$ = . . **44,63** Mark.

[1]) Wie ersichtlich, sind hier die Vorräte nach dem Nutzwerte berechnet worden, ein Verfahren, welches zwar nicht unbedingt einwurfsfrei erscheinen mag, dessen Anwendung sich aber gleichwohl rechtfertigt, weil es ein hinreichend genaues

Diesem Reinertrage entspricht aber bei Anwendung des gleichen Zinsfußes ein Bodenwert p. ha von:

$$\frac{44,63}{0,035} = \mathbf{1\,275} \text{ Mark.}$$

Übrigens kann man auch in folgender Weise verfahren:

Die jährlichen Brutto-Erträge sind	11 172 M.	(w. o.).
Hiervon ab die direkten Aufwendungen mit .	600 „	(w. o.).
Summa der um die direkten Kosten reduzierten Erträge:	10 572 M.	
Und p. ha: $\frac{10572}{70}$ =	151,03 M.	
Dieser Betrag vermindert sich aber weiter um: Die Zinsen des Vorrats-Kapitales p. ha von 3 040 Mark à 3,5 Prozent = . . .	106,40 „	
Daher Reinertrag p. ha:	**44,63** M.	(w. o.).

Soll schließlich für den vorgeführten Rechnungsgang noch eine allgemeine Formel aufgestellt werden, so wird sich dieselbe in Anwendung der bereits angegebenen Buchstaben-Benennungen, und wenn man das Vorrats-Kapital (Normal-Vorrat) mit N bezeichnet, für den Reinertrag (R) gestalten, wie folgt:

$$R = \frac{H + D - [N_n . 0{,}0p + (C + V_n)]}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

oder auch:

$$R = \frac{H + D - (C + V_n)}{n} - N . 0{,}0p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Anmerkung. Wirft man die Frage auf, wie hoch sich der Reinertrag bezw. der Bodenwert unter den gegebenen Bedingungen dann berechnet, wenn an Stelle des jährlichen, ein aussetzender Betrieb eingerichtet wird, so muß man schon gefaßt darauf sein, daß die Ergebnisse nicht übereinstimmen. Es erklärt sich das, wenn man in Betracht zieht, daß im einen Falle Vorratswerte als Betriebsfonds erscheinen, während sie anderen Falles in dem Hauptertrage ein und derselben Fläche aufgehen, daß dort von Prolongationen bezw. Diskontierungen ganz abgesehen wird, während hier auf dieselben nicht verzichtet werden kann, und daß auch die Art der Bewertung des Bestandes-Vorrates, insbesondere aber die Höhe des Zinsfußes, welcher von dem Vorrats-Kapital beansprucht wird, das Verhältnis zwischen den Erträgen beider Betriebsweisen beeinflußt. — In letzterer Beziehung müßte beispielsweise im jährlichen Betriebe eine Erhöhung des Zinsfußes für das Vorrats-Kapital um $^1/_2$, also auf 4 Prozent den Gesamt-Aufwand um 212 800 × 0,005 = 1 064 Mark steigern und somit eine Verminderung des Reinertrages auf 3 124 — 1 064 = 2 060 Mark, und p. ha auf 29,43 Mark zur Folge haben. Dieser Reinertrag würde aber wenigstens annähernd gleich demjenigen ausfallen, welchen der aussetzende Betrieb dann liefert, wenn seiner Berechnung der Zinsfuß von $3^1/_2$ Prozent für die Kapitalien der Vorerträge, der Kulturkosten und des laufenden Aufwandes zu Grunde gelegt wird.

292. Es soll auf einem p. p. 1 ha umfassenden Grundstück der Eichenschälwald-Betrieb eingeführt werden. Dem Vorhaben liegt die aus örtlichen Erfahrungen geschöpfte Voraussicht zu Grunde, daß die erstmalige, nach 30 Jahren eintretende Nutzung in 156 rm geschälten Holzes

---

Bild von der Sachlage liefert und (gegenüber der Darstellung des Kosten- oder des Erwartungswertes) den Vorzug der Einfachheit besitzt.

und 85 Kztr. (d. i. c. 500 Gebund) Rinde bestehen, daß von da an aber der Ertrag im regelmäßig wiederkehrenden 15jährigen Umtriebe sich auf je 75 rm geschälten Holzes und 50 Kztr. Rinde belaufen werde. Für den ersten Ertrag sollen netto, d. h. nach Abzug der Gewinnungskosten, p. rm Holz 6 Mark und für den Kztr. Rinde 7,50 Mark, für die späteren Erträge aber p. rm Holz 4,5 Mark und für den Kztr. Rinde 9 Mark angenommen werden.[1]) Von einer besonderen Berechnung des Wertes der nach der jedesmaligen Abholzung während mehrerer Jahre zu erzielenden Zwischennutzung ist abgesehen.[2]) Die einmalig aufzuwendenden Kulturkosten sind auf 128 Mark, die laufenden jährlichen Betriebsspesen auf 3,50 Mark veranschlagt. — Wie hoch berechnet sich hiernach bei Zugrundelegung eines Zinsfußes von 4 Prozent der Vorwert aller Reinerträge bezw. der Erwartungswert des für die Anlage geeigneten Bodens? Und welcher Jahresrente ist derselbe äquivalent?

A. Die vorliegende Aufgabe lässet sich in der Weise behandeln, daß man zunächst den Jetztwert (a) des Rohertrages der ersten Periode von 30 Jahren und dann den Jetztwert ($a_{,}$) der Roherträge, welche die späteren Umtriebsperioden mit Ablauf von je 15 Jahren liefern, ermittelt. Darnach ergibt sich:

I. Rohertrag der ersten Periode nach 30 Jahren.

Derselbe beträgt:

1. An Holz: 156 rm à 6 Mark . 936,00 M.
2. An Rinde: 85 Kztr. à 7,50 Mark 637,50 „

Zusammen: 1 573,50 M.

Hiervon der Jetztwert (Formel II):

$$a = \frac{1\,573{,}50}{1{,}04^{30}} = \frac{1\,573{,}50}{3{,}243} = \ldots\ldots\ldots\ 485{,}20 \text{ Mark.}$$

II. Rohertrag der nachfolgenden Umtriebsperioden nach je 15 Jahren.

Es wurden berechnet:

1. An Holz: 75 rm à 4,50 Mark . 337,50 M.
2. An Rinde: 50 Kztr. à 9 Mark 450,00 „

Zusammen: 787,50 M.

Hiervon der Jetztwert (Formel XXXIV. a.):

$$a_{,} = \frac{787{,}50}{1{,}04^{30} \times (1{,}04^{15} - 1)} = \frac{787{,}50}{3{,}243 \times 0{,}8009(4)} = \frac{787{,}50}{2{,}59745} = 303{,}18 \text{ „}$$

Summa des Jetztwertes aller Roherträge: 788,38 Mark.

[1]) Die naturalen Erträge an Rinde und Holz (letzteres in rm) sind nach den von Jäger in seiner Schrift: „Die Land- und Forstwirtschaft des Odenwaldes“, Darmstadt, 1843, gelieferten Angaben berechnet, wobei allerdings bemerkt werden muß, daß sich dieselben auf Lagen am Neckar beziehen, welche für die Eichenschälwaldkultur sehr begünstigt sind. — Die Preisansätze für die Rinde wurden den neueren Notierungen der Einfuhrwerte in der Schweizer. Handelsstatistik entnommen.

[2]) Dies vorbehaltlich und in der Erwägung, daß sich in der Zwischenkultur ein Verhältnis zum Forstbetriebe ausprägt, welches als eine wechselseitige Dienstleistung (Bearbeitung des Bodens . Bezug der Ernten) betrachtet werden kann. Eventuell dürfte ein in den Zwischenjahren erzielbarer Ertrags-Überschuß bezw. Pachterlös dem Schälwaldbetrieb zu Gute zu schreiben sein.

Übertrag: 788,38 Mark.

Nun kommen aber von diesem Betrage in Abzug:

1. Die Kulturkosten mit . . . . 128,00 M.
2. Der dauernd sich wiederholende Aufwand von 3,50 Mark, mit 4 Prozent kapitalisiert:

$\frac{100 \times 3{,}5}{4} = \frac{350}{4} =$ . . . . 87,50 „

Zusammen: 215,50 Mark.

Somit ist die Summe des Jetztwertes aller Reinerträge: **572,88** Mark.

Derselben entspricht eine immerwährende Jahresrente von

$572{,}88 \times 0{,}04 = 5{,}7288 \times 4 = \mathbf{22{,}92}$ Mark (rund).

Anmerkung. Zu dem gleichen Ergebnisse würde man auch noch auf anderen Wegen gelangen, wie sich aus den nachfolgenden Rechnungsweisen ergibt:

1. Diskontiert man gemäß der Formel XXX. a. den oben mit 787,50 Mark bezifferten Endwert der Roherträge der 15jährigen Umtriebsperioden auf den Zeitpunkt des Abschlusses der Vorperiode von 30 Jahren, so erhält man:

$\frac{787{,}50}{1{,}04^{15} - 1} = \frac{787{,}50}{0{,}8009} =$ . . . . . . 983,26 Mark.

Dazu der Endwert der Roherträge der Vorperiode (s. o.) . . . . 1 573,50 „

Zusammen: 2 556,76 Mark.

Der Jetztwert dieses Betrages beläuft sich (Formel II) wiederum auf:

$\frac{2\,556{,}76}{1{,}04^{30}} = \frac{2\,556{,}76}{3{,}243} =$ . . . . . . 788,38 Mark.

Hiervon ab: Die Kosten, nach obiger Berechnung 215,50 „

Jetztwert aller Reinerträge: 572,88 Mark (w. o).

2. Der Jetztwert des Rohertrages der Vorperiode von 30 Jahren (s. o.) beträgt: . . . . . . 485,20 Mark.

Hiervon ab:

a) Die Kulturkosten mit . . . . 128,00 M.
(Dieselben greifen selbstverständlich auf alle Perioden über, werden aber hier zunächst und vorbehaltlich nur in die Rechnung der Vorperiode eingesetzt)

b) Der laufende Aufwand (nach Formel XIV.a): $\frac{3{,}5 \times (1{,}04^{30} - 1)}{1{,}04^{30} \times 0{,}04} = \frac{3{,}5 \times 2{,}243}{3{,}243 \times 0{,}04}$

$= \frac{7{,}8505}{0{,}1297(2)}$ . . . . 60,52 M.

188,52 „

Verbleibt also ein **Jetzt**wert des **Rein**ertrages von: 296,68 Mark.

Zu diesem Betrage kommt dann noch:

Der Jetztwert der Roherträge der folgenden Umtriebsperioden von je 15 Jahren. Derselbe beläuft sich (s. o.) auf . . . . 303,18 M.

Von demselben sind (mit Ausschluß der bereits in der Rechnung über die Vorperiode in Ansatz gebrachten, die Dauer aller Perioden umfassenden Kulturkosten) in Abzug zu bringen:

An laufendem Aufwand: 3,50 Mark. Der Jetztwert derselben ist nach Formel XXXII. a.:

$\frac{3{,}5}{1{,}04^{30} \times 0{,}04} = \frac{3{,}5}{3{,}243 \times 0{,}04} = \frac{3{,}5}{0{,}1297} =$ . . 26,98 M.

276,20 „

Der **Jetzt**wert aller **Rein**erträge beträgt also: **572,88** Mark (w. o.).

293. Angenommen, daß der Eichenschälwald unter den in Aufgabe 292 näher bezeichneten Voraussetzungen bereits angelegt worden, und daß seit seiner Einrichtung ein Zeitraum von gerade 30 Jahren verflossen sei: Wie hoch würde sich dann, nachdem die erste Abholzung schon stattgefunden hat, der Nutzungswert des Waldes bei im Übrigen gleichen Umtriebszeiten, gleichen Erträgen und gleichem Zinsfuße berechnen?

A. Die Aufgabe besteht in der Ermittlung des Jetztwertes der Reinerträge, welche der fortgesetzt in 15 jährigem Turnus bewirtschaftete Hackwald am Ende einer jeden Umtriebsperiode liefern wird. Da nach den gegebenen Voraussetzungen der nächstmalige Reinertrag erst mit Ablauf von 15 Jahren bezogen werden kann, steht eine nachschüssige aussetzende Rente in Frage.

Wie in Aufgabe 292 gezeigt wurde, beläuft sich der Nachwert der Erträge am Schlusse jeder Umtriebsperiode von 15 Jahren auf 787,50 Mark.

Hiervon kommen in Abzug:

1. Der Nachwert der Kulturkosten (I) mit
   $128 \times (1{,}04^{15} - 1) = 128 \times 0{,}8009 =$. 102,52 M.[1])
2. Der Nachwert des laufenden Jahresaufwandes (XIV):
   $\frac{3{,}5 \times (1{,}04^{15} - 1)}{0{,}04} = 87{,}50 \times 0{,}8009 =$. 70,08 M.

172,60 „

Somit ist der nach 15 Jahren beziehbare Reinertrag: 614,90 Mark.

Der Vorwert dieses Reinertrages berechnet sich aber nach Formel XXX. a auf:

$$\frac{614{,}90}{1{,}04^{15} - 1} = \frac{614{,}90}{0{,}8009} = \mathbf{767{,}76} \text{ Mark.}$$

Ein naheliegendes zweites Verfahren besteht in der Diskontierung des regelmäßig je nach 15 Jahren wiederkehrenden Rohertrages auf den Beginn der Umtriebsperiode. Alsdann berechnet sich der Vorwert desselben nach Formel XXX. a also:

$\frac{787{,}50}{1{,}04^{15} - 1} = \frac{787{,}50}{0{,}8009} =$ . . . . 983,26 Mark.

Hiervon ab:

1. Die Kulturkosten mit . . . . . . 128,00 M.
2. Der laufende Jahresaufwand (XXVIII. a) mit:
   $\frac{3{,}5}{0{,}04} =$ . . . . 87,50 „

215,50 „

Vorwert aller Reinerträge: **767,76** Mark (w. o.).

[1]) Man hat sich dabei vorzustellen, daß der Betrieb unausgesetzt mit den Zinsen von 128 Mark belastet wird, somit das Kapital als solches mit seinen Anforderungen bestehen bleibt. — Sollte das beforstete Grundstück an dem gegebenen Zeitpunkte zum Verkauf gestellt werden, dann müßte der Verkäufer allerdings die Kulturkosten von der Berechnung des Aufwandes ausschließen, weil sie der Erwerber nicht mehr zu tragen haben würde.

Anmerkung. Läge der Fall vor, daß der Ertragswert des Waldes unmittelbar vor einer Abholzung nachgewiesen werden soll, so würde der berechnete Betrag gemäß der Formel XXXI. a. für vorschüssige aussetzende Renten um einen besonderen Zuschlagswert zu erhöhen sein, und erhielte man dann:

$$a = \frac{767,76 \times 1,04^{15}}{1,04^{15} - 1} = \frac{767,76 \times 1,8009}{0,8009} = 958,62 \times 1,8009 = 1\,726,38 \text{ Mark.}$$

Und wenn die Übernahme zu einem Zeitpunkte stattfindet, da seit der Abholzung gerade 6 Jahre verflossen sind, dann hätte man es mit einer um 9 Jahre aufgeschobenen, je am Beginne von 15 Jahren fälligen Rente zu tun, deren Vorwert sich nach der Formel XXXV. a also berechnet:

$$a = \frac{767,76}{1,04^{9-15} \times (1,04^{15} - 1)} = \frac{767,76 \times 1,04^{6}}{1,04^{15} - 1} = \frac{767,76 \times 1,265}{0,8009} = \frac{971,22}{0,8009}$$
$= 1\,212,66$ Mark.

Dieser Betrag entspricht einem Zuschlage zu dem (oben) auf 767,76 Mark berechneten Ertragswerte auf Höhe von 444,90 Mark, um welche dieser innerhalb 6 Jahren bei 4 Prozent Zinsen angewachsen sein würde.

$$\left(\frac{767,76 \times 1,265}{0,8009} = 1212,66 = 767,76 + 444,90\right).$$

b) Verschiedene Aufgaben.

294. Ein Nadelholzwald, welcher auf aussetzenden Betrieb eingerichtet ist, liefert innerhalb einer Bestandesdauer von 60 Jahren p. ha folgende Erträge:

1. Durchforstungserträge:		
a) Nach 40 Jahren . . .	185 Mark,	
b) „ 50 „ . . .	288 „ ,	
c) „ 60 „ . . .	394 „ .	
		867 Mark.
2. Hauptertrag im 60ten Jahre		3 305 „
Zusammen:		4 172 Mark.

Die Kulturkosten sind p. ha berechnet auf 105 Mark, der laufende Aufwand für Verwaltung usw. auf jährlich 4 Mark, indessen auf Grund eingehender Informationen für den Verkehrswert des Bodens p. ha 400 Mark angenommen werden. — Der Besitzer beansprucht für das in der Forstkultur angelegte Kapital ohne Unterschied einen Zins von 3 Prozent.

Frage: Wie verhält sich unter diesen Voraussetzungen der Wert des Reinertrages zu den Anforderungen des gesamten Kapitaleinsatzes?

A. Da im gegebenen Falle auch der Kapitalwert des Grund und Bodens unter dem Aufwande erscheinen soll, so kann das gesuchte Verhältnis gefunden werden, indem man entweder die Zinsanforderungen des Bodenkapitales den übrigen Betriebskosten angliedert, oder aber den Verkehrswert des Bodens dem Werte, welcher dem Reinertrage der Waldwirtschaft (Bodenerwartungswert) entspricht, gegenüberstellt. Die Rechnung ergibt dann gemäß dem in den Aufgaben 289 und 290 dargelegten Verfahren Folgendes:

Der Nachwert der Erträge ist mit Ablauf von 60 Jahren:

1. Durchforstungserträge:

a) $185 \times 1{,}03^{60-40} = 185 \times 1{,}03^{20} = 185 \times 1{,}806 = 334{,}11$ Mark,
b) $288 \times 1{,}03^{60-50} = 288 \times 1{,}03^{10} = 288 \times 1{,}344 = 387{,}07$ „ ,
c) Letzter Vorertrag = ... 394,00 „ ,

1 115,18 Mark

2. Hauptertrag . . . . 3 305,00 „

Nachwert sämtlicher Roherträge: 4420,18 Mark.

Hiervon sind in Abzug zu bringen:

1. Der Nachwert der einmalig aufzuwendenden Kulturkosten:

$A = 105 \times 1{,}03^{60} = 105 \times 5{,}892 =$. 618,66 Mark.

2. Der Nachwert des laufenden Jahresaufwandes (Regiekosten):

$$A = \frac{4 \times (1{,}03^{60} - 1)}{0{,}03} = \frac{4 \times 4{,}892}{0{,}03} = \frac{19{,}568}{0{,}03} = \quad 652{,}26 \text{ „}$$

3. Der Nachwert der von dem Kapital des Grund und Bodens zu beanspruchenden Jahresrente:

$A = 400 \times (1{,}03^{60} - 1) = 400 \times 4{,}892 =$ 1 956,80 „

Nachwert des gesamten Produktionsaufwandes: 3227,72 „

Verbleibt also ein Netto-Überschuß, d. h. ein **Unternehmergewinn** von: 1 192,46 Mark.

Und der Jetzwert dieses je nach 60 Jahren eingehenden Betrages ist:

$$a = \frac{1\,192{,}46}{1{,}03^{60} - 1} = \frac{1\,192{,}46}{4{,}892} = \mathbf{243{,}76} \text{ Mark.}$$

Selbstverständlich kann man hierbei auch in der Weise zu Werke gehen, daß man gemäß den Ausführungen zu Aufgabe 289 die Diskontierung der Nachwerte auf den Rohertrag beschränkt und dann von dem sich also ergebenden Jetztwerte denjenigen der sämtlichen Kostenbeträge in Abzug bringt. Man erhält dann:

$$\frac{4\,420{,}18}{1{,}03^{60} - 1} - \left(\frac{105 \times 1{,}03^{60}}{1{,}03^{60} - 1} + \frac{4}{0{,}03} + 400\right)$$

$$= \frac{4\,420{,}18}{4{,}892} - \left(\frac{105 \times 5{,}892}{4{,}892} + 133{,}33 + 400\right)$$

$$= 903{,}55 - (126{,}46 + 133{,}33 + 400) = 903{,}55 - 659{,}79 = \mathbf{243{,}76} \text{ Mark}$$

(w. o.).

Der zweite der oben genannten Wege führt zu dem gleichen Ergebnisse. Denn es ist:

Der Nachwert sämtlicher Roherträge . . . . . 4 420,18 Mark.

Davon ab: Die oben bereits berechneten Nachwerte der Kulturkosten und des laufenden Jahresaufwandes:

618,66 + 652,26 = ... 1 270,92 „

Daher der nach 60 Jahren anfallende Reinertrag: 3 149,26 Mark.

Der Jetztwert dieses als eine immerwährende, je nach 60 Jahren wiederkehrende Rente aufzufassenden Betrages, d. i. der Bodenerwartungswert, beläuft sich aber auf:

$$a = \frac{3\,149,26}{1,03^{60} - 1} = \frac{3\,149,26}{4,892} = \ldots \quad 643,76 \text{ Mark.}$$

Stellt man nun demselben den Verkehrswert des Bodens gegenüber mit . . . . 400,00 „

So resultiert ein Überschuß, welcher den Unternehmergewinn darstellt, von: **243,76** Mark (w. o.).

Entsprechend einer immerwährenden Jahresrente von $243,76 \times 0,03 =$ **7,31** Mark.

Die zur Berechnung des Unternehmergewinn-Kapitales (U) dienende allgemeine Formel muß hiernach lauten:

$$U = \frac{D + H - \left[C \cdot 1,0p^n + \frac{V \cdot (1,0p^n - 1)}{0,0p} + B \cdot (1,0p^n - 1)\right]}{1,0p^n - 1}$$

$$= \frac{D + H}{1,0p^n - 1} - \left(\frac{C \cdot 1,0p^n}{1,0p^n - 1} + \frac{V}{0,0p} + B\right)$$

oder auch:

$$U = \frac{D + H - C \cdot 1,0p^n}{1,0p^n - 1} - \frac{V}{0,0p} - B$$

295. Ein Nadelholzwald lieferte mit Ablauf einer 60jährigen Umtriebsperiode p. ha einschließlich der (prolongierten) Durchforstungsergebnisse einen Geldwert-Rohertrag von 5852 Mark. Auf Grund von Sondererhebungen im Liegenschaftsverkehr und im Pachtwesen war der Bodenwert p. ha auf 655 Mark eingeschätzt worden. Bezogen auf die gleiche Fläche berechneten sich die Kulturkosten auf 135 Mark und die laufenden Betriebsspesen p. Jahr auf 6,50 Mark. — Wenn nun jener Rohertrag als Endwert einer nachschüssigen Jahresrente betrachtet und für denselben ein Zins von $3^1/_2$ Prozent angenommen wird: Zu wieviel Prozent hatte sich in diesem Falle das Anlage-Kapital (Bodenwert und Kulturkosten) im Jahresdurchschnitt einer Umtriebsperiode verzinst?

A. Es handelt sich hier, wie aus der Umschreibung der Aufgabe hervorgeht, um einen aussetzenden Betrieb. Der Nachweis des prozentualen Ertrages des Anlage-Kapitales kann geleistet werden, indem man dessen Verhältnis zu dem Betrage der dem Endwerte des Rohertrages entsprechenden, um die jährlichen Betriebskosten verminderten Rente auf die Zahl 100 bezieht.[1]) Auf diesem Wege findet man:

---

[1]) Wie schon aus der Fragestellung zu ersehen, setzt die Behandlung der Aufgabe einen bestimmten Zinsanspruch für den Kapitalwert des Rohertrages voraus. Dies aus dem Grunde, weil die Berechnung der diesem entsprechenden Jahresrente einen solchen Ansatz erfordert. Und wenn in dem Beispiele ausdrücklich auf das Ergebnis innerhalb einer Umtriebsperiode hingewiesen wird, so beruht das darin, daß sich im fortgesetzten Betriebe der Vorwert des in den Kulturkosten an-

Betrag der dem Rohertrage von 5852 Mark entsprechenden Jahresrente (XIV. b):

$$r = \frac{5\,852 \times 0{,}035}{1{,}035^{60} - 1} = \frac{204{,}82}{6{,}878} = \ldots\ldots \quad 29{,}78 \text{ Mark.}$$

Hiervon sind die jährlichen Aufwendungen abzuziehen mit 6,50 „

Betrag der jährlichen, um die Regiekosten reduzierten Rente: 23,28 Mark.

Das Anlage-Kapital umfaßt:

1. Den Wert des Grund und Bodens mit 655 Mark
2. Die Kulturkosten mit . . . . . . 135 „

Zusammen: 790 Mark.

Somit beträgt die Verzinsung des Anlage-Kapitales:

$$\frac{23{,}28}{790} \times 100 = \frac{2\,328}{790} = 2{,}947 \text{ oder abgerundet: } \mathbf{2{,}95} \text{ Prozent.}$$

Setzt man für die konkurrierenden Größen die seither angewendeten Buchstaben-Bezeichnungen ein, so ermittelt sich der Prozentbetrag P für das Anlage-Kapital nach der allgemeinen Formel:

$$P = \frac{\frac{(D + H) \cdot 0{,}0p}{1{,}0p^n - 1} - V}{B + C} \cdot 100$$

Anmerkungen:

1. Zu dem gleichen Ergebnisse würde man selbstverständlich auch gelangen, wenn man den jährlichen Aufwand auf den Abschluß der Umtriebsperiode prolongiert, den also erhaltenen Nachwert von dem Rohertrage in Abzug bringt und die der Differenz beider Größen entsprechende Jahresrente ermittelt. Dieser freilich weniger einfache Weg erfordert, wie ersichtlich, die vorgängige Annahme des Zinsprozent-Ansatzes wie für die Berechnung der Jahresrente, so auch für die Prolongation des jährlichen Aufwandes.

2. Würde der Nachweis der Verzinsung lediglich des in dem Grund und Boden angelegten Kapitales verlangt, dann müßten allerdings von dem Betrage der Jahresrente auch noch die Kulturkosten in Abzug gebracht, hierfür aber vorweg und anschlagsweise die von denselben zu beanspruchenden Zinsprozente eingesetzt werden. Der jährliche Aufwand würde sich dann bei Annahme von ebenfalls $3^1/_2$ Prozent erhöhen um rund:

$$135 \times 0{,}035 = 4{,}73 \text{ Mark.}$$

Und es verblieben von der Jahresrente:

$$23{,}28 - 4{,}73 = 18{,}55 \text{ Mark.}$$

Somit verzinste sich das Grundkapital zu:

$$\frac{18{,}55}{655} \times 100 = \frac{1855}{655} = \mathbf{2{,}83} \text{ Prozent.}$$

3. Eine dem oben vorgeführten Verfahren analoge Rechnungsweise ließe sich auch auf die Verhältnisse des fortgesetzten (Wiederholungs-) Betriebes dann anwenden, wenn man die Verzinsungsprozente des Anlage-Kapitales, welche die einzelne Umtriebsperiode ergibt, zur Ermittlung des Vorwertes der Kulturkosten benutzt. Die den Roherträgen entsprechende Jahresrente erreicht den gleichen Betrag, welcher für eine Umtriebsperiode berechnet wurde. Denn es belaufen sich

---

gelegten Kapitales erhöht, der Grad dieser Steigerung aber von dem anzuwendenden Zinsfuß abhängt, welcher doch erst rechnungsmäßig festgestellt werden soll.

die Vorwerte von den dauernd nach je 60 Jahren beziehbaren, um die laufenden Kosten reduzierten Erträge (Formeln XXX. a und XXVIII. a) auf:

$$a = \frac{5\,852}{1{,}035^{60} - 1} - \frac{6{,}5}{0{,}035} = \frac{5\,852}{6{,}878} - \frac{650}{3{,}5} = 850{,}83 - 185{,}71 = 665{,}12 \text{ Mark.}$$

Diesem Betrage entspricht eine immerwährende Jahresrente von $665{,}12 \times 0{,}035 = 23{,}28$ Mark (w. o.).

Nun berechnet sich aber das Anlage-Kapital im Ganzen, wie folgt:

1. Wert des Grund und Bodens . . . . 655,00 Mark
2. Vorwert der im Beginne jeder 60 jährigen Umtriebsperiode aufzuwendenden Kulturkosten (XXXI. a):

$$a = \frac{135 \times 1{,}0295^{60}}{1{,}0295^{60} - 1} = \frac{135 \times 5{,}7225}{4{,}7225} = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 163{,}58 \text{ „}$$

Zusammen: 818,58 Mark.

Die Verzinsung desselben würde also betragen:

$$\frac{23{,}28}{818{,}58} \times 100 = \frac{2328}{818{,}58} = 2{,}844 \text{ oder rund } \mathbf{2{,}85} \text{ Prozent.}$$

296. Es liegt die Aufgabe vor, die Rentabilität eines im Betriebsverband stehenden, also auf nachhaltige jährliche Nutzung eingerichteten Forstrevieres in dem Sinne festzustellen, daß der Nachweis des Prozentbetrages erbracht wird, zu welchem sich das in dem Grund und Boden angelegte Kapital verzinst. Vorausgesetzt ist eine Umtriebszeit von 80 Jahren. Von dem Vorrats-Kapital wird vorweg eine Verzinsung von $3^3/_4$ Prozent beansprucht. Unter Berufung auf örtliche Erhebungen sollen der Berechnung nachfolgend verzeichnete Wertgrößen zu Grunde gelegt werden:

1. Jährlicher Rohertrag, bezogen auf 80 ha:
   a) Im Hauptbestand (623 fm) . . . . . 11 214 M.
   b) Vorerträge . . . . 3 655 „
   14 869 Mark.
2. Kulturkosten, p. 1 ha jährlich . . . . 210 „
3. Laufender Aufwand für Verwaltung: p. ha 5,50 Mark, p. 80 ha . . . . 440 „
4. Normal-Vorrat: p. ha 3 925 Mark, p. 80 ha . . . 314 000 „
5. Verkehrswert des Grund und Bodens: p. ha 910 Mark, p. 80 ha . . . . 72 800 „

Wie hoch beläuft sich unter diesen Verhältnissen die prozentuale Verzinsung des Grundkapitales?

A. Der jährliche Rohertrag (H + D) ist (s. o.) . . 14 869 Mark.

Hiervon kommen in Abzug:

1. Die Zinsen vom Vorratskapital ($N_n . 0{,}0p$): $3\,140 \times 3{,}75 =$ . . . . 11 775 M.
2. Die jährlich aufzuwendenden Kulturkosten (C) 210 „
3. Der laufende Betriebsaufwand (V_n) . . . 440 „

12 425 „

Somit beträgt der Reinertrag vom Grund und Boden: **2 444** Mark.

Nun ist der gesamte Bodenwert: $910 \times 80 = 72\,800$ Mark (s. o.).

Und es beträgt somit dessen Verzinsung:

$$72\,800 : 2\,444 = 100 : x; \quad x = \frac{244\,400}{72\,800} = \mathbf{3{,}357} \text{ oder rund } \mathbf{3{,}36} \text{ Prozent.}$$

Der Rechnung liegt eine allgemeine Formel zu Grunde, welche lautet:

$$P = \frac{H + D - (N_n \,.\, 0{,}0p + C + V_n)}{B_n} \cdot 100 \quad (1)$$

Oder auch, bezogen auf 1 ha:

$$P = \frac{\frac{H + D}{n} - \left(N \,.\, 0{,}0p + \frac{C}{n} + V\right)}{B} \cdot 100 \quad (2).$$

Anmerkung. Angenommen, es sei im vorliegenden Falle die Frage gestellt, wie hoch sich die Verzinsung des gesamten Produktionsfonds berechnet, so hat man sich zu vergegenwärtigen, daß dieser die Werte des Grund und Bodens, der Bestandes-Vorräte, der jährlichen Kulturkosten und des jährlichen Regie-Aufwandes umfaßt. Von diesen Gliedern sind die Werte des Grund und Bodens und der Vorräte ohne Weiteres gegeben, indessen die Beträge der Kultur- und der Verwaltungskosten vorweg kapitalisiert werden müßten. Alsdann verbliebe die Aufgabe, dem Gesamt-Kapitale, aus welchem alle Kosten bestritten werden, den Geldwert-Rohertrag gegenüberzustellen.

Auf den ersten Blick würde sich dann die Rechnung — bezogen auf 80 ha — nach einer Formel folgenden Inhalts gestalten:

$$P = \frac{H + D}{B_n + N_n + \frac{C + V_n}{0{,}0p}} \cdot 100$$

Da aber nun p = P sein soll, so kann man das Verfahren wesentlich abkürzen, indem man den laufenden Betriebsfond (Kultur- und Regiekosten) vom Rohertrage in Abzug bringt und somit den Divisor der Formel um das betreffende Kapital entlastet. Man erhält alsdann die einfache Formel:

$$P = \frac{H + D - (C + V_n)}{B_n + N_n} \cdot 100 \text{ [1]} \quad (1)$$

Oder auch, bezogen auf 1 ha:

$$P = \frac{\frac{H + D}{n} - \left(\frac{C}{n} + V\right)}{B + N} \cdot 100 \quad (2)$$

Und das Rechnungsergebnis wäre dann:

$$P = \frac{14\,869 - (210 + 440)}{72\,800 + 314\,000} \times 100 = \frac{1\,421\,900}{386\,800} = \mathbf{3{,}676} \text{ oder rund } \mathbf{3{,}68} \text{ Prozent.}$$

Ebenso nach Formel 2:

$$P = \frac{185{,}8625 - (2{,}625 + 5{,}5)}{910 + 3\,925} \times 100 = \frac{17\,773{,}75}{4\,835} = 3{,}68 \text{ Prozent.}$$

297. Die Gemeinde Z. beabsichtigt, eine von dem Ortsbering weit abgelegene und wenig ergiebige Landfläche mit Nadelholz (Fichten) aufzuforsten. Der Wald würde nach einer fachmännischen Begutachtung p. ha erfordern: An je einmalig aufzuwendenden Kulturkosten 150 Mark,

[1] Zu dieser Formel gelangt man auf folgendem Wege:

$$P = \frac{H + D}{B_n + N_n + \frac{C + V_n}{0{,}0p}} \cdot 100 = \frac{H + D}{B_n + N_n + \frac{C + V_n}{0{,}0P}} \cdot 100$$

$$P \,.\, (B_n + N_n) + P \,.\, \left(\frac{C + V_n}{0{,}0P}\right) = (H + D) \,.\, 100$$

$$P \,.\, (B_n + N_n) = (H + D) \,.\, 100 - \frac{C + V_n}{0{,}0P} \cdot P$$

$$P \,.\, (B_n + N_n) = (H + D) \,.\, 100 - (C + V_n) \,.\, 100$$

$$P = \frac{(H + D) - (C + V_n)}{B_n + N_n} \cdot 100.$$

und an laufenden jährlichen Ausgaben für Schutz und Steuern 7 Mark, indessen der Taxwert des Bodens sich p. ha auf 560 Mark beläuft. Es wird eine nach den Erfahrungen in der Örtlichkeit als geeignet erkannte Umtriebszeit von 80 Jahren in's Auge gefaßt. — Wie hoch müssen die auf den Schluß eines jeden Turnus bezogenen Geld-Einnahmen aus der Forstkultur mindestens ausfallen, wenn dieselben hinreichen sollen, alle Kosten des Betriebes mit Einrechnung eines Zinsertrages von 3 Prozent zu decken?

A. Man betrachtet die zu ermittelnden Einnahmen als die Raten einer immerwährenden, am Ende jeder Umtriebszeit fälligen Rente (r), deren — bildlich auch als Ablösungskapital aufzufassender — Bar- oder Vorwert (a) gleichwertig sein muß der Summe, mit welcher sämtliche Kosten dauernd bestritten werden können. Diese umfassen aber folgende Beträge:

1. Den sich gleichbleibenden Bodenwert . . . . . . 560,00 Mark
2. Die Kulturkosten mit 150 Mark. Dieselben stellen eine im Beginne einer jeden 80 jährigen Umtriebsperiode vorschüssig wiederkehrende Rentenzahlung dar, deren Vorwert (nach Formel XXXI. a) beträgt:

$$a = \frac{150 \times 1{,}03^{80}}{1{,}03^{80} - 1} = \frac{150 \times 10{,}641}{9{,}641} = \frac{1\,596{,}15}{9{,}641} = \quad 165{,}56 \text{ „}$$

3. Die laufenden jährlichen Kosten (7 Mark), deren Barwert (nach Formel XXVIII. a) sich beläuft auf:

$$\frac{7}{0{,}03} = \frac{700}{3} = \ldots\ldots \quad 233{,}34 \text{ „}$$

Somit ist die Summe aller Vorwerte: 958,90 Mark.

Die je nach 80 Jahren nachschüssig fällige Rente — Einnahmen aus dem Forstbetriebe —, welche dieser Kapital-Anlage entspricht, berechnet sich aber (nach Formel XXX. b) also:

$$r = 958{,}90 \times (1{,}03^{80} - 1) = 958{,}90 \times 9{,}641 = \mathbf{9\,244{,}75} \text{ Mark.}$$

Die allgemeine Formel für die Ermittlung des Rohertrages (E) wäre hiernach:

$$E = \left(B + \frac{C \,.\, 1{,}0p^n}{1{,}0p^n - 1} + \frac{V}{0{,}0p}\right) . (1{,}0p^n - 1)$$

oder auch:

$$E = B \,.\, (1{,}0p^n - 1) + C \,.\, 1{,}0p^n + \frac{V \,.\, (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}.$$

Anmerkung 1. Wie sich das gleiche Verhältnis innerhalb jeder Umtriebsperiode wiederholt, kann mittelst der Berechnung von Zeitrenten dargetan werden. Geht man dabei von den Vorwerten aus, so hat man nach Formel I bezw. XIV:

a) Vom Bodenwert (560 Mark); derselbe ergibt ein Anwachsen der Rente auf:
$560 \times (1{,}03^{80} - 1) = 560 \times 9{,}641 =$ . . . . 5 398,96 Mark

b) Von den Kulturkosten (150 Mark):
$150 \times 1{,}03^{80} = 150 \times 10{,}641 =$ . . . . 1 596,15 „

c) Von dem laufenden Aufwande (7 Mark):
$\frac{7}{0{,}03} \times (1{,}03^{80} - 1) = 233{,}34 \times 9{,}641 =$ . . . . 2 249,64 „

Zusammen: 9 244,75 Mark (w. o.).

Oder:

a) Die Renten vom Bodenwert mit Ablauf von 80 Jahren (w. o.). 5 398,96 Mark

b) Der Vorwert der Kulturkosten ist . . . . . 150,00 M.

c) Der Vorwert der laufenden Ausgaben berechnet sich (XIV. a) auf:

$$a = \frac{7 \times (1{,}03^{80} - 1)}{1{,}03^{80} \times 0{,}03} = \frac{233{,}34 \times 9{,}641}{10{,}641} = . . \quad 211{,}41(2) „$$

Zusammen: 361,41(2) M.

Hiervon der Endwert am Schlusse der Umtriebsperiode:

$361{,}412 \times 1{,}03^{80} = 361{,}412 \times 10{,}641 =$ . . . . . 3 845,79 „

Zusammen: 9 244,75 Mark (w. o.).

Anmerkung 2. Angenommen, daß von dieser gesamten Einnahme nach vorliegenden direkten Beobachtungen 75 Prozent auf den Hauptertrag und 25 Prozent auf die vom 30ten Jahre ab je nach 10 Jahren bezogenen und bis zum Ablauf der Umtriebszeit mit 3 Prozent angewachsenen Zwischennutzungen entfallen, so würde sich der Hauptertrag auf rund $9\,244 \times 0{,}75 = 6\,933$ Mark, und wenn für den fm ein erntekostenfreier Wert von 14 Mark angesetzt werden kann, auf rund 495 fm berechnen.

298. Für die Anlage eines Fichtenwaldes, welcher auf aussetzenden Betrieb eingerichtet ist, verlangt der Grundeigentümer rechnerische Auskunft darüber, welche Umtriebszeit ihm die Aussicht auf den höchsten wirtschaftlichen Erfolg gewährt. Es stehen dabei die Perioden von 60, 70 und 80 Jahren in Frage. Der Ermittlung der Erträge sollen die Zahlen zu Grunde gelegt werden, welche in den Burckhardt'schen Tafeln für die II. Standortsklasse angegeben sind. — An Geldwerten sind einzusetzen p. fm:

Der Haupterträge nach 60, 70 und 80 Jahren: 11—13,5 und 16 Mark.

Der Vorerträge nach 30 bis 80 Jahren: Steigend von 3 auf 5, 7, 9, 11 und 13 Mark.

Die Kulturkosten werden auf 160 Mark, die laufenden jährlichen Verwaltungskosten auf 7 Mark p. ha veranschlagt. Der Zinsanspruch beträgt gleichmäßig nur $2^1/_2$ Prozent.

Wie gestaltet sich hiernach die Rechnung?

A. Die Naturalerträge sind:[1])

Alter	Hauptbestand:	Vorerträge:	Summa:	Durchschnittlicher jährlicher Zuwachs des Hauptbestandes:	Durchschnittlicher jährlicher Zuwachs der Gesamtmasse:
(Jahre)	fm	fm	fm	fm	fm
30	143	12	155	4,76	5,17
40	219	23	254	5,47	6,35
50	295	28	358	5,90	7,16
60	380	26	469	6,33	7,81
70	466	24	579	6,65	8,27
80	532	22	667	6,65	8,34

[1]) Auszugsweise nach der in dem „Handbuch der politischen Ökonomie“ von G. Schönberg, 2. Aufl. 1886, II, S. 171 von v. Helferich mitgeteilten Tafel.

Hiernach berechnen sich die Geldwerte der Erträge also:

I. Nach 60 Jahren:

1. Vorerträge:

a) $(12 \times 3) \times 1{,}025^{30} = 36 \times 2{,}098 =$ 75,53
b) $(23 \times 5) \times 1{,}025^{20} = 115 \times 1{,}639 =$ 188,49
c) $(28 \times 7) \times 1{,}025^{10} = 196 \times 1{,}280 =$ 250,88
d) $26 \times 9 =$ 234,00

748,90

2. Hauptertrag: $380 \times 11 =$ 4 180,00

Gesamtwert in Mark: 4 928,90

II. Nach 70 Jahren:

1. Vorerträge:

a) $36 \times 1{,}025^{40} = 36 \times 2{,}685 =$ . . . 96,66
b) $115 \times 1{,}025^{30} = 115 \times 2{,}098 =$ . . 241,27
c) $196 \times 1{,}025^{20} = 196 \times 1{,}639 =$ . . 321,24
d) $234 \times 1{,}025^{10} = 234 \times 1{,}280 =$ . . 299,53
e) $24 \times 11 =$ 264,00

1 222,70

2. Hauptertrag: $466 \times 13{,}5 =$ 6 291,00

Gesamtwert in Mark: 7 513,70

III. Nach 80 Jahren:

1. Vorerträge:

a) $36 \times 1{,}025^{50} = 36 \times 3{,}437 =$ 123,73
b) $115 \times 1{,}025^{40} = 115 \times 2{,}685 =$ . . . 308,77
c) $196 \times 1{,}025^{30} = 196 \times 2{,}098 =$ . . . 411,20
d) $234 \times 1{,}025^{20} = 234 \times 1{,}639 =$ . . . 383,53
e) $264 \times 1{,}025^{10} = 264 \times 1{,}280 =$ . . . 337,92
f) $22 \times 13 =$ 286,00

1 851,15

2. Hauptertrag: $532 \times 16 =$ 8 512,00

Gesamtwert in Mark: 10 363,15

Wendet man auf die nunmehr festgestellten Grundlagen beispielsweise die oben aufgeführte Formel (2) (S. 323) an, so erhält man folgende Bodenerwartungswerte p. ha:

Für den Umtrieb von

60 Jahren:

$$\frac{4\,928{,}90 - (160 \times 1{,}025^{60})}{1{,}025^{60} - 1} - \frac{7}{0{,}025}$$
$$= \frac{4\,928{,}90 - (160 \times 4{,}4)}{3{,}4} - 280$$
$$= \frac{4\,928{,}90 - 704}{3{,}4} - 280$$
$$= \frac{4\,224{,}90}{3{,}4} - 280$$
$$= 1\,242{,}62 - 280$$
$$= \mathbf{962{,}62} \text{ Mark.}$$

70 Jahren:

$$\frac{7\,513{,}70 - (160 \times 1{,}025^{70})}{1{,}025^{70} - 1} - \frac{7}{0{,}025}$$
$$= \frac{7\,513{,}70 - (160 \times 5{,}632)}{4{,}632} - 280$$
$$= \frac{7\,513{,}70 - 901{,}12}{4{,}632} - 280$$
$$= \frac{6\,612{,}58}{4{,}632} - 280$$
$$= 1\,427{,}59 - 280$$
$$= \mathbf{1\,147{,}59} \text{ Mark.}$$

80 Jahren:

$$\frac{10\,363{,}15 - (160 \times 1{,}025^{80})}{1{,}025^{80} - 1} - \frac{7}{0{,}025}$$
$$= \frac{10\,363{,}15 - (160 \times 7{,}21)}{6{,}21} - 280$$
$$= \frac{10\,363{,}15 - 1\,153{,}60}{6{,}21} - 280$$
$$= \frac{9\,209{,}55}{6{,}21} - 280$$
$$= 1\,483{,}02 - 280$$
$$= \mathbf{1\,203{,}02} \text{ Mark.}$$

Hiernach würde unter den gegebenen Voraussetzungen (Naturale Erträge, sowie Höhe und Abstufung der Holz-Sortimentspreise) der wirtschaftliche Erfolg bei dem 80jährigen Umtriebe am größten sein. — Der Nachweis aber, daß dessen Rentabilität diejenige des 70jährigen Umtriebes nicht mehr bedeutend überwiegt, lässet zugleich erkennen, daß dort der Höhepunkt der Ergiebigkeit erreicht ist, jedenfalls eine Ausdehnung der Umtriebszeit um abermals 10 Jahre keine Aussicht auf eine weitere Steigerung der Reinerträge gewährt. — Bemerkenswert ist übrigens, daß im vorliegenden Falle die Steigerung der wirtschaftlichen Ergebnisse mit dem durchschnittlichen jährlichen naturalen Zuwachs (vid. die Ertrags-Übersicht) Schritt hält.

Anmerkung. Wenn es sich c. p. um einen jährlichen Betrieb handelte, so würde die Kalkulation allerdings wesentlich vereinfacht, weil alsdann, wie schon mehrmals hervorgehoben wurde, die Prolongationen und Diskontierungen wegfallen und nur noch die Zinsen von den auf Grund der Angaben in den Ertragstafeln leicht zu beziffernden Vorratswerten in den Jahresaufwand einzubeziehen sind. Das Verfahren läuft also auf die Anwendung der am Schlusse der Rechnung über die Aufgabe 291 (S. 329) verzeichneten Formel hinaus, aus welcher sich 3 einfache Zahlenreihen ergeben, welche mit den in Vergleich zu stellenden Reinertragswerten abschließen.

299. Eine hoch gelegene, als Jungviehweide benutzte, 15 ha große Gutsfläche lieferte seither auf dem Verpachtungswege p. ha einen jährlichen Erlös von 48 Mark, indessen der Besitzer eine Reihe von laufenden Kosten — Unterhalt und bezw. Verzinsung der baulichen Anlagen (Stallungen und Vorratsräume, Tränke-Einrichtung, Einfriedigungen, Wege), Steuern usw. —, welche zusammen im Durchschnitt auf 22 Mark p. ha berechnet wurden, zu übernehmen hatte, so daß ihm eine reine Pachtrente von 26 Mark verblieb. Zu einer Zeit nun, da das Bedürfnis einer eingreifenden Erneuerung der baulichen Einrichtungen eingetreten ist, taucht die Erwägung auf, ob nicht eine Aufforstung des Grundstücks mit Fichten vorzuziehen sei, und soll über diese Frage im Rechnungswege auf folgenden Grundlagen entschieden werden:

Es sind die Erträge anzunehmen, welche in den von den preußischen Versuchsanstalten veröffentlichten Ertragstafeln für die III. Standortsklasse aufgeführt wurden.[1] Dabei ist eine Umtriebszeit von 60 Jahren vorzusehen. Hinsichtlich des Geldwertes der Erträge glaubt man p. fm berechnen zu können: Im Hauptertrage: 11 Mark; in den nach 30 Jahren beginnenden Durchforstungserträgen: Von 4 Mark steigend bis auf 5,50 — 7 und 9 Mark. Die Kulturkosten sind auf 200 Mark, und die jährlichen Aufwendungen für Verwaltung auf 4 Mark p. ha veranschlagt.

Wie stellt sich hiernach bei Annahme eines Zinsfußes von 3 Prozent die Rentabilität der Forstkultur im aussetzenden Betriebe gegenüber der landwirtschaftlichen Benutzung des Bodens?

A. Soll auch in diesem Falle das Verfahren der Prolongation der Erträge eingeschlagen werden, so berechnen sich deren Nachwerte also:

[1] Dieselben sind nachfolgend gemäß den Angaben von H. Martin in dessen Schrift: „Die forstliche Statik", Berlin, 1905, S. 278, auszugsweise reproduziert.

1. Durchforstungserträge:

a) 20 fm à 4 Mark = 80 Mark: $80 \times 1{,}03^{30}$
$= 80 \times 2{,}427 =$ . . . . 194,16 Mark.

b) 40 fm à 5,5 Mark = 220 Mark: $220 \times 1{,}03^{20}$
$= 220 \times 1{,}806 =$ . . . . 397,32 „

c) 50 fm à 7 Mark = 350 Mark: $350 \times 1{,}03^{10}$
$= 350 \times 1{,}344 =$ . . . . 470,40 „

d) 60 fm à 9 Mark = ... 540,00 „

1 601,88 Mark.

2. Hauptertrag: 380 fm à 11 Mark = . 4 180,00 „

Summe des Nachwertes der in 60 Jahren eingehenden Roherträge: 5 781,88 Mark.

Faßt man dann die Ergebnisse zunächst für je eine Umtriebszeit in's Auge, so hat man hiervon in Abzug zu bringen:

1. Die Kulturkosten mit: $200 \times 1{,}03^{60}$
$= 200 \times 5{,}892 =$ . . . . 1 178,40 Mark.

2. Die Verwaltungskosten mit:
$\frac{4 \times (1{,}03^{60} - 1)}{0{,}03} = \frac{4 \times 4{,}892}{0{,}03} =$
$\frac{19{,}568}{0{,}03} =$ . . . . 652,26 „

Zusammen: 1 830,66 Mark.

Bleibt ein Nachwert des Reinertrags der Forstkultur von: 3 951,22 Mark.

Liefert dagegen das Grundstück in der Benutzung als Weideland einen jährlichen Netto-Pachterlös von 26 Mark, so berechnet sich dessen Nachwert nach der Formel XIV also:

$$A = \frac{26 \times (1{,}03^{60} - 1)}{0{,}03} = \frac{26 \times 4{,}892}{0{,}03} = \frac{127{,}192}{0{,}03} = \ . \ . \quad 4\,239{,}73 \text{ Mark.}$$

Setzt man nun einen dauernden Betrieb der Forstkultur voraus, so erscheint der Reinertrag derselben als eine je nach 60 Jahren wiederkehrende, also aussetzende Rente. Und wenn man hiernach jene beiden Nachwerte im gleichen Sinne behandelt, so ergibt sich nach Formel XXX. a ein Bodenwert p. ha:

In der Weidewirtschaft von: $\frac{4\,239{,}73}{1{,}03^{60} - 1} = \frac{4\,239{,}73}{4{,}892} = 866{,}66$ Mark

(Dem entspricht wiederum, à 3 Prozent, der berechnete jährliche Netto-Pachtertrag von $8{,}6666 \times 3 = 26$ Mark.)

In der Forstwirtschaft von: $\frac{3\,951{,}22}{1{,}03^{60} - 1} = \frac{3\,951{,}22}{4{,}892} = 807{,}69$ „

(Gleichwertig mit einer Jahresrente von: $8{,}0769 \times 3 = 24{,}23$ Mark.)

Überschuß des Reinertrags-Kapitales der Weidewirtschaft: **58.97** Mark.

(Entsprechend einer Jahresrente von: $0{,}5897 \times 3 =$ **1,77** Mark p. ha.)

Unter den obwaltenden Verhältnissen würde es also nicht ratsam sein, die betr. Gutsfläche aufzuforsten.

Anmerkung. Aus dem vorliegenden Beispiele kann nun auch ersehen werden, auf welche Weise sich die Frage rechnerisch beantworten lässet, wie hoch gegebenen Falles der jährliche Boden-Reinertrag im landwirtschaftlichen Betriebe sich belaufen müßte, wenn derselbe den gleichen Betrag erreichen soll, welcher nachweislich je mit Ablauf einer Umtriebsperiode in der Forstwirtschaft zu erwarten ist.

Angenommen, daß ein Forstbetrieb je nach 60 Jahren den Reinertrag von 5 812 Mark abwerfen würde, so berechnet sich sein Vorwerts-Kapital bei Zugrundelegung eines Zinsfußes von $3^1/_2$ Prozent auf:

$$\frac{5\,812}{1{,}035^{60} - 1} = \frac{5\,812}{6{,}878} = 845 \text{ Mark.}$$

Diesem Kapitale ist aber gleichwertig eine Jahresrente von $8{,}45 \times 3{,}5 = 29{,}57$ Mark, welche der landwirtschaftliche Betrieb netto abwerfen müßte.

300. Ein geschlossener, in Nadelholzkultur bewirtschafteter Landkomplex von 50 ha liefert nach vorliegenden Berechnungen mit Ablauf von 70 Jahren bei Zugrundelegung eines Zinsfußes von 3 Prozent einen Reinertrag p. ha von 4 956 Mark. Den Besitzer beschäftigt die Frage, ob es nicht vorteilhafter sei, mit der bevorstehenden Abholzung den Forstbetrieb aufzugeben und an dessen Stelle die landwirtschaftliche Kultur einzuführen. Leitend ist dabei der Gedanke, daß sich auf diese Weise nach Herstellung der erforderlichen Hochbauten, Wege-Anlagen usw. ein Gutshof (bezw. ein Vorwerk) begründen ließe. Nach einer dieserhalb vorgenommenen Taxation würde der benötigte Bauaufwand sich auf rund 14 000 Mark belaufen.

Wenn nun der Besitzer den durch die Bauten verursachten jährlichen Kostenaufwand für Zins, Amortisation und Reparaturen auf 6 Prozent veranschlagt: Welche Höhe müßte dann der jährliche Boden-Reinertrag im landwirtschaftlichen Betriebe p. ha erreichen, wenn derselbe dem je nach 70 Jahren eingehenden Reinertrage in der Forstwirtschaft gleichkommen soll?

A. Wird auch in diesem Falle eine dauernde Forstkultur vorausgesetzt, so ist durch die Rechnung die Frage zu beantworten, welche Rente dem Jetztwerte des forstwirtschaftlichen Reinertrages und den Anforderungen des Baukapitales entspricht.

Der Jetztwert des forstlichen Reinertrages (Bodenerwartungswert) ist (XXX. a):

$$a = \frac{4\,956}{1{,}03^{70} - 1} = \frac{4\,956}{6{,}918} = 716{,}40 \text{ Mark.}$$

Hiervon eine Rente à 3 Prozent: $716{,}40 \times 0{,}03$
$= 7{,}164 \times 3 =$ . . . . 21,50 Mark

Dazu die Anforderungen des Baukapitales p. ha:
$\frac{14\,000}{50} \times 0{,}06 = 280 \times 0{,}06 =$ . . . . 16,80 „

Zusammen: **38,30** Mark.

Zur Kontrolle kann auch folgende Rechnung dienen:

Der Nachwert des forstlichen Reinertrages ist mit Ablauf von 70 Jahren (s. o.) . . . . 4 956,00 Mark.

Die Kosten des Unterhalts der Bauten sind bis dahin angewachsen auf:

$$A = \frac{16{,}80 \times (1{,}03^{70} - 1)}{0{,}03} = 560 \times 6{,}918 = \quad . \quad . \quad 3\,874{,}08 \text{ „}$$

Zusammen: 8 830,08 Mark.

Hiervon beträgt aber der Jetztwert:

$$\frac{8\,830{,}08}{1{,}03^{70} - 1} = \frac{8\,830{,}08}{6{,}918} = 1\,276{,}39 \text{ Mark.}$$

Deren jährlicher Zinsertrag sich beläuft auf: $12{,}7639 \times 3 =$ rund **38,30** Mark (w. o.).

Es müßte somit in der landwirtschaftlichen Kultur ein Reinertrag oder eine Rente vom Grund und Boden (bezw. eine reine Pachtrente) p. ha von mindestens 38 Mark zu gewärtigen sein.



Anhang.

Hilfstafeln für die Zinseszins- und Rentenrechnung.

I. Prolongierungs-Tafel.

Nach Jahren	Der End- oder Nachwert ($1{,}0p^n$) einer Geldeinheit (Mark, Krone, Franc usw.) beträgt bei einem Zinsfuße (p) von:					
(n)	1 %	2 %	2 1/2 %	3 %	3 1/4 %	3 1/2 %
1	1,01	1,02	1,025	1,03	1,032 5	1,035
2	020 1	040 4	050 625	060 9	066 0562	071 225
3	030 301	061 208	076 8906	092 727	100 7031	108 7179
4	040 6040	082 4322	103 8129	125 5088	136 4759	147 5230
5	051 0100	104 0808	131 4082	159 2741	173 4114	187 6863
6	061 5201	126 1624	159 6934	194 0523	211 5473	229 2553
7	072 1353	148 6857	188 6857	229 8739	250 9225	272 2793
8	082 8567	171 6594	218 4029	266 7701	291 5775	316 8090
9	093 6853	195 0926	248 8630	304 7732	333 5538	362 8973
10	104 6221	218 9944	280 0845	343 9164	376 8943	410 5988
11	1,115 6683	1,243 3743	1,312 0867	1,384 2339	1,421 6434	1,459 9697
12	126 8250	268 2418	344 8888	425 7609	467 8468	511 0687
13	138 0933	293 6066	378 5110	468 5337	515 5518	563 9561
14	149 4742	319 4788	412 9738	512 5897	564 8072	618 6945
15	160 9690	345 8683	448 2982	557 9674	615 6635	675 3488
16	172 5787	372 7857	484 5056	604 7064	668 1725	733 9860
17	184 3044	400 2414	521 6183	652 8476	722 3881	794 6755
18	196 1475	428 2462	559 6587	702 4331	778 3657	857 4892
19	208 1089	456 8112	598 6502	753 5060	836 1626	922 5013
20	220 1900	485 9474	638 6164	806 1112	895 8379	989 7889
21	1,232 3919	1.515 6663	1,679 5818	1,860 2946	1,957 4527	2.059 4315
22	244 7159	545 9797	721 5714	916 1034	2,021 0699	131 5116
23	257 1630	576 8993	764 6107	973 5865	086 7546	206 1145
24	269 7346	608 4372	808 7259	2.032 7941	154 5741	283 3285
25	282 4320	640 6060	853 9441	093 7779	224 5978	363 2450
26	295 2563	673 4181	900 2927	156 5913	296 8972	445 9586
27	308 2089	706 8865	947 8000	221 2890	371 5464	531 5671
28	321 2910	741 0242	996 4950	287 9277	448 6217	620 1720
29	334 5039	775 8447	2,046 4074	356 5655	528 2019	711 8780
30	347 8489	811 3616	097 5676	427 2625	610 3684	806 7937
31	1,361 3274	1,847 5888	2.150 0068	2,500 0803	2,695 2054	2,905 0315
32	374 9407	884 5406	203 7569	575 0828	782 7996	3,006 7076
33	388 6901	922 2314	258 8509	652 3352	873 2406	111 9423
34	402 5770	960 6760	315 3221	731 9053	966 6209	220 8603
35	416 6028	999 8895	373 2052	813 8624	3,063 0361	333 5904
36	430 7688	2,039 8873	432 5353	898 2783	162 5847	450 2661
37	445 0765	080 6851	493 3487	985 2267	265 3687	571 0254
38	459 5272	122 2988	555 6824	3.074 7835	371 4932	696 0113
39	474 1225	164 7448	619 5745	167 0270	481 0668	825 3717
40	488 8637	208 0397	685 0638	262 0378	594 2014	959 2597
41	1,503 7524	2.252 2005	2,752 1904	3.359 8989	3,711 0130	4,097 8338
42	518 7899	297 2445	820 9952	460 6959	831 6209	241 2580
43	533 9778	343 1894	891 5201	561 5168	956 1486	389 7020
44	549 3176	390 0531	963 8081	671 4523	4,084 7234	543 3416
45	564 8107	437 8542	3,037 9033	781 5958	217 4769	702 3585
46	580 4588	486 6113	113 8504	895 0437	354 5449	866 9411
47	596 2634	536 3435	191 6971	4,011 8950	496 0676	5,037 2840
48	612 2261	587 0704	271 4896	132 2519	642 1898	213 5890
49	628 3483	638 8118	353 2768	256 2194	793 0610	396 0646
50	644 6318	691 5880	437 1087	383 9060	948 8355	584 9269

Nach Jahren (n)	Der End- oder Nachwert ($1,0p^n$) einer Geldeinheit (Mark, Krone, Franc usw.) beträgt bei einem Zinsfuße (p) von:					
	1%	2%	2½%	3%	3¼%	3½%
51	1,661 0781	2,745 4193	3,523 0364	4,515 4232	5,109 6726	5,780 3993
52	677 6889	800 3282	611 1123	650 8859	275 7370	982 7133
53	694 4658	856 3347	701 3902	790 4125	447 1984	6,192 1082
54	711 4105	913 4614	793 9249	934 1248	624 2324	408 8320
55	728 5246	971 7307	888 7730	5,082 1486	807 0199	633 1411
56	745 8098	3,031 1653	985 9924	234 6130	995 7481	865 3011
57	763 2679	091 7886	4,085 6422	391 6514	6,190 6099	7,105 5866
58	780 9006	153 6244	187 7832	553 4010	391 8047	354 2821
59	798 7096	216 6968	292 4778	720 0030	599 5384	611 6820
60	816 6967	281 0308	399 7897	891 6031	814 0234	878 0909
61	1,834 8637	3,346 6514	4,509 7845	6,068 3512	7,035 4791	8,153 8241
62	853 2123	413 5844	622 5291	250 4017	264 1322	439 2079
63	871 7444	481 8561	738 0923	437 9138	500 2165	734 5802
64	890 4619	551 4932	856 5446	631 0512	743 9735	9,040 2905
65	909 3665	622 5231	977 9583	829 9827	995 6527	356 7007
66	928 4601	694 9736	5,102 4072	7,034 8822	8,255 5114	684 1852
67	947 7447	768 8730	229 9674	245 9287	523 8155	10,023 1317
68	967 2222	844 2505	360 7166	463 3065	800 8395	373 9413
69	986 8944	921 1355	494 7345	687 2057	9,086 8668	737 0292
70	2,006 7634	999 5582	632 1029	917 8219	382 1900	11,112 8253
71	2,026 8310	4,079 5494	5,772 9054	8,155 3566	9,687 1112	11,501 7741
72	047 0993	161 1404	917 2281	400 0173	10,001 9423	904 3362
73	067 5703	244 3632	6,065 1588	652 0178	327 0054	12,320 9880
74	088 2460	329 2504	216 7877	911 5783	662 6331	752 2226
75	109 1285	415 8355	372 2074	9,178 9257	11,009 1686	13,198 5504
76	130 2197	504 1522	531 5126	454 2934	366 9666	660 4996
77	151 5219	594 2352	694 8004	737 9222	736 3930	14,138 6171
78	173 0372	686 1199	862 1704	10,030 0599	12,117 8258	633 4687
79	194 7675	779 8423	7,033 7247	330 9617	511 6552	15,145 6401
80	216 7152	875 4392	209 5678	640 8906	918 2839	675 7375
81	2,238 8824	4,972 9479	7,389 8070	10,960 1173	13,338 1282	16,224 3883
82	261 2712	5,072 4069	574 5522	11,288 9208	771 6173	792 2419
83	283 8839	173 8550	763 9160	627 5884	14,219 1949	17,379 9704
84	306 7227	277 3321	958 0139	976 4161	681 3187	988 2694
85	329 7900	382 8788	8,156 9642	12,335 7085	15,158 4616	18,617 8588
86	353 0879	490 5364	360 8883	705 7798	651 1116	19,269 4839
87	376 6187	600 3471	569 9105	13,086 9532	16,159 7727	943 9158
88	400 3849	712 3540	784 1583	479 5618	684 9653	20,641 9528
89	424 3888	826 6011	9,003 7623	883 9486	17,227 2267	21,364 4212
90	448 6327	943 1331	228 8563	14,300 4671	787 1116	22,112 1759
91	2,473 1190	6,061 9958	9,459 5777	14,729 4811	18,365 1927	22,886 1021
92	497 8502	183 2357	696 0672	15,171 3656	962 0615	23,687 1157
93	522 8287	306 9004	938 4689	626 5065	19,578 3285	24,516 1647
94	548 0570	433 0384	10,186 9306	16,095 3017	20,214 6241	25,374 2305
95	573 5375	561 6992	441 6038	578 1608	871 5994	26,262 3286
96	599 2729	692 9332	702 6439	17,075 5056	21,549 9264	27,181 5101
97	625 2656	826 7918	970 2100	587 7708	22,250 2990	28,132 8629
98	651 5183	963 3277	11,244 4653	18,115 4039	973 4337	29,117 5131
99	678 0335	7,102 5942	525 5769	658 8660	23,720 0703	30,136 6261
100	704 8138	244 6461	813 7163	19,218 6320	24,490 9726	31,191 4080

Nach Jahren	Der End- oder Nachwert ($1{,}0p^n$) einer Geldeinheit (Mark, Krone, Franc usw.) beträgt bei einem Zinsfuße (p) von:					
(n)	$3^3/_4$ %	4 %	$4^1/_4$ %	$4^1/_2$ %	$4^3/_4$ %	5 %
1	1,037 5	1,04	1,042 5	1,045	1,047 5	1,05
2	076 4062	081 6	086 8062	092 025	097 2562	102 5
3	116 7715	124 864	132 9955	141 1661	149 3759	157 625
4	158 6504	169 8586	181 1478	192 5186	203 9713	215 5062
5	202 0998	216 6529	231 3466	246 1819	261 1599	276 2816
6	247 1785	265 3190	283 6788	302 2601	321 0650	340 0956
7	293 9477	315 9318	338 2352	360 8618	383 8156	407 1004
8	342 4708	368 5690	395 1102	422 1006	449 5468	477 4554
9	392 8134	423 3118	454 4024	486 0951	518 4003	551 3282
10	445 0439	480 2443	516 2145	552 9694	590 5243	628 8946
11	1,499 2331	1,539 4541	1,580 6536	1,622 8530	1,666 0742	1,710 3394
12	555 4543	601 0322	647 8314	695 8814	745 2128	795 8563
13	613 7839	665 0735	717 8642	772 1961	828 1104	885 6491
14	674 3008	731 6764	790 8734	851 9449	914 9456	979 9316
15	737 0870	800 9435	866 9855	935 2824	2,005 9055	2,078 9282
16	802 2278	872 9812	946 3324	2,022 3701	101 1860	182 8746
17	869 8113	947 9005	2,029 0516	113 3768	200 9924	292 0183
18	939 9293	2,025 8165	115 2862	208 4788	305 5395	406 6192
19	2,012 6766	106 8492	205 1859	307 8603	415 0526	526 9502
20	088 1520	191 1231	298 9063	411 7140	529 7676	653 2977
21	2,166 4577	2,278 7681	2,396 6098	2,520 2412	2,649 9316	2,785 9626
22	247 6999	369 9188	498 4657	633 6520	775 8033	925 2607
23	331 9886	464 7155	604 6505	752 1663	907 6540	3,071 5238
24	419 4382	563 3042	715 3482	876 0138	3,045 7676	225 0999
25	510 1671	665 8363	830 7505	3,005 4345	190 4415	386 3549
26	604 2984	772 4698	951 0574	140 6790	341 9875	555 6727
27	701 9596	883 3686	3.076 4773	282 0096	500 7319	733 4563
28	803 2830	998 7033	207 2276	429 7000	667 0167	920 1291
29	908 4062	3,118 6514	343 5348	584 0365	841 2000	4,116 1356
30	3,017 4714	243 3975	485 6350	745 3181	4,023 6570	321 9424
31	3,130 6266	3,373 1334	3,633 7745	3,913 8574	4,214 7807	4,538 0395
32	248 0252	508 0587	788 2099	4,089 9810	414 9828	764 9415
33	369 8260	648 3811	949 2088	274 0302	624 6944	5,003 1885
34	496 1945	794 3163	4,117 0502	466 3615	844 3674	253 3480
35	627 3018	946 0890	292 0248	667 3478	5,074 4749	516 0154
36	763 3256	4.103 9325	474 4359	877 3785	315 5124	791 8161
37	904 4503	268 0899	664 5994	5,096 8605	567 9993	6,081 4069
38	4,050 8672	438 8134	862 8449	326 2192	832 4792	385 4773
39	202 7747	616 3660	5,069 5158	565 8991	6,109 5220	704 7511
40	360 3788	801 0206	284 9702	816 3645	399 7243	7,039 9887
41	4,523 8930	4,993 0614	5,509 5815	6,078 1009	6,703 7112	7,391 9881
42	693 5389	5,192 7839	743 7387	351 6155	7,022 1375	761 5876
43	869 5467	400 4953	987 8476	637 4382	355 6890	8,149 6669
44	5,052 1547	616 5151	6.242 3311	936 1229	705 0843	557 1503
45	241 6105	841 1757	507 6302	7,248 2484	8.071 0758	985 0078
46	438 1708	6,074 8227	784 2044	574 4196	454 4519	9,434 2582
47	612 1023	317 8156	7,072 5331	915 2685	856 0383	905 9711
48	853 6811	570 5282	373 1158	8,271 4556	9,276 7001	10,401 2696
49	6,073 1941	833 3491	686 4732	643 6711	717 3434	921 3331
50	300 9389	7,1066833	8,013 1483	9,032 6363	10,178 9172	11,467 3998

Nach Jahren (n)	Der End- oder Nachwert ($1{,}0p^n$) einer Geldeinheit (Mark, Krone, Franc usw.) beträgt bei einem Zinsfuße (p) von: $3\frac{3}{4}\,\%$	$4\,\%$	$4\frac{1}{4}\,\%$	$4\frac{1}{2}\,\%$	$4\frac{3}{4}\,\%$	$5\,\%$
51	6,537 2241	7,390 9507	8,353 7071	9,439 1049	10,662 4158	12,040 7698
52	782 3700	686 5887	708 7397	863 8646	11,168 8805	642 8083
53	7,036 7089	994 0523	9,078 8611	10,307 7385	699 4023	13,274 9487
54	300 5855	8,313 8143	464 7127	771 5868	12,255 1240	938 6961
55	574 3574	646 3669	866 9630	11,256 3082	837 2423	14,635 6309
56	858 3958	992 2216	10,286 3089	762 8420	13,447 0114	15,367 4125
57	8,153 0857	9,351 9105	723 4771	12,292 1699	14,085 7444	16,135 7831
58	458 8264	725 9869	11,179 2248	845 3176	754 8173	942 5722
59	776 0324	10,115 0263	654 3419	13,423 3569	15,455 6711	17,789 7008
60	9,105 1336	519 6274	12,149 6514	14,027 4079	16,189 8154	18,679 1859
61	9,446 5761	10,940 4125	12,666 0116	14,658 6413	16,958 8317	19,613 1452
62	800 8227	11,378 0290	13,204 3171	15,318 2801	17,764 3762	20,593 8024
63	10,168 3536	833 1502	765 5006	16,007 6027	18,608 1841	21,623 4926
64	549 6668	12,306 4762	14,350 5344	727 9449	19,492 0728	22,704 6672
65	945 2793	798 7352	960 4321	17,480 7024	20,417 9463	23,839 9006
66	11,355 7273	13,310 6846	15,596 2504	18,267 3340	21,387 7987	25,031 8956
67	781 5671	843 1120	16,259 0911	19,089 3640	22,403 7191	26,283 4904
68	12,223 3759	14,396 8365	950 1025	948 3854	23,467 8958	27,597 6649
69	681 7524	972 7099	17,670 4818	20,846 0628	24,582 6209	28,977 5481
70	13,157 3182	15,571 6183	18,421 4773	21,784 1356	25,750 2953	30,426 4255
71	13,650 7176	16,194 4831	19,204 3901	22,764 4217	26,973 4344	31,947 7468
72	14,162 6195	842 2624	20,020 5767	23,788 8207	28,254 6725	33,545 1341
73	693 7177	17,515 9529	871 4512	24,859 3176	29,596 7695	35,222 3909
74	15,244 7322	18,216 5910	21,758 4878	25,977 9869	31,002 6160	36,983 5104
75	816 4096	945 2547	22,683 2236	27,146 9963	32,475 2403	38,832 6859
76	16,409 5250	19,703 0648	23,647 2606	28,368 6111	34,017 8142	40,774 3202
77	17,024 8822	20,491 1874	24,652 2691	29,645 1986	35,633 6603	42,813 0362
78	663 3152	21,310 8349	25,699 9906	30,979 2326	37,326 2592	44,953 6880
79	18,325 6896	22,163 2683	26,792 2402	32,373 2980	39,099 2565	47,201 3724
80	19,012 9029	23,049 7991	27,930 9104	33,830 0964	40,956 4712	49,561 4411
81	19,725 8868	23,971 7910	29,117 9741	35,352 4508	42,901 9036	52,039 5131
82	20,465 6075	24,930 6627	30,355 4880	36,943 3111	44,939 7440	54,641 4887
83	21,233 0678	25,927 8892	31,645 5962	38,605 7601	47,074 3819	57,373 5632
84	22,029 3079	26,965 0047	32,990 5341	40,343 0193	49,310 4156	60,242 2414
85	855 4069	28,043 6049	34,392 6318	42,158 4551	51,652 6597	63,254 3534
86	23,712 4847	29,165 3491	35,854 3186	44,055 5856	54,106 1610	66,417 0711
87	24,601 7028	30,331 9631	37,378 1272	46,038 0870	56,676 2037	69,737 9247
88	25,524 2667	31,545 2416	38,966 6976	48,109 8009	59,368 3234	73,224 8209
89	26,481 4267	32,807 0513	40,622 7822	50,274 7419	62,188 3187	76,886 0619
90	27,474 4802	34,119 3333	42,349 2505	52,537 1053	65,142 2639	80,730 3650
91	28,504 7732	35,484 1067	44,149 0936	54,901 2750	68,236 5214	84,766 8833
92	29,573 7022	36,903 4709	46,025 4301	57,371 8324	71,477 7562	89,005 2275
93	30,682 7160	38,379 6098	47,981 5109	59,953 5649	74,872 9496	93,455 4888
94	31,833 3179	39,914 7942	50,020 7251	62,651 4753	78,429 4147	98,128 2633
95	33,027 0673	41,511 3859	52,146 6059	65,470 7917	82,154 8119	103,034 6764
96	34,265 5823	43,171 8414	54,362 8366	68,416 9773	86,057 1655	108,186 4103
97	35,550 5417	44,898 7150	56,623 2572	71,495 7413	90,144 8808	113,595 7308
98	36,883 6870	46,694 6636	59,081 8706	74,713 0496	94,426 7627	119,275 5173
99	38,266 8292	48,562 4502	61,592 8501	78,075 1369	98,912 0339	125,239 2932
100	39,701 8312	50,504 9482	64,210 5462	81,588 5180	103,610 3555	131,501 2578

Nach Jahren (n)	Der End- oder Nachwert ($1{,}0p^n$) einer Geldeinheit (Mark, Krone, Franc usw.) beträgt bei einem Zinsfuße (p) von:				
	5½%	6%	6½%	7%	8%
1	1,055	1,06	1,065	1,07	1,08
2	113 025	123 6	134 225	144 9	166 4
3	174 2414	191 0160	207 9496	225 043	259 712
4	238 8246	262 4770	286 4663	310 796	360 4890
5	306 9600	338 2256	370 0867	402 5517	469 3281
6	378 8428	418 5191	459 1423	500 7303	586 8743
7	454 6792	503 6303	553 9865	605 7815	713 8243
8	534 6865	593 8481	654 9957	718 1862	850 9302
9	619 0943	689 4790	762 5704	838 4592	999 0046
10	708 1445	790 8477	877 1375	967 1514	2,158 9250
11	1,802 0924	1,898 2986	1,999 1514	2,104 8519	2,331 6390
12	901 2075	2,012 1965	2,129 0962	252 1916	518 1701
13	2,005 7739	132 9283	267 4875	409 8450	719 6237
14	116 0915	260 9040	414 8742	578 5341	937 1936
15	232 4765	396 5582	571 8410	759 0315	3,172 1691
16	355 2623	540 3517	739 0107	952 1637	425 9426
17	484 8021	692 7728	917 0464	3,158 8152	700 0180
18	621 4663	854 3391	3,106 6544	379 9323	996 0195
19	765 6469	3,025 5995	308 5869	616 5275	4,315 7011
20	917 7575	207 1355	523 6451	869 6845	660 9571
21	3,078 2341	3,399 5636	3,752 6820	4,140 5624	5,033 8337
22	247 5370	603 5374	996 6063	430 4017	436 5404
23	426 1516	819 7497	4,256 3857	740 5299	871 4636
24	614 5899	4,048 9346	533 0508	5,072 3669	6,341 1807
25	813 3923	291 8707	827 6991	427 4326	848 4752
26	4,023 1289	549 3830	5,141 4995	807 3529	7,396 3532
27	244 4010	822 3459	475 6970	6,213 8676	988 0615
28	477 8431	5,111 6867	831 6173	648 8384	8,627 1064
29	724 1244	418 3879	6,210 6724	7,114 2570	9,317 2749
30	983 9513	743 4912	614 3662	612 2550	10,062 6569
31	5,258 0686	6,088 1006	7,044 3000	8,145 1129	10,867 6694
32	547 2624	453 3867	502 1795	715 2708	11,737 0830
33	852 3618	840 5899	989 8211	9,325 3397	12,676 0496
34	6,174 2417	7,251 0253	8,509 1595	978 1135	13,690 1336
35	513 8250	686 0868	9,062 2549	10,676 5815	14,785 3443
36	872 0854	8,147 2520	651 3014	11,423 9422	15,968 1718
37	7,250 0501	636 0871	10,278 6360	12,223 6181	17,245 6256
38	648 8028	9,154 2523	946 7474	13,079 2714	18,625 2756
39	8,069 4870	703 5075	11,658 2859	994 8204	20,115 2977
40	513 3088	10,285 7179	12,416 0745	14,974 4578	21,724 5215
41	8,981 5408	10,902 8610	13,223 1194	16,022 6699	23,462 4832
42	9,475 5255	11,557 0327	14,082 6221	17,144 2568	25,339 4819
43	996 6794	12,250 4546	997 9926	18,344 3547	27,366 6404
44	10,546 4968	985 4819	15,972 8621	19,628 4596	29,555 9717
45	11,126 5541	13,764 6108	17,011 0981	21,002 4518	31,920 4494
46	11,738 5146	14,590 4875	18,116 8195	22,472 6234	34,474 0853
47	12,384 1329	15,465 9167	19,294 4128	24,045 7070	37,232 0122
48	13,065 2602	16,393 8717	20,548 5496	25,728 9065	40,210 5731
49	13,783 8195	17,377 5040	21,884 2053	27,529 9300	43,427 4190
50	14,541 9612	18,420 1543	23,306 6787	29,457 0250	46,901 6125

Nach Jahren (n)	Der End- oder Nachwert ($1.0p^n$) einer Geldeinheit (Mark, Krone, Franc usw.) beträgt bei einem Zinsfuße (p) von:				
	5½%	6%	6½%	7%	8%
51	15,341 7691	19,525 3635	24,821 6128	31,519 0168	50.653 7415
52	16,185 5664	20,696 8853	26,435 0176	33,725 3480	54,706 0408
53	17.075 7725	21.938 6985	28,153 2938	36,086 1223	59,082 5241
54	18,014 9400	23.255 0204	29,983 2579	38,612 1509	63.809 1260
55	19.005 7617	24,650 3216	31.932 1696	41.315 0014	68,913 8561
56	20,051 0786	26,129 3409	34,007 7606	44,207 0516	74,426 9646
57	21,153 8879	27,697 1013	36,218 2651	47.301 5452	80,381 1218
58	22,317 3518	29,358 9274	38,572 4523	50,612 6534	86.811 6115
59	23,544 8061	31,120 4631	41.079 6617	54,155 5391	93,756 5404
60	24,839 7704	32,987 6908	43,749 8397	57,946 4268	101,257 0637
61	26,205 9578	34,966 9523	46,593 5793	62,002 6767	109,357 6288
62	27,647 2855	37,064 9694	49,622 1620	66,342 8641	118.106 2391
63	29,167 8862	39,288 8676	52,847 6025	70,986 8646	127,554 7382
64	30,772 1199	41,646 1997	56,282 6967	75,955 9451	137.759 1172
65	32,464 5865	44,144 9716	59,941 0719	81.272 8612	148,779 8466
66	34,250 1388	46,793 6699	63,837 2416	86,961 9615	160,682 2343
67	36,133 8964	49,601 2901	67,986 6623	93,049 2988	173.536 8131
68	38,121 2607	52.577 3675	72,405 7954	99,562 7498	187,419 7581
69	40,217 9301	55,732 0096	77,112 1721	106,532 1422	202,413 3388
70	42,429 9162	59,075 9302	82,124 4633	113,989 3922	218,606 4059
71	44,763 5616	62,620 4860	87,462 5534	121.968 6496	236,094 9184
72	47,225 5575	66,377 7151	93.147 6194	130,506 4551	254,982 5118
73	49,822 9632	70,360 3781	99,202 2146	139,641 9070	275,381 1128
74	52,563 2261	74,582 0007	105,650 3586	149,416 8405	297,411 6018
75	55,454 2036	79,056 9208	112,517 6319	159,876 0193	321.204 5300
76	58,504 1848	83,800 3360	119,831 2779	171,067 3407	346,900 8924
77	61,721 9149	88,828 3562	127,620 3110	183,042 0545	374.652 9637
78	65,116 6203	94.158 0576	135,915 6312	195,854 9983	404.625 2008
79	68,698 0344	99,807 5410	144.750 1472	209,564 8482	436,995 2169
80	72,476 4263	105,795 9935	154,158 9068	224.234 3876	471,954 8343
81	76,462 6297	112,143 7531	164,179 2358	239,930 7947	509,711 2210
82	80,668 0744	118,872 3783	174.850 8861	256,725 9503	550,488 1187
83	85,104 8184	126,004 7210	186,216 1937	274,696 7669	594,527 1682
84	89,785 5835	133,565 0042	198,320 2463	293,925 5405	642.089 3416
85	94.723 7906	141,578 9045	211,211 0623	314,500 3284	693,456 4890
86	99,933 5990	150,073 6387	224,939 7813	336.515 3514	748,933 0081
87	105,429 9470	159,078 0571	239,560 8671	360,071 4260	808,847 6487
88	111,228 5941	168.622 7405	255,132 3235	385,276 4258	873,555 4606
89	117,346 1667	178.740 1049	271,715 9245	412,245 7756	943,439 8975
90	123,800 2059	189,464 5112	289,377 4596	441,102 9799	1018,915 0893
91	130,609 2172	200,832 3819	308,186 9945	471.980 1885	1100,428 2964
92	137,792 7242	212,882 3248	328,219 1491	505,018 8017	1188,462 5601
93	145,371 3240	225,655 2643	349,553 3938	540,370 1178	1283,539 5649
94	153,366 7468	239,194 5802	372,274 3644	578,196 0260	1386,222 7301
95	161.801 9179	253,546 2550	396.472 1981	618,669 7478	1497,120 5485
96	170,701 0234	268.759 0303	422,242 8910	661.976 6302	1616,890 1924
97	180.089 5797	284,884 5721	449,688 6789	708,314 9943	1746,241 4078
98	189,994 5066	301,977 6464	478,918 4430	757,897 0439	1885,940 7205
99	200,444 2044	320,096 3052	510,048 1418	810,949 8370	2036,815 9781
100	211,468 6357	339.302 0835	543,201 2710	867,716 3256	2199,761 2563

II. Diskontierungs-Tafel.

Vor Jahren (n)	Der Anfangs- oder Bar- oder Vorwert $\left(\frac{1}{1{,}0p^n}\right)$ einer Geldeinheit (Mark, Krone, Franc usw.) beträgt bei einem Zinsfuße (p) von:					
	1%	2%	$2\frac{1}{2}$%	3%	$3\frac{1}{4}$%	$3\frac{1}{2}$%
1	0,990 0990	0,980 3922	0,975 6098	0,970 8738	0,968 5230	0,966 1836
2	980 2960	961 1688	951 8144	942 5959	938 0368	933 5107
3	970 5901	942 3223	928 5994	915 1417	908 5102	901 9427
4	960 9803	923 8454	905 9506	888 4870	879 9130	871 4422
5	951 4657	905 7308	883 8543	862 6088	852 2160	841 9732
6	942 0452	887 9714	862 2969	837 4843	825 3908	813 5006
7	932 7180	870 5602	841 2652	813 0915	799 4100	785 9910
8	923 4832	853 4904	820 7466	789 4092	774 2470	759 4116
9	914 3398	836 7553	800 7284	766 4167	749 8760	733 7310
10	905 2869	820 3483	781 1984	744 0939	726 2722	708 9188
11	0,896 3237	0,804 2630	0,762 1448	0,722 4213	0,703 4113	0,684 9457
12	887 4492	788 4932	743 5559	701 3799	681 2700	661 7833
13	878 6626	773 0325	725 4204	680 9513	659 8257	639 4041
14	869 9630	757 8750	707 7272	661 1178	639 0563	617 7818
15	861 3495	743 0147	690 4656	641 8619	618 9408	596 8906
16	852 8213	728 4458	673 6249	623 1669	599 4584	576 7059
17	844 3775	714 1626	657 1951	605 0164	580 5892	557 2038
18	836 0173	700 1594	641 1659	587 3946	562 3140	538 3611
19	827 7399	686 4308	625 5277	570 2860	544 6141	520 1557
20	819 5445	672 9713	610 2709	553 6757	527 4712	502 5659
21	0,811 4302	0,659 7758	0,595 3863	0,537 5493	0,510 8680	0,485 5709
22	803 3962	646 8390	580 8647	521 8925	494 7874	469 1506
23	795 4418	634 1559	566 6972	506 6917	479 2130	453 2856
24	787 5661	621 7215	552 8753	491 9337	464 1288	437 9571
25	779 7684	609 5309	539 3906	477 6056	449 5194	423 1470
26	772 0480	597 5793	526 2347	463 6947	435 3699	408 8377
27	764 4039	585 8620	513 3997	450 1891	421 6658	395 0122
28	756 8356	574 3745	500 8778	437 0767	408 3930	381 6543
29	749 3421	563 1123	488 6612	424 3464	395 5380	368 7481
30	741 9229	552 0709	476 7427	411 9868	383 0877	356 2784
31	0,734 5771	0,541 2460	0,465 1148	0,399 9871	0,371 0292	0,344 2303
32	727 3041	530 6333	453 7705	388 3370	359 3503	332 5897
33	720 1031	520 2287	442 7030	377 0262	348 0391	321 3427
34	712 9733	510 0282	431 9053	366 0449	337 0838	310 4760
35	705 9142	500 0276	421 3711	355 3834	326 4735	299 9769
36	698 9249	490 2231	411 0937	345 0324	316 1971	289 8327
37	692 0049	480 6109	401 0670	334 9829	306 2441	280 0316
38	685 1534	471 1872	391 2849	325 2261	296 6045	270 5619
39	678 3697	461 9482	381 7414	315 7535	287 2683	261 4125
40	671 6531	452 8904	372 4306	306 5568	278 2259	252 5725
41	0,665 0031	0,444 0102	0,363 3469	0,297 6280	0,269 4682	0,244 0314
42	658 4189	435 3041	354 4848	288 9592	260 9861	235 7791
43	651 8999	426 7687	345 8389	280 5429	252 7711	227 8059
44	645 4455	418 4007	337 4038	272 3718	244 8146	220 1023
45	639 0549	410 1968	329 1744	264 4386	237 1086	212 6592
46	632 7276	402 1537	321 1458	256 7365	229 6451	205 4679
47	626 4630	394 2684	313 3129	249 2588	222 4166	198 5197
48	620 2604	386 5376	305 6712	241 9988	215 4156	191 8064
49	614 1192	378 9584	298 2158	234 9503	208 6349	185 3202
50	608 0388	371 5279	290 9422	228 1071	202 0677	179 0534

Vor Jahren (n)	Der Anfangs- oder Bar- oder Vorwert $\left(\frac{1}{1{,}0p^n}\right)$ einer Geldeinheit (Mark, Krone, Franc usw.) beträgt bei einem Zinsfuße (p) von:					
	1 %	2 %	2 ½ %	3 %	3 ¼ %	3 ½ %
51	0,602 0186	0,364 2430	0,283 8461	0,221 4632	0,195 7072	0,172 9984
52	596 0581	357 1010	276 9230	215 0128	189 5470	167 1482
53	590 1565	350 0990	270 1688	208 7503	183 5806	161 4959
54	584 3134	343 2343	263 5793	202 6702	177 8020	156 0347
55	578 5281	336 5042	257 1505	196 7672	172 2054	150 7581
56	572 8001	329 9061	250 8785	191 0361	166 7849	145 6600
57	567 1288	323 4374	244 7596	185 4719	161 5350	140 7343
58	561 5136	317 0955	238 7898	180 0698	156 4503	135 9752
59	555 9541	310 8779	232 9657	174 8251	151 5258	131 3770
60	550 4496	304 7823	227 2836	169 7331	146 7562	126 9343
61	0,544 9996	0,298 8061	0,221 7401	0,164 7894	0,142 1367	0,122 6418
62	539 6036	292 9472	216 3318	159 9897	137 6627	118 4945
63	534 2610	287 2031	211 0554	155 3298	133 3295	114 4875
64	528 9713	281 5717	205 9077	150 8056	129 1327	110 6159
65	523 7339	276 0507	200 8856	146 4132	125 0680	106 8753
66	518 5484	270 6379	195 9859	142 1488	121 1312	103 2611
67	513 4143	265 3313	191 2058	138 0085	117 3183	099 7692
68	508 3310	260 1287	186 5422	133 9889	113 6255	096 3954
69	503 2980	255 0282	181 9924	130 0863	110 0489	093 1356
70	498 3149	250 0276	177 5536	126 2974	106 5849	089 9861
71	0,493 3810	0,245 1251	0,173 2230	0,122 6188	0,103 2299	0,086 9431
72	488 4961	240 3187	168 9980	119 0474	099 9806	084 0030
73	483 6595	235 6066	164 8761	115 5800	096 8335	081 1623
74	478 8708	230 9869	160 8548	112 2136	093 7855	078 4177
75	474 1295	226 4577	156 9315	108 9452	090 8334	075 7659
76	469 4351	222 0174	153 1039	105 7720	087 9742	073 2038
77	464 7873	217 6641	149 3696	102 6913	085 2050	070 7283
78	460 1854	213 3962	145 7265	099 7003	082 5230	068 3365
79	455 6291	209 2119	142 1722	096 7964	079 9255	066 0256
80	451 1179	205 1097	138 7046	093 9771	077 4097	063 7928
81	0,446 6514	0,201 0880	0,135 3215	0,091 2399	0,074 9730	0,061 6356
82	442 2291	197 1451	132 0210	088 5824	072 6131	059 5513
83	437 8506	193 2795	128 8010	086 0024	070 3275	057 5375
84	433 5155	189 4897	125 6595	083 4974	068 1138	055 5918
85	429 2232	185 7742	122 5946	081 0655	065 9698	053 7119
86	424 9735	182 1316	119 6045	078 7043	063 8932	051 8955
87	420 7658	178 5604	116 6873	076 4120	061 8821	050 1406
88	416 5998	175 0592	113 8413	074 1864	059 9342	048 4450
89	412 4751	171 6266	111 0647	072 0256	058 0476	046 8068
90	408 3912	168 2614	108 3558	069 9278	056 2205	045 2239
91	0,404 3477	0,164 9622	0,105 7130	0,067 8910	0,054 4508	0,043 6946
92	400 3443	161 7276	103 1346	065 9136	052 7369	042 2170
93	396 3805	158 5565	100 6191	063 9938	051 0769	040 7894
94	392 4559	155 4475	098 1650	062 1299	049 4691	039 4101
95	388 5702	152 3995	095 7707	060 3203	047 9120	038 0773
96	384 7230	149 4113	093 4349	058 5634	046 4039	036 7897
97	380 9138	146 4817	091 1560	056 8577	044 9432	035 5456
98	377 1424	143 6095	088 9326	055 2016	043 5285	034 3436
99	373 4083	140 7936	086 7635	053 5938	042 1584	033 1822
100	369 7112	138 0330	084 6474	052 0328	040 8314	032 0601

Vor Jahren (n)	Der Anfangs- oder Bar- oder Vorwert $\left(\frac{1}{1{,}0p^n}\right)$ einer Geldeinheit (Mark, Krone, Franc usw.) beträgt bei einem Zinsfuße (p) von:					
	$3\frac{3}{4}$ %	4 %	$4\frac{1}{4}$ %	$4\frac{1}{2}$ %	$4\frac{3}{4}$ %	5 %
1	0,963 8554	0,961 5385	0,959 2326	0,956 9378	0,954 6539	0,952 3809
2	929 0173	924 5562	920 1272	915 7299	911 3641	907 0295
3	895 4383	888 9964	882 6160	876 2966	870 0374	863 8376
4	863 0731	854 8042	846 6341	838 5613	830 5846	822 7025
5	831 8777	821 9271	812 1190	802 4510	792 9209	783 5262
6	801 8098	790 3145	779 0110	767 8957	756 9650	746 2154
7	772 8287	759 9178	747 2528	734 8285	722 6396	710 6813
8	744 8952	730 6902	716 7893	703 1851	689 8708	676 8394
9	717 9712	702 5867	687 5676	672 9044	658 5878	644 6089
10	692 0205	675 5642	659 5373	643 9277	628 7235	613 9132
11	0,667 0077	0,649 5809	0,632 6497	0,616 1987	0,600 2133	0,584 6793
12	642 8990	624 5970	606 8582	589 6639	572 9960	556 8374
13	619 6617	600 5741	582 1182	564 2716	547 0129	530 3213
14	597 2643	577 4751	558 3868	539 9729	522 2080	505 0679
15	575 6764	555 2645	535 6228	516 7204	498 5280	481 0171
16	554 8688	533 9082	513 7868	494 4693	475 9217	458 1115
17	534 8133	513 3732	492 8411	473 1764	454 3405	436 2967
18	515 4827	493 6281	472 7493	452 8004	433 7380	415 5206
19	496 8508	474 6424	453 4765	433 3018	414 0696	395 7340
20	478 8923	456 3869	434 9894	414 6429	395 2932	376 8895
21	0,461 5830	0,438 8336	0,417 2561	0,396 7874	0,377 3682	0,358 9424
22	444 8993	421 9554	400 2456	379 7009	360 2561	341 8499
23	428 8186	405 7263	383 9287	363 3501	343 9199	325 5713
24	413 3191	390 1215	368 2769	347 7035	328 3245	310 0679
25	398 3799	375 1168	353 2632	332 7306	313 4362	295 3028
26	383 9806	360 6892	338 8616	318 4025	299 2231	281 2407
27	370 1018	346 8166	325 0471	304 6914	285 6545	267 8483
28	356 7246	333 4775	311 7958	291 5707	272 7012	255 0936
29	343 8309	320 6514	299 0847	279 0150	260 3353	242 9463
30	331 4033	308 3187	286 8918	267 0000	248 5301	231 3774
31	0,319 4249	0,296 4603	0,275 1959	0,255 5024	0,237 2603	0,220 3595
32	307 8794	285 0579	263 9769	244 4999	226 5014	209 8662
83	296 7512	274 0942	253 2153	233 9712	216 2305	199 8725
34	286 0253	263 5521	242 8923	223 8959	206 4253	190 3548
35	275 6870	253 4155	232 9903	214 2544	197 0647	181 2903
36	265 7224	243 6687	223 4919	205 0282	188 1286	172 6574
37	256 1180	234 2968	214 3807	196 1992	179 5977	164 4356
58	246 8607	225 2854	205 6409	187 7504	171 4537	156 6054
38	237 9380	216 6206	197 2575	179 6655	163 6789	149 1480
40	229 3379	208 2890	189 2158	171 9287	156 2567	142 0457
41	0,221 0486	0,200 2779	0.181 5020	0,164 5251	0,149 1711	0,135 2816
42	213 0588	192 5749	174 1026	157 4403	142 4063	128 8396
43	205 3579	185 1682	167 0049	150 6605	135 9492	122 7044
44	197 9353	178 0463	160 1966	144 1728	129 7844	116 8613
45	190 7811	171 1984	153 6658	137 9644	123 8992	111 2965
46	183 8854	164 6139	147 4012	132 0233	118 2809	105 9967
47	177 2389	158 2826	141 3921	126 3381	112 9173	100 9492
48	170 8327	152 1948	135 6279	120 8977	107 7970	096 1421
49	164 6580	146 3411	130 0987	115 6916	102 9088	091 5639
50	158 7065	140 7126	124 7944	110 7096	098 2423	087 2037

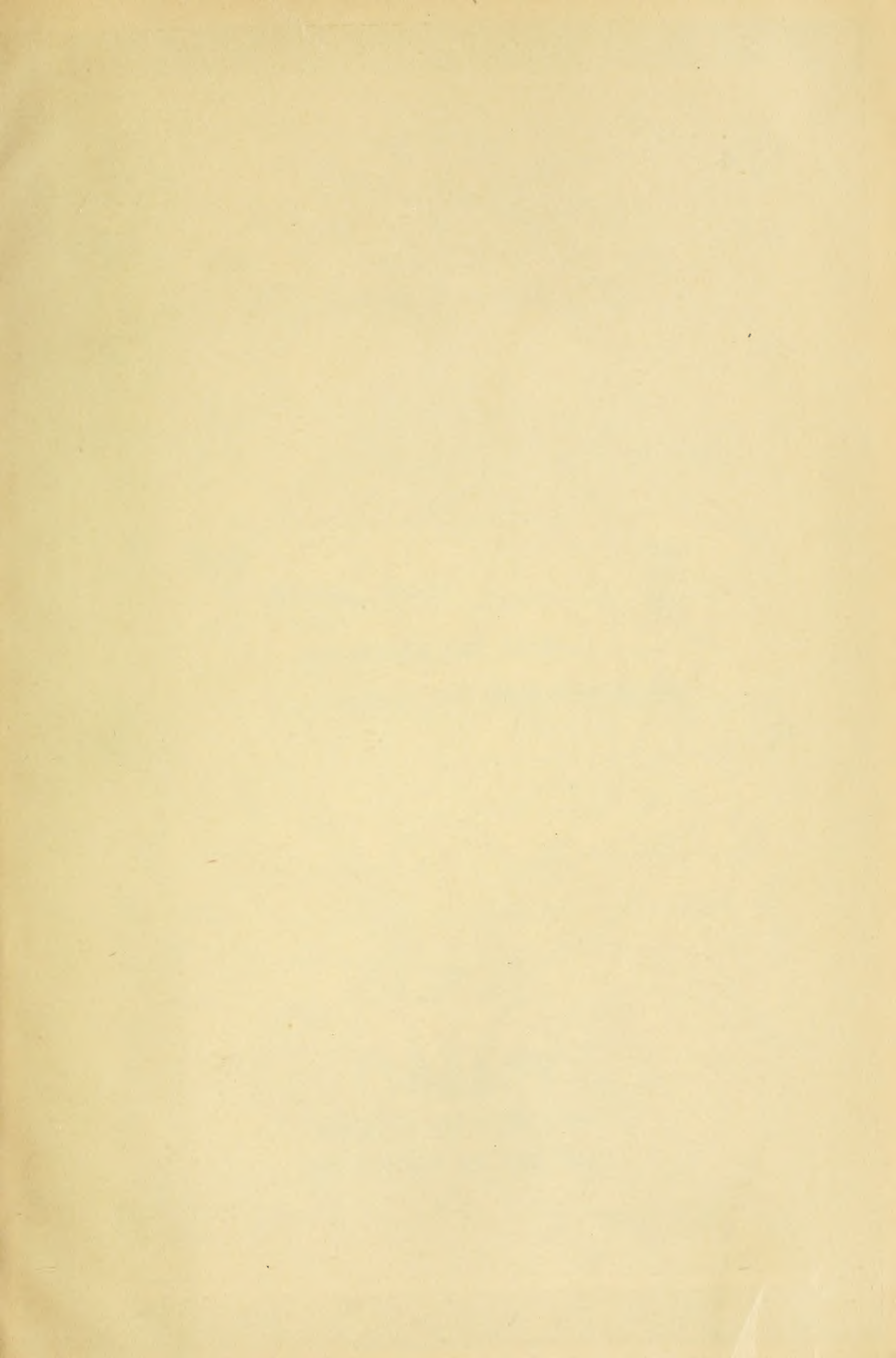
Vor Jahren	Der Anfangs- oder Bar- oder Vorwert $\left(\frac{1}{1,0p^n}\right)$ einer Geldeinheit (Mark, Krone, Franc usw.) beträgt bei einem Zinsfuße (p) von:					
(n)	$3\frac{3}{4}$ %	4 %	$4\frac{1}{4}$ %	$4\frac{1}{2}$ %	$4\frac{3}{4}$ %	5 %
51	0,152 9701	0,135 3006	0,119 7073	0,105 9422	0,093 7874	0,083 0512
52	147 4411	130 0967	114 8272	101 3801	089 5345	079 0963
53	142 1119	125 0930	110 1460	097 0145	085 4744	075 3299
54	136 9753	120 2817	105 6556	092 8368	081 5985	071 7427
55	132 0244	115 6555	101 3483	088 8391	077 8983	068 3264
56	127 2524	111 2072	097 2166	085 0135	074 3660	065 0728
57	122 6529	106 9300	093 2533	081 3526	070 9938	061 9741
58	118 2197	102 8173	089 4516	077 8494	067 7745	059 0229
59	113 9467	098 8628	085 8049	074 4970	064 7012	056 2123
60	109 8281	095 0604	082 3069	071 2890	061 7672	053 5355
61	0,105 8585	0,091 4042	0,078 9514	0,068 2191	0,058 9663	0,050 9862
62	102 0322	087 8887	075 7328	065 2815	056 2924	048 5583
63	098 3443	084 5083	072 6454	062 4703	053 7398	046 2460
64	094 7897	081 2580	069 6838	059 7802	051 3029	044 0438
65	091 3636	078 1327	066 8430	057 2059	048 9765	041 9465
66	088 0613	075 1276	064 1180	054 7425	046 7556	039 9490
67	084 8783	072 2381	061 5040	052 3852	044 6354	038 0467
68	081 8105	069 4597	058 9967	050 1294	042 6114	036 2349
69	078 8535	066 7882	056 5915	047 9707	040 6791	034 5095
70	076 0033	064 2194	054 2845	045 9050	038 8345	032 8662
71	0,073 2562	0,061 7494	0,052 0714	0,043 9282	0,037 0735	0,031 3011
72	070 6084	059 3744	049 9486	042 0365	035 3924	029 8106
73	068 0563	057 0908	047 9123	040 2264	033 7875	028 3910
74	065 5964	054 8950	045 9591	038 4941	032 2553	027 0391
75	063 2255	052 7837	044 0854	036 8365	030 7927	025 7515
76	060 9402	050 7535	042 2882	035 2502	029 3964	024 5252
77	058 7376	048 8015	040 5642	033 7323	028 0633	023 3574
78	056 6145	046 9245	038 9105	032 2797	026 7908	022 2451
79	054 5682	045 1197	037 3242	030 8896	025 5759	021 1858
80	052 5959	043 3843	035 8026	029 5595	024 4162	020 1770
81	0,050 6948	0,041 7157	0,034 3430	0,028 2866	0,023 3090	0,019 2162
82	048 8625	040 1112	032 9430	027 0685	022 2520	018 3011
83	047 0963	038 5685	031 6000	025 9029	021 2430	017 4296
84	045 3941	037 0851	030 3117	024 7874	020 2797	016 5996
85	043 7533	035 6587	029 0760	023 7200	019 3601	015 8092
86	042 1719	034 2873	027 8906	022 6986	018 4822	015 0564
87	040 6476	032 9685	026 7536	021 7211	017 6441	014 3394
88	039 1784	031 7005	025 6629	020 7858	016 8440	013 6566
89	037 7623	030 4812	024 6167	019 8907	016 0802	013 0063
90	036 3974	029 3089	023 6132	019 0342	015 3510	012 3869
91	0,035 0818	0,028 1816	0,022 6505	0,018 2145	0,014 6549	0,011 7971
92	033 8138	027 0977	021 7271	017 4302	013 9904	011 2353
93	032 5916	026 0555	020 8414	016 6796	013 3560	010 7003
94	031 4136	025 0534	019 9917	015 9613	012 7503	010 1907
95	030 2782	024 0898	019 1767	015 2740	012 1721	009 7055
96	029 1838	023 1632	018 3949	014 6163	011 6202	009 2433
97	028 1290	022 2723	017 6450	013 9868	011 0932	008 8031
98	027 1123	021 4157	016 9257	013 3845	010 5902	008 3839
99	026 1323	020 5920	016 2356	012 8082	010 1100	007 9847
100	025 1878	019 8000	015 5738	012 2566	009 6515	007 6045

Vor Jahren (n)	Der Anfangs- oder Bar- oder Vorwert $\left(\frac{1}{1,0p^n}\right)$ einer Geldeinheit (Mark, Krone, Franc usw.) beträgt bei einem Zinsfuße (p) von:				
	$5\frac{1}{2}$ %	6 %	$6\frac{1}{2}$ %	7 %	8 %
1	0,947 8673	0,943 3962	0,938 9671	0.934 5794	0,925 9259
2	898 4524	889 9964	881 6593	873 4387	857 3388
3	851 6137	839 6193	827 8491	816 2979	793 8322
4	807 2167	792 0937	777 3231	762 8952	735 0298
5	765 1343	747 2582	729 8808	712 0862	680 5832
6	725 2458	704 9605	685 3341	666 3422	630 1696
7	687 4368	665 0571	643 5062	622 7497	583 4904
8	651 5989	627 4124	604 2312	582 0091	540 2689
9	617 6293	591 8985	567 3532	543 9337	500 2490
10	585 4306	558 3948	532 7260	508 3493	463 1935
11	0.554 9105	0,526 7875	0,500 2122	0,475 0928	0,428 8829
12	525 9815	496 9694	469 6828	444 0120	397 1138
13	498 5607	468 8390	441 0168	414 9644	367 6979
14	472 5694	442 3010	414 1002	387 8172	340 4610
15	447 9330	417 2651	388 8265	362 4460	315 2417
16	424 5811	393 6463	365 0953	338 7346	291 8905
17	402 4465	371 3644	342 8125	316 5744	270 2689
18	381 4659	350 3438	321 8897	295 8639	250 2490
19	361 5791	330 5130	302 2438	276 5083	231 7121
20	342 7290	311 8047	283 7970	258 4190	214 5482
21	0,324 8616	0.294 1554	0.266 4761	0,241 5131	0,198 6557
22	307 9257	277 5051	250 2123	225 7132	183 9405
23	291 8727	261 7973	234 9411	210 9469	170 3153
24	276 6566	246 9785	220 6020	197 1466	157 6993
25	262 2337	232 9986	207 1380	184 2492	146 0179
26	248 5627	219 8100	194 4958	172 1955	135 2018
27	235 6045	207 3679	182 6251	160 9304	125 1868
28	223 3218	195 6301	171 4790	150 4022	115 9137
29	211 6794	184 5567	161 0132	140 5628	107 3275
30	200 6440	174 1101	151 1861	131 3671	099 3773
31	0,190 1839	0,164 2548	0,141 9587	0,122 7730	0,092 0160
32	180 2691	154 9574	133 2946	114 7411	085 2000
33	170 8712	146 1862	125 1592	107 2347	078 8889
34	161 9632	137 9115	117 5204	100 2193	073 0453
35	153 5196	130 1052	110 3478	093 6629	067 6345
36	145 5162	122 7408	103 6130	087 5355	062 6246
37	137 9301	115 7932	097 2892	081 8088	057 9857
38	130 7394	109 2388	091 3513	076 4569	053 6905
39	123 9236	103 0555	085 7759	071 4550	049 7134
40	117 4631	097 2222	080 5407	066 7804	046 0309
41	0,111 3395	0,091 7190	0,075 6251	0,062 4116	0,042 6212
42	105 5350	086 5274	071 0095	058 3286	039 4641
43	100 0332	081 6296	066 6756	054 5127	036 5408
44	094 8182	077 0091	062 6062	050 9464	033 8341
45	089 8751	072 6501	058 7851	047 6135	031 3279
46	085 1896	068 5378	055 1973	044 4986	029 0073
47	080 7485	064 6583	051 8285	041 5875	026 8586
48	076 5388	060 9984	048 6652	038 8668	024 8691
49	072 5487	057 5457	045 6951	036 3241	023 0269
50	068 7665	054 2884	042 9062	033 9478	021 3212

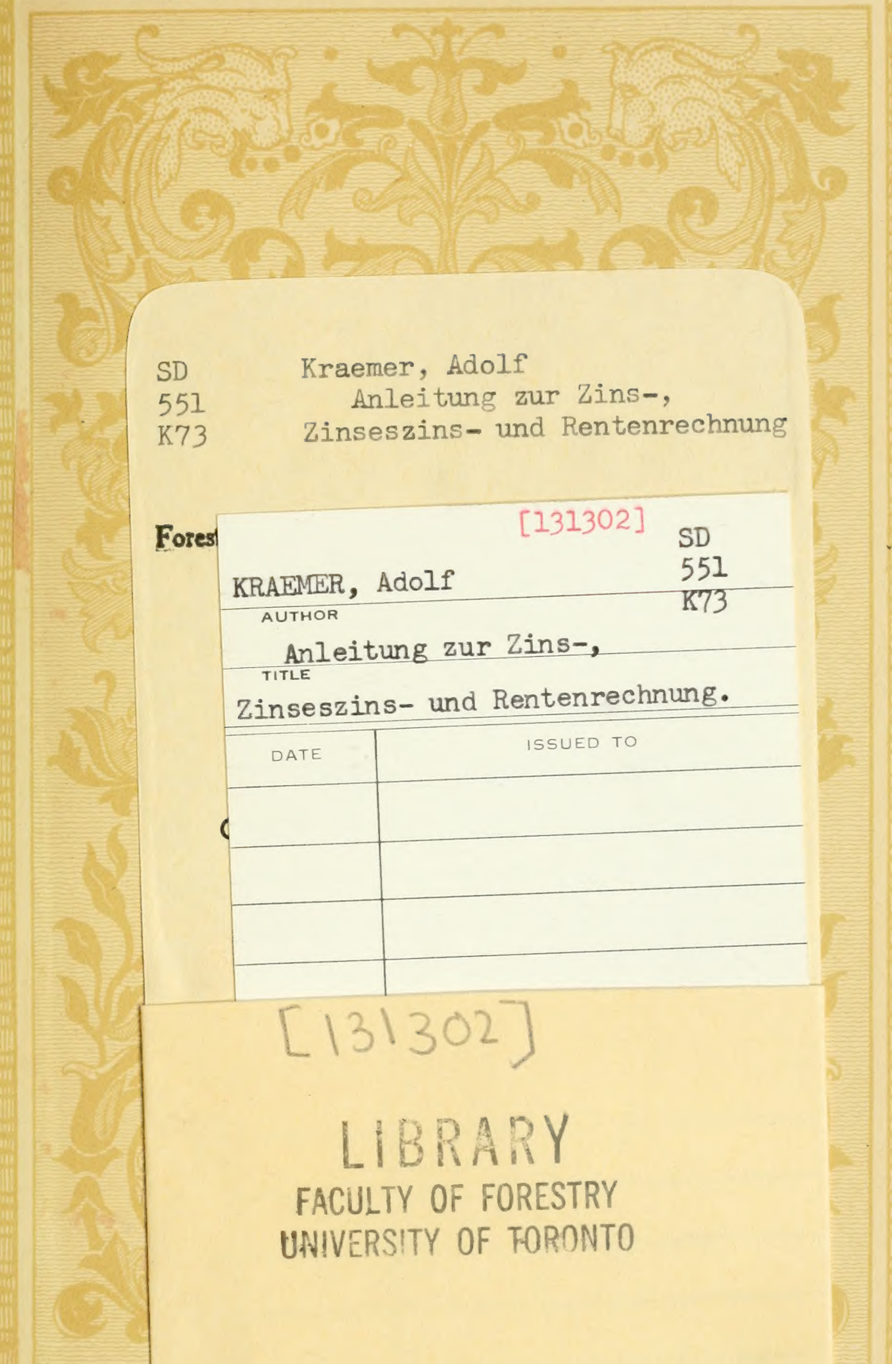
Vor Jahren (n)	Der Anfangs- oder Bar- oder Vorwert $\left(\frac{1}{1{,}0p^n}\right)$ einer Geldeinheit (Mark, Krone, Franc usw.) beträgt bei einem Zinsfuße (p) von:				
	5½%	6%	6½%	7%	8%
51	0.065 1815	0,051 2154	0.040 2875	0,031 7269	0,019 7419
52	061 7834	048 3164	037 8286	029 6513	018 2795
53	058 5625	045 5816	035 5198	027 7115	016 9255
54	055 5095	043 0015	033 3519	025 8986	015 6717
55	052 6156	040 5674	031 3164	024 2043	014 5109
56	049 8726	038 2711	029 4050	022 6208	013 4360
57	047 2726	036 1049	027 6104	021 1410	012 4407
58	044 8082	034 0612	025 9252	019 7579	011 5192
59	042 4722	032 1332	024 3429	018 4653	010 6659
60	040 2580	030 3143	022 8572	017 2573	009 8758
61	0,038 1593	0,028 5984	0,021 4622	0,016 1283	0,009 1443
62	036 1699	026 9796	020 1523	025 0732	008 4669
63	034 2843	025 4525	018 9223	014 0871	007 8398
64	032 4969	024 0118	017 7674	013 1655	007 2590
65	030 8028	022 6526	016 6830	012 3042	006 7213
66	029 1970	021 3704	015 6648	011 4993	006 2235
67	027 6748	020 1608	014 7088	010 7470	005 7625
68	026 2321	019 0196	013 8110	010 0439	005 3356
69	024 8645	017 9430	012 9681	009 3868	004 9404
70	023 5683	016 9274	012 1766	008 7727	004 5744
71	0.022 3396	0,015 9692	0,011 4335	0,008 1988	0,004 2356
72	021 1750	015 0653	010 7356	007 6625	003 9218
73	020 0711	014 2125	010 0804	007 1612	003 6313
74	019 0247	013 4081	009 4652	006 6927	003 3623
75	018 0329	012 6491	008 8875	006 2548	003 1133
76	017 0928	011 9331	008 3451	005 8456	002 8827
77	016 2017	011 2577	007 8357	005 4632	002 6691
78	015 3571	010 6204	007 3575	005 1058	002 4714
79	014 5565	010 0193	006 9085	004 7718	002 2883
80	013 7976	009 4521	006 4868	004 4596	002 1188
81	0,013 0783	0,008 9171	0,006 0909	0,004 1679	0,001 9619
82	012 3965	008 4124	005 7192	003 8952	001 8166
83	011 7502	007 9362	005 3701	003 6404	001 6820
84	011 1376	007 4870	005 0423	003 4022	001 5574
85	010 5570	007 0632	004 7346	003 1797	001 4420
86	010 0066	006 6634	004 4456	002 9716	001 3352
87	009 4850	006 2862	004 1743	002 7772	001 2363
88	008 9905	005 9304	003 9195	002 5955	001 1447
89	008 5218	005 5947	003 6803	002 4257	001 0599
90	008 0775	005 2780	003 4557	002 2670	000 9814
91	0,007 6564	0,004 9793	0,003 2448	0,002 1187	0,000 9087
92	007 2573	004 6974	003 0467	001 9801	000 8414
93	006 8789	004 4315	002 8608	001 8506	000 7791
94	006 5203	004 1807	002 6862	001 7295	000 7214
95	006 1804	003 9440	002 5222	001 6164	000 6679
96	005 8582	003 7208	002 3683	001 5106	000 6185
97	005 5528	003 5102	002 2238	001 4118	000 5727
98	005 2633	003 3115	002 0880	001 3194	000 5302
99	004 9889	003 1241	001 9606	001 2331	000 4910
100	004 7288	002 9472	001 8409	001 1524	000 4546



Druck von Hermann Beyer & Söhne (Beyer & Mann) in Langensalza.








UTL AT DOWNSVIEW
D RANGE BAY SHLF POS ITEM C
39 10 15 23 14 001 1